# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 517.958

# РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В КЛАССЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ НА ГРАФЕ

**М. П. Абреимов**

*Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина*

**Аннотация.** Рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения на графе, описывающая процесс переноса сплошной среды — ламинарное течение вязкой жидкости либо теплоперенос в сложноструктурированных промышленных конструкциях. Формируются достаточные условия однозначной разрешимости математической модели в классе суммируемых на графе функций, которые (достаточные условия) устанавливаются методом конечных разностей. При этом не используются информация о решении начально-краевой задачи (даже факта его существования). Полученные результаты могут использоваться в анализе задач прикладного характера (моделирование процессов теплопереноса по сетеподобным металлическим конструкциям, оптимальное управление ламинарными гидродинамическими потоками в сетевых гидроносителях).
**Ключевые слова:** сетеподобная область, дифференциальное уравнение на графе, слабое решения начально-краевой задачи, разностная схема, устойчивость разностной схемы, сходимость разностной схемы.

## Введение

Для математической модели переноса сплошной среды, реализованной в терминах начально-краевой задачи для параболического уравнения с распределенными параметрами на графе, рассматриваются вопросы однозначной слабой разрешимости, построение сходящейся разностной схемы, устойчивости и сходимости разностной схемы. Представлены пути определения приближений для искомого точного решения, доказана теорема о представлении слабого решения как предела в специальном пространстве с энергетической нормой.

## 1. Обозначения и вспомогательные предложения

В качестве области изменения пространственной переменной функций рассматриваемых начально-краевых задач используется произвольный ограниченный геометрический граф $\Gamma$. Через $V$ обозначено множество узлов $\xi$ графа $\Gamma$ (здесь и ниже используются обозначения, принятые в работе [1]), символами $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ обозначены множества граничных и внутренних узлов ($V = \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$, соответственно. Считаем, что все ребра $\gamma$ графа единичной длины и через $\Gamma_0$ обозначим объединение этих ребер графа, не содержащих концевых точек: $\Gamma_0 = \Gamma \setminus V$). Пусть для фиксированного узла $\xi$ фиксировано множество ребер $R(\xi)$ с ориентацией, определяемой направлением от узла $\xi$, а множество ребер $r(\xi)$ с ориентацией, определяемой направлением к узлу $\xi$, причем каждое ребро $\gamma$ параметризовано переменной $x \in [0,1]$. Введем обозначения $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$, $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0,T)$ и для каждой определенной на графе $\Gamma$ функции $f(x,t)$ будем обозначать через $f(x,t)_\gamma$ сужение на $\gamma$. Интеграл по области $\Gamma_T$ понимается как сумма интегралов по областям, формируемым каждым ребром и интервалом изменения временной переменной $t$.

Введем множество $\Omega$, элементами которого являются функции $u(x) \in C^1(\Gamma)$, (здесь $C^1(\Gamma)$ — пространство функций, непрерывно дифференцируемых в $\Gamma_0$, производная в концевых точках ребер понимается как односторонняя) и при этом связанных условием

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u'(1)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u'(0)_{\gamma_j} \tag{1}$$

для любых $\xi \in J(\Gamma)$ ($a(x)$ — функция, непрерывная на $\Gamma$). Операция замыкания множества $\Omega$ в метрике соболевского пространства $W_2^1(\Gamma)$ задаёт пространство $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$, если выполнено условие равенства нулю элементов этого множества во всех точках узлов $\xi \in \partial\Gamma$. Соотношение (1) играет центральную роль в формировании пространства, в котором определяется начально-краевая задача, введем эти пространства. Обозначим $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множество функций из $L_2(\Gamma_T)$, обобщенные производные которых по переменной $x$ принадлежат $L_2(\Gamma_T)$, и пусть $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ подпространство пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, элементы $u(x,t)$ которого равны нулю при $x \in \partial\Gamma$ любого $t \in (0,T)$, причем эти функции удовлетворяют аналогичным (1) соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u_x(1,t)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u_x(0,t)_{\gamma_j} \tag{2}$$

для любого узла $\xi \in J(\Gamma)$. В задачах прикладного характера, описывающих математическую модель процесса переноса сплошных сред, соотношения (2) используются как описание балансных явлений в местах $\xi$ ветвления сети. Ниже вводятся и другие пространства, а также их подпространства, со свойствами, необходимыми для изучения начально-краевых задач.

Обозначим через $\Omega_0(a,\Gamma_T)$ множество функций $u(x,t)$, аналогичное множеству $\Omega$, для которых имеет место соотношение (2) и справедливо $u(x,t) \in W_2^1(\Gamma_T)$, причем для каждого фиксированного $t \in (0,T)$ $u(x,t)$ принадлежат $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$. Определим пространство $W_{2,0}^1(a,\Gamma_T)$ как замыкание $\Omega_0(a,\Gamma_T)$ в метрике $W_2^1(\Gamma_T)$ и отметим, что для $u(x,t) \in W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ при фиксированном $t \in (0,T)$ имеют место соотношения (2) для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Как указано выше, в задачах, описывающих процесс переноса сплошной среды по сетеподобному носителю, соотношения (2) описывают балансные явления в узлах $\xi$ ветвления сети. Отметим, что те же соотношения (2) в описании малых колебаний упругих сетей суть баланс сил натяжения упругих фрагментов сети.

**Замечание 1.** Пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ и $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ являются пространствами состояний (допустимых решений) параболической системы, моделирующей процесс переноса сплошной среды.

## 2. Начально-краевая задача для системы переноса сплошной среды

В пространстве $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ относительно функции $y(x,t)$ задана начально-краевая задача в области $\overline{\Gamma}_T$, являющаяся математической моделью процесса переноса по сетевому носителю, моделируемому геометрическим графом $\Gamma$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \ x \in \Gamma, \tag{4}$$

$$u\big|_{\partial\Gamma} = 0, \ \ 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Здесь соотношения (4) и (5) означают начальное и краевое условия, соответственно, при этом $a(x)$ и $b(x)$ таковы, что $0 < a_* \le a(x) \le a^*$, $|b(x)| \le \tilde{b}$, $x \in \Gamma$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$.

Следуя работе [3], определим понятие обобщенного решения начально-краевой задачи (3), (4).

**Определение 1.** Слабым решением класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (3)–(5) называется функция $u(x,t) \in W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma_T} \left(-u_t(x,t)\eta_t(x,t) + a(x)u_x(x,t)\eta_x(x,t) + b(x)u(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt = \\ = \int_{\Gamma} \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \tag{6}$$

при любых $\eta(x,t) \in W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Приведём достаточные условия однозначной разрешимости начально-краевой задачи (3)–(5).

**Теорема 1.** *Для любых* $\varphi(x) \in W_{2,0}^{1}(a,\Gamma)$ *и* $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ *(где* $L_{2,1}(\Gamma_T)$ *— пространство, элементы которого принадлежат* $L_1(\Gamma_T)$*, причем* $\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \sqrt{\int_\Gamma f^2(x,t)dx}dt$*) начально-краевая задача (3)–(5) имеет единственное слабое решение из пространства* $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$*. Имеет место непрерывная зависимость решения от исходных данных* $\varphi(x)$ *и* $f(x,t)$ *задачи.*

Доказательство теоремы использует свойство спектральной полноты в пространстве $W_{2,0}^{1}(a,\Gamma)$ системы обобщённых собственных функций задачи Штурма — Лиувилля на графе Γ порождённой эллиптическим оператором $-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)+b(x)u(x,t)$, стоящем в левой части уравнения (3). Отметим что условия разрешимости для векторных задач (т. е. при $u(x,t)$ — векторная функция переменных $x,t$), аналогичных (3)–(5), совпадают с указанными в теореме 1.

### 3. Разностная схема для системы переноса сплошной среды

Построим сетку [2, 3] графа Γ, то есть построим множество элементарных отрезков (элементарных ячеек) $\omega_h$ изменения пространственной переменной $x$. А именно, каждое ребро $\gamma$ графа Γ разобьём точками с числовыми значениями $kh$ $(k=0,1,2,...)$ и шагом $h>0$, шаг равен длине элементарного отрезка (элементарной ячейки) $\omega_h$, причем (что немаловажно) узлы множества $J(\Gamma)$ включены в множество точек разбиения. Совокупность $\{kh\}$ определяет сетку $\Gamma^h$ графа Γ. Для упрощения последующего текста и математических символов в записи сеточной функции $u_h$ индекс $h$ опускается.

Используем следующие аппроксимационные соотношения: $u_x(x)=\frac{1}{h}\big(u(x+h)-u(x)\big)$, $u_{\bar{x}}(x)=\frac{1}{h}\big(u(x)-u(x-h)\big)$ (правое и левое разностные отношения). Тогда операция вычисления производной от произведения функций аппроксимируется следующим образом: $(uv)_x(x)=$ $=u_x(x)v(x)+u(x+h)v_x(x)=u_x(x)v(x)+u(x+h)v_{\bar{x}}(x+h)$, $(uv)_{\bar{x}}(x)=u_{\bar{x}}(x)v(x)+u(x-h)v_{\bar{x}}(x)=$ $=u_{\bar{x}}(x)v(x)+u(x-h)v_x(x-h)$, из чего вытекает конечно-мерный аналог операции интегрирования по частям в виде следующего соотношения:

$$h\sum_{k=0}^{M-1}u_x(kh)v_h(kh)=-h\sum_{k=1}^{M}u_h(kh)v_{\bar{x}}(kh)+u_h(Mh)v_h(Mh)-u_h(0)v_h(0),$$

где сеточные функции $u_h, v_h$ заданы с помощью числовых значений $kh, k=0,1,...,M$ ($M$ — число точек разбиения сетки $\Gamma^h$, шаг разбиения определяется соотношением $h=1/M$).

Рассмотрим разностную схему, соответствующую уравнению (3):

$$u_{\bar{t}}(k)-\big(a_h u_x(k)\big)_{\bar{x}}+b_h u(k)=f_h(k), \tag{7}$$

$$u_h(k)\big|_{\partial\Gamma^h}=0, \tag{8}$$

$$u_h\big|_{t=0}=\varphi_h. \tag{9}$$

Разностные уравнения (7) определяются на временных слоях $t=t_k$ $(k=\overline{1,N})$ во всех точках $\Gamma^h$, соотношения (8), являющиеся аппроксимациями краевых условий (5), имеют место при $k=0,1,...,N$, соотношения (9), являющиеся аппроксимациями начальных условий (4), имеют место во всех точках $\Gamma^h$, причем соответствующая функции $\varphi(x)\in W_{2,0}^{1}(a,\Gamma)$ сеточная функция $\varphi_h$ в $kh$ ячейки $\omega_{kh}$ определяется по усреднению $\varphi_h=\frac{1}{h}\int_{\omega_{kh}}\varphi(x)dx$, ячейки $\omega_{kh}$. Аналогично определяются сеточные функции $a_h, b_h$ на сетке $\Gamma^h$. Соответствующая исходной

функции $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ сеточная функция $f_h(k)$ определяется усреднением $f_h\big|_{x=kh,t=k_0\tau} = \dfrac{1}{h\tau}\int\limits_{\Gamma_T(k,k_0)} f(x,t)dxdt$, здесь $\Gamma_T(k,k_0) = \omega_{kh} \times \big(k_0\tau,(k_0+1)\tau\big)$.

**Замечание 2.** В случае непрерывности всех исходных данных задачи (3)–(5) (функций $a(x)$, $b(x)$ и функции $f(x,t)$, стоящей в правой части уравнения (3)) сеточные функции $a_h$, $b_h, \varphi_h$, $f_h(k)$ определяются по значениям соответствующих функций, разностная схема (7)–(9) при этом остается неизменной и все приведенные утверждения сохраняются.

Следует отметить, что при $t = t_k$ $(k = \overline{1,N})$ разностная схема (7)–(9) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которая связывает неизвестные в виде линейных комбинаций. Эта система однозначно разрешима для всех $\tau < \tau_0$, $\tau_0 > 0$ — фиксированная постоянная (см. ниже утверждение и доказательство теоремы 2).

Для соотношений (6)–(8) можно сформировать тождество (знак «+» в обозначении сетки $\Gamma^h$ означает, что берутся только внутренние точки этой сетки):

$$\sum_{\Gamma_+^h}\big(u_{\bar{t}}\eta_h + a_h u_x \eta_x + b_h u_h \eta_h\big) = \sum_{\Gamma_+^h} f_h \eta_h, \tag{10}$$

которое является конечно-разностным аналогом интегрального тождества (6) и которое выполняется для любого слоя $t = t_k$ $(k = \overline{1,N})$ и для любой сеточной функции $\eta_h$ на $\Gamma^h$, равной нулю на границе $\partial\Gamma^h$.

**Теорема 2.** *Алгебраическая система (7), (8) при $\tau < \tau_0$ (положительное число $\tau_0$ указано ниже) имеет решение и оно единственное для каждого $t = t_k$ $(k = \overline{1,N})$ и любых $f_h(k)$ $(k = \overline{1,N})$.*

### 4. Устойчивость и сходимость разностной схемы

При доказательстве теоремы 2 в тождестве (10) $f_h$ и $u_{k-1}$ ($u_{k-1}$ включено, как слагаемое, в разностное отношение $u_{\bar{t}}(k)$) заменены нулями и при $\eta_h = u_h$ приходим к априорной оценке сеточной нормы $\|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}$ и вытекающей отсюда устойчивости и сходимости разностной схемы

**Теорема 3.** *Схема (7), (8) является устойчивой по исходным данным.*

Как и в доказательстве теоремы 2 при доказательстве теоремы 3 используются априорные оценки, вытекающие из тождества (10) при $\eta_h = 2\tau u_h(k)$. В результате приходим к оценке

$$\|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \le C\Big(\|\varphi_h\|_{2,\Gamma_+^h} + \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}\Big). \tag{11}$$

Используя неравенство (11), показывается слабая сходимость в метрике $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ приближений, полученных при решении алгебраической системы (10) к решению (т. е. слабому решению) задачи (3)–(5). Действительно, из тождеств (10) при всех значениях $t = t_k$ $(k = \overline{1,N})$ вытекает тождество

$$\int\limits_{\Gamma_T}(-\tilde{u}_h\tilde{\eta}_t + a_h\tilde{u}_x\tilde{\eta}_x + b_h\tilde{u}_h\tilde{\eta}_h)dxdt - \int\limits_{\Gamma}\varphi\tilde{\eta}_h(0)dx = \int\limits_{\Gamma_T} f_h\tilde{\eta}_h dxdt \tag{12}$$

при произвольной сеточной функции $\eta_h(k)$, которая равна нулю на $\partial\Gamma^h$ при $k = \overline{1,N}$ и равна нулю при $t = T$, при этом в (12) через $\tilde{v}$ обозначены кусочно-постоянные интерполяции сеточных функций $v_h : \tilde{v}(x.t) = v_{kh,(k_0+1)\tau}$. Осуществим в (12) предельный переход при $h \to 0$, $\tau \to 0$, взяв в качестве сеточной функции $\eta_h$ значения на сетке $\Gamma_T^h$ произвольной дифференцируемой функции $\eta(x,t)$, лишь бы она была равна нулю вблизи боковой поверхности цилиндра $\Gamma_T$ и его верхнего основания. Получим предельную функцию являющуюся слабым решением задачи (3)–(5), а значит, имеет место следующее утверждение.

**Замечание 3.** При доказательстве теоремы 3 указан алгоритм построения приближений к точному решению задачи (3)–(5). Эти приближения представлены последовательностью кусочно-постоянных интерполяций сеточных функций $u_h$.

**Теорема 4.** *При выполнении условий* $\varphi(x) \in W_{2,0}^{1}(a,\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ *разностная схема (7)–(9) однозначно определяет сеточную функцию* $u_h$ *при всех* $\tau < \frac{1}{b^*}$, *интерполяции (восполнения) этой сеточной функции при* $h \to 0$ *и* $\tau \to 0$ *слабо сходятся в метрике* $L_2(\Gamma_T)$ *к обобщённому (слабому) решению* $u(x,t) \in W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ *задачи (3)–(5), обобщённые производные от интерполяций также сходятся слабо в* $L_2(\Gamma_T)$ *к* $\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$.

**Замечание 4.** Можно показать, что при выполнении тех же самых условий теоремы 4 интерполяции сеточной функции сходятся сильно в $L_2(\Gamma_T)$ к обобщённому решению $u(x,t) \in W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ задачи (3)-(5), но обобщённые производные от интерполяций сходятся слабо в $L_2(\Gamma_T)$ к $\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$.

## Заключение

Представлен подход к построению разностных схем для начально-краевых эволюционных дифференциальных уравнений, определенных на множестве суммируемых с квадратом функций, носитель которых представлен геометрическим графом. Рассмотрена начально-краевая задача для уравнения переноса сплошной среды. Решение этой задачи определено слабым решением, удовлетворяющим тождеству, содержащим граничное и начальное условия (условия Неймана). Полученные результаты без существенных изменений применимы для анализа начально-краевых задач с общими граничными условиями. Строятся разностные схемы, для которых устанавливаются априорные оценки, достаточные условия сходимости и устойчивости, указан путь построения приближений к искомому точному решению исходной задачи. Отметим, что классические результаты по устойчивости решений разностных систем во многом аналогичны представленным в настоящем исследовании, отличием является неклассическая область изменения пространственной переменной — геометрический граф Γ.

## Литература

1. *Провоторов В. В., Сергеев С. М.* Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах // Вестник российских университетов. Математика. – 2024. – Т. 29, Вып. 146. – С. 188–203.

2. *Перова И. В.* Разностные схемы для уравнения переноса сплошной среды и волнового уравнения с носителями на сети / И. В. Перова, А. А. Парт, З. Тран [и др.] // Системы управления и информационные технологии. – 2025. – № 1(99). – С. 16–21.

3. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. – М. : Наука, 1977. – 456 с.

УДК 004.72:519.1

# МОДЕЛЬ И МЕТОДИКА ВЫБОРА МАРШРУТА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В ВОЗДУШНЫХ СЕТЯХ СВЯЗИ ПИЛОТИРУЕМЫХ И БЕСПИЛОТНЫХ АВИАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ ТЕХНИЧЕСКИХ РИСКОВ

**А. В. Ананьев[1,2], В. А. Печкарев[1], Д. В. Евстафьев[3]**

*[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж*
*[2]Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, г. Воронеж*
*[3]АО «Кронштадт»*

**Аннотация.** В статье представлена модель и методика выбора маршрута передачи данных в воздушных сетях связи пилотируемых и беспилотных авиационных комплексов, разработанные на основе теории рисков и теории графов. Ключевым элементом модели и методики является показатель технического риска, формируемый для каждого ребра сетевого графа на канальном уровне как произведение вероятности ошибочной передачи бита (задержки) и детерминированного коэффициента прогноза ущерба передающего узла. Поэтому главной особенностью разработанной модели является использование полной группы параметров узлов, доступных в сетях связи с одновременной агрегацией внешних по отношению к сети угроз. Такой подход позволяет найти адекватное комплексное применение вероятностных и детерминированных параметров, характеризующих эффективность выбора маршрута в условиях воздействия дестабилизирующих факторов.
**Ключевые слова:** технический риск, базы знаний, имитационная модель, воздушные сети связи, выбор маршрута передачи данных, граф сети связи, коэффициент прогноза ущерба.

## Введение

В настоящее время беспилотная авиация находится на рубеже практического перехода от одиночного применения комплексов с беспилотными летательными аппаратами (КБпЛА) к групповому совместно с пилотируемыми авиационными комплексами (АК). Специфика современных задач, таких как мониторинг и специальные действия на больших территориях и требует создания надежных и гибких коммуникационных систем, объединяющих летательные аппараты. Для этого возможно применение воздушных сетей связи (ВСС).

Одной из актуальных задач в ВСС является выбор маршрута передачи данных с учетом внутреннего состояния узлов и воздействия внешних дестабилизирующих факторов (ДФ). Для прогноза ДФ могут быть использованы базы знаний (БЗ), составленные на основе сценариев совместного применения и информационного обмена АК и КБпЛА [1]. БЗ могут включать состав сил и средств ВСС, окончательный набор узлов и каналы связи, производится анализ источников дестабилизирующих факторов (ИДФ), создающих риски, сопутствующие передаче информации.

В классическом представлении риск характеризуется как сочетание вероятности и последствий наступления неблагоприятных событий [2]. Многообразие областей применения риска (экономических, технических и др.) привело к большой вариативности видов риска: эффективный, теоретический, коллективный, потенциальной территориальный, приемлемый, профессиональный, финансовый, объективный, субъективный, технический. В сетевых структурах теоретический риск представлен вероятностью нежелательного события и основан на «идеализированных» алгоритмах маршрутизации и статических моделях сети, что приводит к применению устаревших данных о метриках выбора маршрута, и дает лишь приблизительную оценку.

Анализ работ [3–8] показал, что метрика рисков в беспроводных сетях связи, в том числе воздушных, на сегодняшний день используется для оценки нарушения информационной безопасности сети [3–5], при выборе маршрута передачи информации в многопутевой маршрутизации [6], для учета физических и информационных разрушающих воздействий на беспроводную сеть связи [7], в качестве повышения устойчивости сети связи [8].

На основе вышеизложенного, в известных работах, не в полной мере раскрыта метрика технических рисков (далее — рисков), представленная в виде ребра графа ВСС в части вероятностной и детерминированной компонент канальном уровне модели взаимосвязи открытых систем (ВОС), не раскрыт критерий выбора маршрута передачи данных на сетевом уровне ВОС с использованием данной метрики. Восполнение вышеуказанных пробелов и является **целью статьи**.

## 1. Модель и методика выбора маршрута передачи данных в воздушных сетях связи пилотируемых и беспилотных авиационных комплексов на основе оценки технических рисков

Пусть имеется БЗ по результатам анализа сценариев совместного применения и информационного обмена ВСС, в виде множества $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ [1], на основании которого может быть сформирован набор узлов $U$ и каналов связи $E$ для каждого сценария. При функционировании ВСС АК и КБпЛА со стороны внешних систем осуществляется воздействие ИДФ на узлы $U$ и ребра $E$, результаты анализа которых позволяют сформировать множества типов ИДФ $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_q\}$ и их источников (средств) $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_L\}$. На основе вышеизложенных исходных данных можно осуществить выбор частного сценария совместного применения и информационного обмена в ВСС, для которого сформировать граф $G = (U, E)$, имеющий множество вершин (узлов ВСС) $U = \{u_1 \ldots u_9\}$, множество ребер $E = \{e_1 \ldots e_{15}\}$. Раскроем $E = \{e_1 = \{u_1, u_2\},\ e_2 = \{u_1, u_3\},\ e_3 = \{u_3, u_2\},\ e_4 = \{u_3, u_4\},\ e_5 = \{u_4, u_5\},\ e_6 = \{u_4, u_6\},\ e_7 = \{u_3, u_6\},\ e_8 = \{u_2, u_7\},\ e_9 = \{u_6, u_7\},\ e_{10} = \{u_6, u_8\},\ e_{11} = \{u_5, u_8\},\ e_{12} = \{u_7, u_8\},\ e_{13} = \{u_7, u_9\},\ e_{14} = \{u_8, u_9\},\ e_{15} = \{u_6, u_5\}\}$.

Примем, что ребра графа ВСС характеризуются вероятностями битовой ошибки $P_e$ [16], а узлы — детерминированными коэффициентами риска, характеризующие прогноза ущерба для узлов ВСС при передаче информации $C_u$. Представим граф на рис 1.

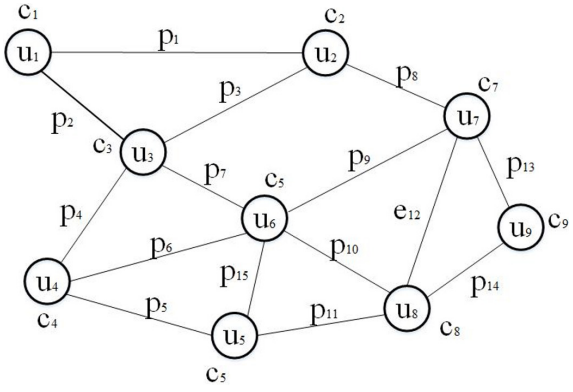



*Рис. 1. Граф ВСС с вероятностями передачи битов и коэффициентом прогноза ущерба*

Вероятность $P_e$ характеризует вероятность ошибочной передачи битов по ребрам $e$, другими словами, от $i$-го узла к $j$-му. Тогда, для графа на рис. 1. $P_e$ можно представить как $P_{ij}$.

Вероятностная компонента рисков $P_e$ измеряется во временном интервале с требуемым значением $T_ц$, определяющий время ее циклостационарного измерения. Поэтому $P_e$ может быть представлена как $P_e(t)$. Если измерение $T_ц > T_{цтреб}$, то для оценки $P_e(t)$ используется ма-

тематический аппарат кластеризации, распределяющий узлы ВСС на кластеры $k = 1, 2, \ldots, K$ с их типами $T$ (стабильные и нестабильные), позволяющий регулировать частоту измерения $P_e(t)$ $(\upsilon)$, и возможные управляющие предписания для ВСС $M_k \in M$, в противном случае, осуществляется переход к процессу оценки риска и выбора оптимального маршрута передачи данных.

Для расчета $C_u$, необходимо обладать следующими данными:

– энергетическими (мощностными) показателями по узлам ВСС $W_u$ и ИДФ $W_V$;

– о пространственных местоположениях узлов ВСС $M_u(t) = (h_u(t), x_u(t), y_u(t))\big|_{Tобн_u \le Tобн_{треб}}$, где $T_{обн}$ — время актуальности информации о местоположении узлов ВСС, $h_u(t), x_u(t), y_u(t)$ — абсолютная высота, координаты Гаусса — Крюгера узлов;

– о пространственных местоположениях ИДФ $M_V(t) = (h_V(t), x_V(t), y_V(t))\big|_{Tобн_V \le Tобн_{треб}}$, где $T_{обнV}$ — время актуальности информации о местоположении ИДФ, $h_u(t)$, $x_u(t)$, $y_u(t)$ — абсолютная высота, координаты Гаусса — Крюгера ИДФ;

При актуальных разведывательных данных, то есть $T_{обнV} \le T_{обнтреб}$ и $T_{обнu} \le T_{обнтреб}$ оценка $C_u$ осуществляется по моделям радиодоступности [9], в противном случае — на основе процедуры распределения значений $C_u \in (0,1)$ по узлам ВСС по дальностям от линии боевого соприкосновения, определяя наиболее опасные для ВСС ИДФ [10]. Выражение, определяющее зависимость от вышеуказанных параметров, можно записать в виде:

$$C_i(t) = \begin{cases} f(M_V(t), M_u(t), W_V, W_u), & \textit{если} \quad T_{обнV} \le T_{обнтреб} \wedge T_{обнU} \le T_{обнтреб} \\ f(L_{узлов}, L_{ЛБС}), & \textit{иначе} \end{cases}. \tag{1}$$

Риск, представленный как произведение $P_e$ и $C_u$ в виде метрики ребер графа, необходимый для выбора оптимального маршрута передачи данных по ребрам $e = (i, j)$ (информационным направлениям) представлен выражением на канальном уровне модели ВОС:

$$R_e = P_{ij} \cdot C_{u_i}, \tag{2}$$

где $P_{ij}$ — вероятность ошибочной передачи бита от $i$-го узла к $j$-му, $C_{u_i}$ — детерминированная компонента риска передающего узла $u_i$. Например, если $P_{12}$, то $C_u$ принимаем равным $C_1$.

Раскроем выражение (2) в виде матрицы:

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} p_{11} \cdot C_1 & p_{12} \cdot C_1 & \cdots & p_{1i} \cdot C_1 \\ p_{21} \cdot C_2 & p_{22} \cdot C_2 & \cdots & p_{2i} \cdot C_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{j1} \cdot C_j & p_{j2} \cdot C_2 & \cdots & p_{ij} \cdot C_j \end{vmatrix}. \tag{3}$$

С учетом того, что вероятностная и детерминированная компоненты изменяются во времени, то перепишем выражение (2):

$$R_{ij}(t) = P_{ij}(t) \cdot C_i(t). \tag{4}$$

Предложенная модель в выражении (3) отличается от известных введением детерминированной компоненты риска (коэффициента прогноза ущерба узлов ВСС при выборе маршрута передачи информации), позволяющей исключить исходную неопределенность данных, которая может возникнуть при стохастической оценке технического риска, а также оценить масштаб возможного негативного события. Детерминированность является следствием использования вполне определенных расчетов радиодоступности [11].

В условиях воздействия ИДФ значительно снижается средняя скорость передачи данных, а значит, и пропускная способность. В этом случае в критерии выбора маршрута зададимся условием, что все возможные пути е имеют $ПС_{min} \ge ПС_{min}$*.

Для выражения (2) критерий выбора маршрута ВСС на сетевом уровне модели ВОС определяется как:

$$R^* = \arg\min_{e_0 \to J} \sum_{(i,j)\in e} \left( P_{ij} \cdot C_i \right) \Big|_{\forall IIC_{\min} \geq IIC^*_{\min}}, \quad (5)$$

где $R^*$ — оптимальный маршрут (последовательность ребер), $\arg\min_{e_0 \to J}$ — поиск маршрута от начального узла $e_0$ к целевому узлу $J$, на котором достигается минимум риска, $\sum_{(i,j)\in e}$ — сумма по всем ребрам $e$, принадлежащим пути, $P_{ij} \cdot C_i$ — риск ребра $(i, j)$ в момент времени $t$.

Выражение (5) является критерием выбора оптимального маршрута передачи данных в воздушной сети связи, минимизирующий совокупный риск, рассчитанный как сумма произведений вероятности ошибочной передачи битов на коэффициент прогноза ущерба передающего узла для всех ребер пути. Предложенный критерий (5) отличается от известных выбором оптимального маршрута передачи данных по минимальной сумме риска, рассчитанного между ребрами ВСС, представленного в виде графа.

Дополнительно граф ВСС может характеризоваться функциональными показателями ВСС (матрица тяготения, потенциальных (условных) мощностей, ресурс, соответствующий передающих и приемных средств $j$-го узла) позволяющими сформировать таблицу маршрутизации для выбора маршрута на сетевом уровне модели ВОС. Осуществляя свертку данных показателей, можно получить агрегированный коэффициент и представить его в выражении:

$$R_{ij} = C_i \cdot \Lambda_{ij}, \quad (6)$$

где $\Lambda_{ij}$ — агрегированный параметр, характеризующий функциональные показатели ВСС.

С практической точки зрения, когда необходимо обеспечить принятие решения как экспертное, так и объективное выражение (1) преобразуется с учетом времени задержки передачи битов $Z$:

$$R_{ij} = C_i \cdot Z_{ij}, \quad (7)$$

где $Z_{ij}$ — значение задержки передачи битов по ребрам графа ВСС.

Методика выбора маршрута передачи данных в воздушных сетях связи пилотируемых и беспилотных авиационных комплексов на основе оценки технических рисков в виде шагов, процедур, операций и действий представлена на рис. 2.

Выбор оптимального маршрута на сетевом уровне модели ВОС осуществляется на основе критерия (5) за счет минимизации совокупного технического риска передачи данных, что косвенно сокращает время доставки за счет уменьшения повторных передач и исключения загруженных узлов (выражение (5)).

Введение детерминированной компоненты рисков $C_u$ обеспечивает безопасность передачи данных (4), что позволяет выбирать путь с менее радиодоступными узлами для ИДФ.

Проведем имитационное моделирование обеспечения выбора маршрута передачи данных в ВСС на базе 5G для верификации предложенной модели и методики. Имитационная модель реализована в виде специального программного обеспечения на языке Python с использованием библиотек NetworkX для работы с сетевыми графами, Matplotlib для визуализации и Tkinter для создания графического интерфейса. Критерием обеспечения выбора оптимального маршрута передачи данных является оценка своевременности передачи данных [12], которую будем проводить по оценке коэффициента своевременности, которое рассчитывается как отношение числа переданных успешно битов к общему числу битов. Исходные данные возьмем из открытой базы данных Kaggle.

Результаты моделирования при применении предложенной методики для выбора путей передачи данных представлены на рис. 3–5. Для каждого узла сети вычисляются все пути от истока $u_1$ к стоку $u_9$, при этом для каждого пути рассчитывается суммарный коэффициент своевременности как отношение количества переданных успешно битов к общему числу переданных битов от $i$-го узла на одном канале и дальнейшим сложением этих коэффициентом для всех ребер выбранного маршрута.

Сравнительная оценка своевременности связи предложенной модели и методики представлено на рис. 3, который получен путем расчета коэффициента своевременности $K_c$.

На рис. 4 представлено сравнительная визуализация оптимальных маршрутов передачи данных в воздушной сети связи, рассчитанный по $P_{ij}$ и по $R_{ij}$ с использованием алгоритма Дейкстры.

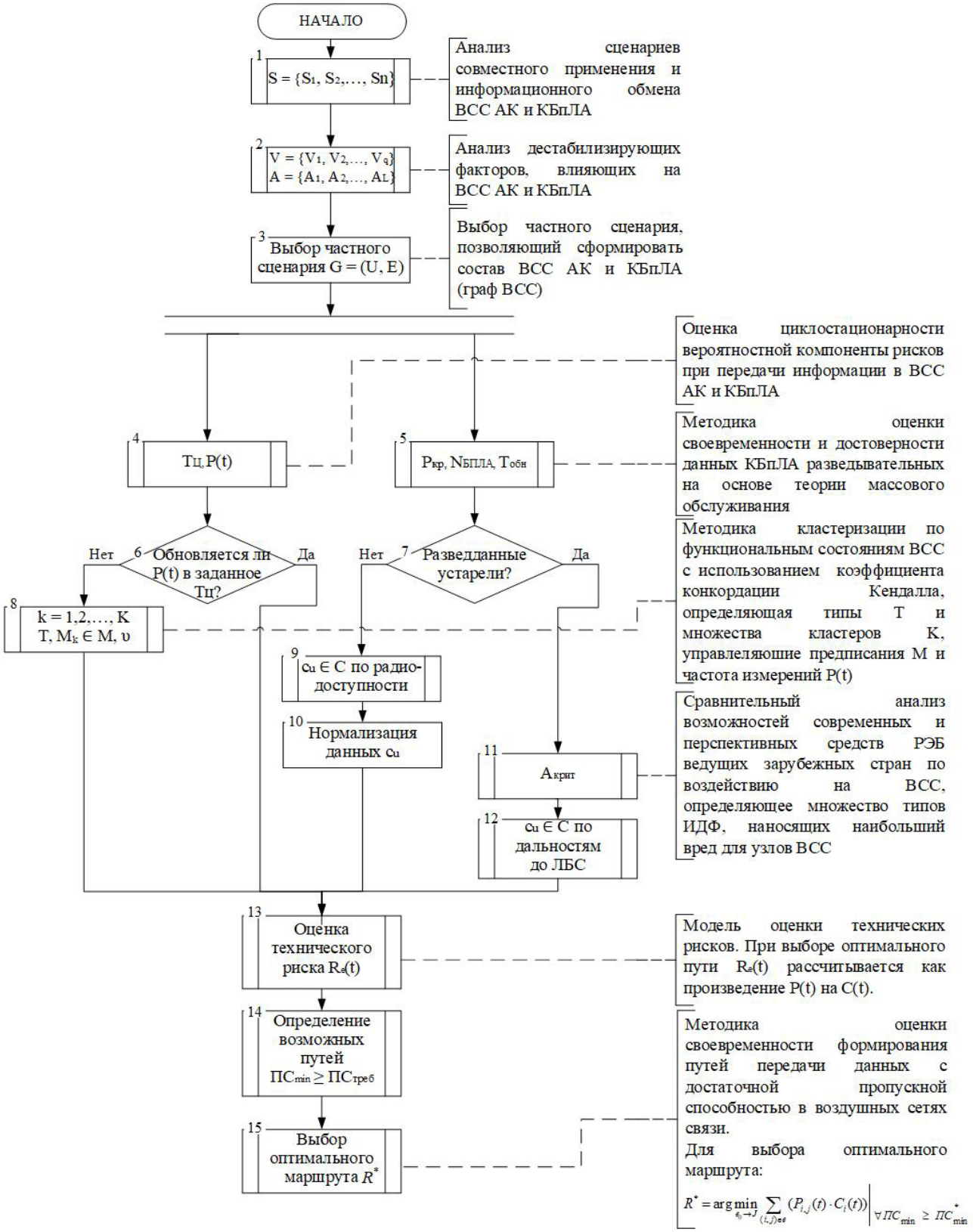



*Рис. 2. Методика оценки технических рисков при выборе маршрута передачи данных в ВСС*

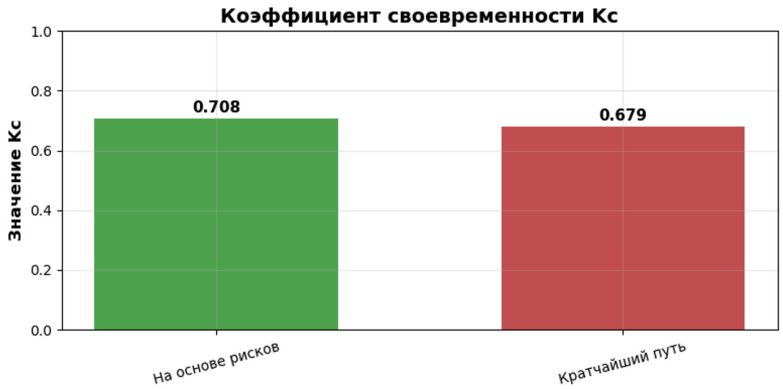



*Рис. 3. Оценка коэффициента своевременности для оптимальных путей*

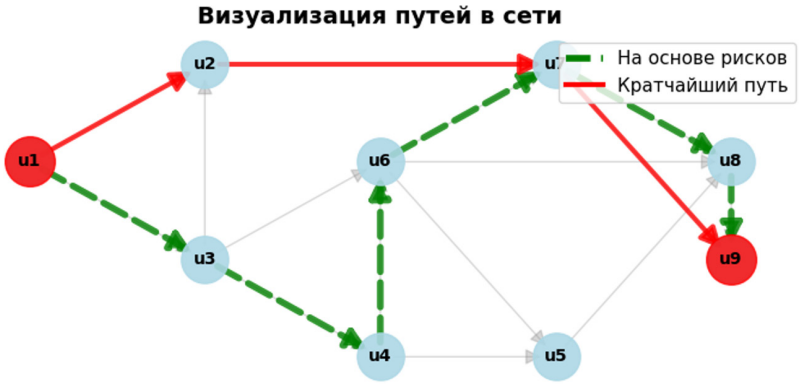



*Рис. 4. Визуализация выбора маршрута передачи данных от истока к стоку на основе оценки технических рисков по предложенным модели и методики*

Исходя из рис. 4 следующим критерием выбора маршрута передачи данных является его безопасность, которую обеспечим за счет реализации механизма защиты от узлов, подвергшихся воздействию ИДФ, а также автоматического перестроения маршрута при возникновении угрозы блокировки (выхода из строя) узлов. На рис. 4 наглядно показано как предложенный математический аппарат исключает его из возможных маршрутов и находит альтернативный путь $u_1 \to u_2 \to u_7 \to u_8 \to u_9$ по критерию минимума технического риска (5) из всех доступных альтернатив. При этом, обеспечивается соблюдение требований к своевременности доставки данных — задержка нового маршрута составляет 0,330 с., что удовлетворяет установленному пределу в 0,400 с. [13].

Для данных маршрутов обеспечение безопасности передачи данных подтверждается расчетом совокупного риска на оптимальном маршруте, представленным на рис. 5.

*Рис. 5. Обеспечение выбора маршрута передачи данных от истока к стоку на основе предложенной модели и методики по результатам расчета совокупного технического риска*

## Заключение

Предложена модель и методика выбора маршрута передачи данных в воздушных сетях связи пилотируемых и беспилотных авиационных комплексов на основе оценки технических рисков, разработанная на основе теории рисков и теории графов. Ключевой особенностью модели является использование показателя технического риска в качестве метрики для выбора оптимального маршрута передачи данных в ВСС. Данный показатель объединяет вероятностную компоненту (вероятность ошибочной передачи бита по каналу связи) и детерминированную компоненту (коэффициент прогноза ущерба для узлов ВСС при выборе маршрута передачи данных, связанный с радиодоступностью узла связи).

Разработанная модель отличается от известных аналогов следующим. В отличие от известных, предлагаемая модель позволяет выбирать маршрут, минимизируя совокупный технический риск. Введение детерминированной компоненты позволяет устранить исходную неопределенность, присущую вероятностным оценкам, и дать количественную оценку масштаба потенциального ущерба. Дополнительным отличием является интеграция в критерий выбора маршрута таких факторов, как воздействие источников помех и учет ресурсной базы узлов, что обеспечивает выбор оптимального маршрута на сетевом уровне модели взаимосвязи открытых систем.

Предложенная методика позволяет обеспечить выбора маршрута передачи данных в ВСС АК и КБпЛА на сетевом уровне модели взаимосвязи открытых систем на основе критериев (5) за счет минимизации совокупного риска передачи данных через выбор маршрута, что косвенно сокращает время доставки за счет уменьшения повторных передач и исключения загруженных узлов. Кроме того, методика, за счет учета детерминированной компоненты риска, позволяет направить трафик через узлы менее доступные для источников дестабилизирующих факторов, что обеспечивает безопасность выбора маршрута.

## Литература


1. *Ананьев А. В., Давиденко Ю. В., Скрипник И. В., Милов В. Р., Печкарев В. А.* Анализ сценариев совместного применения пилотируемой и беспилотной авиации // Воздушно-космические силы. Теория и практика. – 2025. – № 33. – [Электронный ресурс] URL: https://vva.mil.ru/Izdaniay/VKS-teoriya-i-praktika (дата обращения 15.10.2025 г.).

2. Риск. [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B8%D1%81%D0%BA (дата обращения 10.11.2025 г.).

3. Оценка и регулирование рисков нарушения целостности и доступности информации в беспроводной телекоммуникационной сети связи с учетом координат, расстояния между её абонентами и их влияния друг на друга. [Электронный ресурс]. URL: https://cchgeu.ru/science/nauchnye-izdaniya/nauchnyy-zhurnal-informatsiya-i-bezopasnost/stati-zhurnala-2023.php (дата обращения 10.11.2025 г.).

4. Анализ угроз безопасности беспроводной сети и разработка оптимальных методов их предупреждения [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-ugroz-bezopasnosti-besprovodnoy-seti-i-razrabotka-optimalnyh-metodov-ih-preduprezhdeniya (дата обращения 10.11.2025 г.).

5. *Ермаков С. А.* Аппарат нечетких множеств и нечеткой логики как средство риск-анализа беспроводных систем связи // Информационная безопасность. – 2010. – № 4. – С. 607–610.

6. *Ананьев А. В., Багдасарян А. С., Кащенко Г. А., Кащенко А. Г.* Минимизация рисков несанкционированного доступа к информации в наземных и аэромобильных радиосетях критически важных объектов методами многокритериальной многопутевой маршрутизации // Труды НИИР. – 2017. – № 2. – С. 2–6.

7. *Ананьев А. В., Змий Б. Ф., Кащенко Г. А.* Оценка риска влияния физических и информационных разрушающих воздействий на аэромобильную сеть связи // 17 Материалы I Всероссийской научно-практической конференции «Авионика. Актуальные вопросы состояния, эксплуатации, и развития комплексов бортового РЭО воздушных судов, проблемы подготовки специалистов» (Воронеж, 17–18 марта 2016): сборник трудов. – Воронеж : Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина. – 2016. – С. 22–26.

8. *Ananev A. V., Ivannikov K. S.* Risk-model for communication networks operation stability assessment // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1902. – Art. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012028.

9. *Ананьев А. В.* Алгоритм оценки коэффициентов признаков потерь при рисках передачи информации в воздушных сетях связи / А. В. Ананьев, В. А. Печкарев // Труды МАИ. – 2025. – № 141.

10. *Ананьев А. В., Харченко Т. В., Печкарев В. А.* Сравнительный анализ возможностей современных и перспективных средств радиоэлектронной борьбы ведущих зарубежных стран по воздействию на воздушные сети связи // Воздушно-космические силы. Теория и практика. – № 34. – 2025 [Электронный ресурс] URL: https://vva.mil.ru/Izdaniay/VKS-teoriya-i-praktika (дата обращения 15.10.2025 г.).

11. *Ананьев А. В.* Модель и методика выбора оптимального маршрута в сетевых структурах на основе теории рисков / А. В. Ананьев, К. С. Иванников, В. А. Печкарев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 2–4 декабря 2024 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2025. – С. 385–391.

12. *Боговик А. В.* Эффективность систем военной связи и методы ее оценки / А. В. Боговик, В. В. Игнатов. Санкт-Петербург : ВАС, 2006. – 104 с.

13. Рекомендация МСЭ-Т Y.1541 (12/2020) Требования к качеству обслуживания в сети Интернет и показатели качества обслуживания для услуг IP. = ITU-T Y.1541 (12/2020) Network performance objectives for IP-based services. 2020. [Электронный ресурс] URL: https://www.itu.int/rec/T-REC-Y.1541-202012-I/en (дата обращения: 05.10.2025).

УДК 539.3

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ АРОК

**В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов**

*Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН*

**Аннотация.** Рассматривается задача устойчивости системы двух круговых арок, связанных между собой нерастяжимыми нитями. Нити не выдерживают сжимающих усилий. Данная задача относится к области контактных задач с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции. Проблема сводится к отысканию точек бифуркации некоторой задачи нелинейного программирования.
**Ключевые слова:** устойчивость, круговая арка, вариационная задача, бифуркация, односторонние ограничения, критическая сила.

## Введение

Расчет на устойчивость и прочность сложных тонкостенных конструкций связан с исследованием вариационных неравенств или решением вариационных задач с ограничениями на искомые функции в форме неравенств [1]. В данной работе для конечномерной аппроксимации использовались интерполяционные кубические сплайны.

Проблема устойчивости круговых арок ранее рассматривалась Е. Л. Николаи [2]. Экспериментальные и численные исследования влияния односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек, сжимаемых продольной силой рассмотрены в работе Н. А. Алфутова [3]. Наличие односторонних ограничений на перемещение приводит к задаче идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах, которая рассматривалась в работах [4, 5]. При конечномерной аппроксимации наличие односторонних ограничений на перемещения приводит к некоторой задаче нелинейного программирования. При исследовании на устойчивость в данном случае приходим к задаче нахождения параметров нагрузки, при которых происходит бифуркация решений задачи нелинейного программирования. Некоторые задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения и методы их решения рассматривались в работах авторов [6–9].

## 1. Постановка задачи

Пусть две круговые арки связаны между собой нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий, нагружены внешними силами, равномерно распределенными вдоль линии арок. Уравнения недеформированной оси арок имеют вид

$$x_i = R_i \cos\varphi, \quad y_i = R_i \sin\varphi, \quad \varphi \in (-\tau, \tau), \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

$R_i$ — радиусы арок. Обозначим $\xi = (-\cos\varphi, -\sin\varphi)$, $\eta = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ — единичные векторы касательной и нормали к кривой (1), $u_i, w_i$ — перемещение вдоль векторов $\eta$ и $\xi$. Тогда изменение кривизны арок в результате деформации определяется формулами

$$\delta q_i = \frac{1}{R_i^2}(u_i'' + u_i).$$

Кроме того предполагается, что выполнено условие несжимаемости оси арок $u_i = w_i'$, $i = 1, 2$. Тогда упругая энергия может быть вычислена по формуле

$$U = U_1 + U_2 = \frac{B_1}{2R_1^3}\int_{-\tau}^{\tau}(u_1'' + w_1)^2\,d\varphi + \frac{B_2}{2R_2^3}\int_{-\tau}^{\tau}(u_2'' + w_2)^2\,d\varphi. \tag{2}$$

Работа внешних сил зависит от поведения нагрузки после деформации и определяется формулой

$$V = V_1 + V_2 = \frac{P_1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}(u_1'^2 - k_1 u_1^2)d\varphi + \frac{P_2}{2}\int_{-\tau}^{\tau}(u_2'^2 - k_2 u_2^2)d\varphi, \tag{3}$$

где $k_i = 1$, если нагрузка $P_i$ направлена все время по нормали к деформированной оси (нормальные силы) и $k_i = 2$, если $P_i$ направлена к центру кривизны недеформированной арки (центральные силы).

Предположим, что арки связаны нерастяжимыми нитями, один конец нити прикреплен к первой арке, второй — ко второй при углах $\tau = \tau_j$, $j \in 1:M$, так, что расстояние между точками прикрепления нити не может увеличиваться

$$u_2(\tau_j) - u_1(\tau_j) \le 0, \quad j \in 1:M. \tag{4}$$

В положении равновесия полная энергия системы арок достигает минимального значения, таким образом, приходим к задаче на экстремум

$$U - V \to \min \tag{5}$$

При выполнении ограничений (4), а также на концах арок должны быть выполнены граничные условия. Обычно ставят граничные условия жесткой заделки:

$$u = 0,\ w = 0,\ u' = 0 \text{ при } \varphi = -\tau, \tau. \tag{6}$$

или граничные условия шарнирного опирания

$$u = 0,\ w = 0,\ u' + w' = 0 \text{ при } \varphi = -\tau, \tau. \tag{7}$$

При наличии ограничений неравенств (4) задачу (5) – (4) можно исследовать только численными методами.

## 2. Численный метод

Будем аппроксимировать искомые функции интерполяционными кубическими сплайнами. Всего имеем четыре функции $u_1(\varphi)$, $w_1(\varphi)$, $u_2(\varphi)$, $w_2(\varphi)$. Пусть функция $w_1(\varphi)$ аппроксимируется сплайном

$$S(z;\varphi) = z_i(1-t)^2(1+2t) + z_{i+1}t^2(3-2t) + m_i ht(1-t)^2 + m_{i+1}ht^2(1-t),$$

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $h = 24/n$, $t = (\varphi - \varphi_i)/h$, $i \in 1:n$.

Сплайн $S(z;\varphi)$ имеет непрерывную вторую производную. Это достигается за счет выбора коэффициентов $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Считаем, что $z_0 = z_{n+1} = 0$. При граничных условиях жесткой заделки $m_0 = m_{n+1} = 0$. Если выполнены граничные условия шарнирного опирания, то $m_0 = \frac{3}{h}z_1 - \frac{1}{2}m_1$, $m_{n+1} = \frac{3}{h}z_n - \frac{1}{2}m_n$. Тогда вектор $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^t$ выражается формулой $m = C^{-1}Mz$, где матрицы $C$ и $M$ имеют вид

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad M = \frac{3}{2h}\begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -d & c \end{pmatrix},$$

где $a = 4$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -1$, если сплайн удовлетворяет граничным условиям жесткой заделки и $a = 3.5$, $b = 1$, $c = -0.5$, $d = 1$, если выполнены граничные условия шарнирного опирания.

Таким образом, находим вектор $z \in R^{4n}$, $z_i = u_1(\varphi_i)$, $z_{i+1} = w_1(\varphi_i)$, $z_{i+2n} = u_2(\varphi_i)$, $z_{i+3n} = w_2(\varphi_i)$. Подставляя $S(z;\varphi)$ в функционалы (2) и (3) получим две квадратичные формы

$$g(z) = U(S;\varphi) = \frac{1}{2}(Gz, z), \tag{8}$$

$$q(z) = V(S;\varphi) = \frac{1}{2}(Qz, z). \tag{9}$$

Зафиксируем некоторые значения внешней нагрузки $P_1$ и $P_2$. В положении равновесия полная энергия системы принимает минимальное значение, при этом должны быть выполнены ограничения (4). Обозначим через $M$ множество $i$, таких что выполняются неравенства (4):

$$z_{i+2n} - z_i \le 0, \quad i \in M. \tag{10}$$

Таким образом, для решения задачи устойчивости системы арок требуется найти значения сил $P_1$ и $P_2$ таких, что экстремальная задача

$$J = g(z) - q(z) \to \min_{z \in \Gamma} \tag{11}$$

имеет нетривиальное решение, где функции $g(z)$, $q(z)$ определяются формулами (8) и (9). Здесь $\Gamma$ — конус, определяемый неравенствами (10).

Поскольку задача (10) – (11) положительно однородна $J(z) = c^2 J(z)$ и если $z \in \Gamma$, то и для $C \ge 0$, $cz \in \Gamma$, то можно считать, что $qz = 1$. Таким образом, приходим к задаче изопериметрического типа:

$$J(z) \to \min_{z \in \Gamma} \tag{12}$$

при ограничениях

$$q(z) = 1. \tag{13}$$

Пусть $z_*$ — решение задачи (12), (13) и $\lambda_* = J(z_*)$. Тогда $P_1^* = \lambda_* P_1$, $P_2^* = \lambda_* P_2$ — значения критических нагрузок. Задача (12), (13) решалась методом последовательных приближений, предложенным [6, 7].

Пусть $z^0 \in \Gamma$, $q(z^0) = 1$ некоторое начальное приближение. Пусть уже получена точка $z^k \in \Gamma$, $q(z^k) = 1$.

Введем множество $\Omega_k = \{z \in \Gamma \mid Qz^k, z - z^k) = 0\}$.

Найдем точку $\tilde{z}^k$ такую, что $f(\tilde{z}^k) = \min_{z \in \Omega_k} f(z)$. Далее полагаем

$$z^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{q(\tilde{z}^k)}} \tilde{z}^k.$$

Можно показать, что любая предельная точка последовательности $z^k$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет необходимым условиям экстремума в задаче (12), (13).

### 3. Результаты вычислений

Без ограничения общности можно положить $B_1 = 1$, $B_2 = 1$, $R_1 = 1$. Далее полагаем $P_2 = 0$, и выполнены граничные условия жесткой заделки; $n = 40$, в (10) множество $M = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$. При $\tau = \frac{\pi}{2}$ безразмерное значение параметра критической нагрузки без ограничений на перемещения при $k_1 = 2$ (центральная нагрузка) $\lambda_0 = 8.0$. Пусть $R_2 = c_0 R_1$. Тогда при наличии ограничений (10) значение параметра критической нагрузки $\lambda$ приведено в таблице.

Таблица

*Значения критического параметра в зависимости от радиуса* $R_2$

| $c_0$ | $k_1$ | $\lambda$ |
|---|---|---|
| 0.8 | 2 | 31.02 |
| 0.8 | 1 | 23.47 |
| 0.5 | 2 | 89.83 |
| 0.5 | 1 | 69.37 |
| 0.25 | 2 | 109.07 |
| 0.25 | 1 | 107.3 |
| 0.1 | 2 | 109.3 |
| 0.1 | 1 | 107.45 |

## Заключение

Наличие односторонних ограничений на перемещения арок значительно увеличивает критическую нагрузку. При этом вычисления показывают, что при $R_2 \to 0$ критическое давление довольно быстро сходится к некоторому значению, которое зависит от угла $\tau$.

## Литература


1. *Дюво Г., Лиос Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва : Наука, 1980. – 382 с.
2. *Николаи Е. Л.* Труды по механике. – М. : Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 584 с.
3. *Алфутов Н. А., Еремичев А. Н.* Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Расчеты на прочность. – М. : Машиностроение, 1989. – С. 179–188.
4. *Крепс В. Л.* О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте / В. Л. Крепс // ЖВММФ. – 1984. – Т. 24, № 4. – С. 497–503.
5. *Рапопорт Л. Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе / Л. Б. Рапопорт. // ПММ. – 1986. – Т. 50, Вып. 4. – С. 674–679.
6. Тарасов В. Н. Об устойчивости подкрепленных арок / В. Н. Тарасов. // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 202–214.
7. *Андрюкова В. Ю.* Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. / В. Ю. Андрюкова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 412–422.
8. *Андрюкова В. Ю., Тарасов В. Н.* Nonsmooth problem of Stability for Elastic Rings // Тезисы международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. 2017. – Ч.1. – СПб. : Издательство ВВМ. – С. 213–218.
9. *Тарасов В. Н.* Nonsmooth problems of mechanics of Elastic systems // Тезисы международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова. 2017. – Ч. 1. – СПб. : Издательство ВВМ. – С. 252–256.

УДК 621.396

# УСТРОЙСТВО ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ НА ИСТОЧНИК РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ШИРОКОЙ ПОЛОСЕ ЧАСТОТ

**И. А. Баранников, Е. Д. Егорова, Е. А. Ищенко,**
**Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, А. П. Тихонов**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается устройство для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот, основой устройства является программно-определяемое радио Pluto+ SDR. В качестве антенно-фидерного тракта в устройстве используются две широкополосные логопериодические печатные антенны и два коаксиальных кабеля одинаковой длины, установленные на подвижной опоре. Рассматривается измерение дальности функционирования разработанного устройства. Преимущество устройства заключается в простоте его реализации и высокой повторяемости используемых компонентов, что является важным аспектом в реализации пеленгационных комплексов.

**Ключевые слова:** широкополосное излучение, пеленгация, пеленгатор, программно-определяемое радио, Pluto+ SDR.

## Введение

В настоящее время довольно актуальной задачей является создание различных устройств пеленгации источника радиоизлучения. Такие устройства позволяют определять направление на источник радиоизлучения в определённой полосе частот. Пеленгацию возможно осуществлять в одной или же нескольких плоскостях. Также возможна пеленгация источника радиоизлучения исключительно в заданном секторе. Важнейшие параметры пеленгаторов: точность определения направления, полоса рабочих частот и сектор эффективного определения пеленга [1].

В контексте реализации возможности определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот основным вопросом является правильный выбор антенно-фидерного комплекса. В работе [2] приводится эффективный метод применения для пеленгатора логопериодических антенн, обладающими хорошим коэффициентом направленного действия и широкой полосой рабочих частот. Применение таких антенн позволит реализовать в пеленгаторе непосредственно возможность определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот.

В основе большинства небольших и недорогих пеленгаторов стоит система, реализованная на программно-определяемом радио (Software Defined Radio — SDR). В работе [3] приводится пример реализации секторального пеленгатора с двумя антеннами с использованием SDR.

Потенциально оптимальными для использования в недорогом и не сложном в реализации широкополосном пеленгаторе с секторальным обзором являются логопериодические печатные антенны, которые обладают высокой степенью повторяемости при изготовлении, а также отличающиеся легкостью и скоростью их изготовления.

Целью работы являлась разработка недорогого и простого в реализации устройства для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот.

В работе будет рассмотрена реализация бюджетного и простого в производстве пеленгатора, в основе которого стоит программно-определяемое радио. В устройстве используются две логопериодические печатные антенны для приёма сигналов на два канала. Также рассматривается исследование по получению данных о дальности функционирования пеленгатора.

## 1. Использование программно-определяемого радио в пеленгаторе

В устройстве для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот основой является программно-определяемое радио Pluto+ SDR. Приёмник функционирует на двух каналах приёма. Каждому каналу принадлежит одна печатная логопериодическая антенна. Принятый антеннами сигнал в SDR является комплексным. Это даёт возможность получить главные параметры принятого сигнала, необходимые для дальнейшего вычисления пеленга: номер канала, амплитуда принятого сигнала (модуль), фаза принятого сигнала (аргумент).

Далее после осуществления приёма выполняется сопоставление двух сигналов смежным сложением и поиском разности. Добавляется переменная шага сканирования, прибавляемая в комплексном виде к параметрам принятого сигнала для канала номер 2. Также происходит введение поправочного калибровочного коэффициента, который необходим для нивелирования неоднородности двух каналов.

После выполнения вышеуказанных действий получается изменённый сигнал с канала номер 2 с фазой, которая изменяется динамически. Далее выполняется вычисление двух выражений, определяющих сумму и разность изначально принятого сигнала с канала номер 1 и изменённого сигнала с канала номер 2.

Направление на источник радиоизлучения будет определяться как равенство, в котором сумма двух сигналов будет стремиться к максимальному значению, а разность двух сигналов будет стремиться к минимальному значению. Далее по ходу программы происходит перевод суммарного и разностного сигнала в логарифмическую шкалу. Следующим шагом программа фильтрует значения по изменению фазы до тех пор, пока соответственно различие между суммой и разностью не станет максимальным. Направление наибольшего различия уровней излучения будет соответствовать направлению на источник радиоизлучения, также явно в направлении источника радиоизлучения проявится скачок разности фаз для суммы и разности сигналов. Вышеуказанные действия происходят по циклу, результаты расчётов следуют на график пеленга. На графике в интерфейсе программы пользователь может наблюдать такие параметры, как: ширина полосы сканирования, центральная частота, направление на источник радиоизлучения, мощность сигнала и т. д.

## 2. Антенно-фидерный тракт устройства

Первая составляющая устройства для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот — SDR радио. Вторая составляющая устройства — антенно-фидерный тракт.

Антенно-фидерный тракт в рассматриваемом устройстве включает в себя две печатные логопериодические антенны, два коаксиальных кабеля с абсолютно одинаковой длиной, что необходимо для отсутствия фазовых ошибок. Антенны и кабели располагаются на подвижной опоре. Подвижная опора сконструирована таким образом, что она позволяет регулировать расстояние между двумя логопериодическими антеннами, а также производить установку на штативе.

Логопериодические антенны на опоре разносятся на расстояние, равное половине длины рабочей волны. В связи с этим фактором на используемой опоре реализована функция смещения антенн друг относительно друга на необходимое расстояние. Шкала на опоре для удобства использования проградуирована. Сама опора, крепежи для антенн, подвижные элементы опоры и крепёж на штатив выполнены с использованием аддитивных технологий печатью на 3D принтере.

Используемые логопериодические печатные антенны изготавливались с применением двухстороннего текстолита FR-4 (1 мм). Для получения реальных характеристик антенн были

проведены исследования физических образцов изготовленных логопериодических антенн. На рис. 1 показано измерение макета логопериодической антенны на векторном анализаторе цепей Rohde&Schwarz ZNB20 с целью получения графика возвратных потерь.

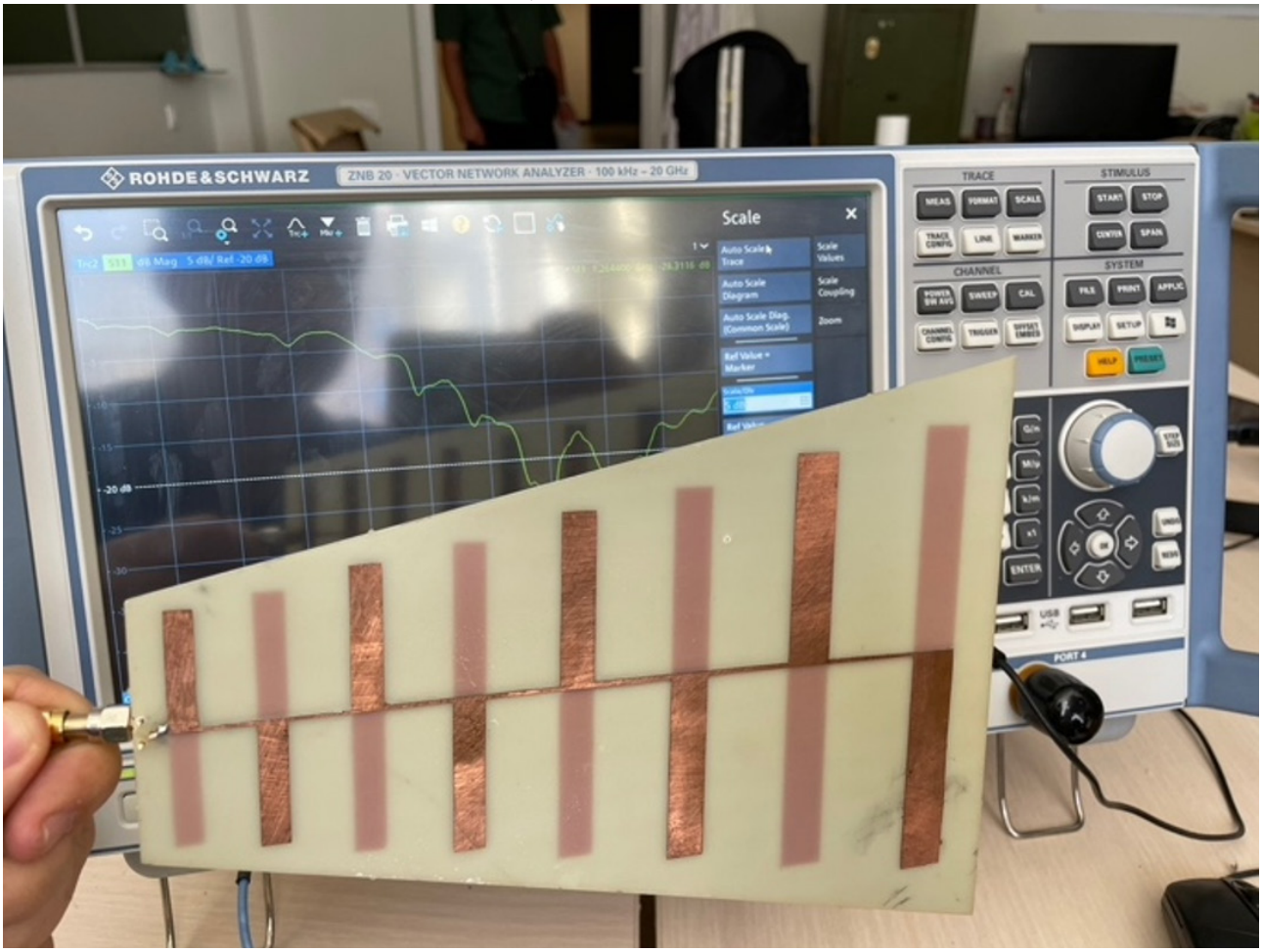



*Рис. 1. Измерение макета логопериодической антенны на векторном анализаторе цепей Rohde&Schwarz ZNB20*

Также было проведено исследование с целью получения реальной диаграммы направленности физического макета логопериодической печатной антенны. Результаты, полученные в ходе выполнения исследования физических макетов логопериодических антенн показали, что диапазон рабочих частот антенн соответствовал полосе от 879 до 1800 МГц. Ширина главного лепестка диаграммы направленности составила величину 80 градусов.

### 3. Измерение дальности пеленгации разработанного устройства

Далее будет рассмотрен процесс измерения дальности пеленгации разработанного устройства для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот. На рис. 2 располагается непосредственно разработанное устройство.

При проведении исследований для получения величины дальности функционирования пеленгатора, источником излучения являлся эталонный генератор Siglent/АКИП-3209. Генератор производил запитку логопериодической антенны, которая являлась целью. При проведении исследований частота сигнала эталонного генератора равнялась 1320 МГц, уровень сигнала соответствовал диапазону от 0 до –70 дБмВт. Исследование заключалось в определении максимальной дальности, при которой ошибка пеленга не превышает величину 10 градусов.

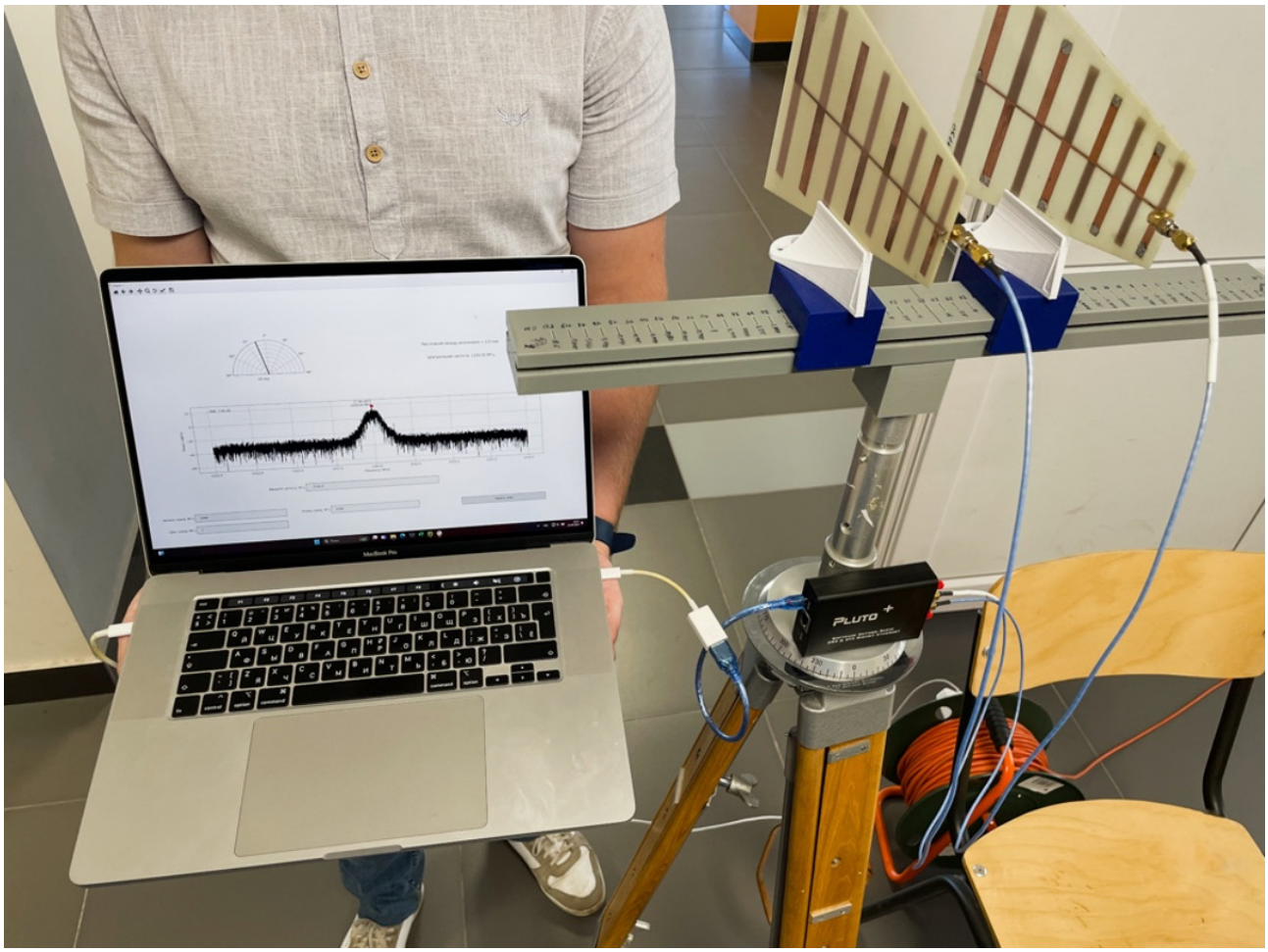



*Рис. 2. Разработанное устройство для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот*

Было определено, что максимальное разрешение разработанного устройства по азимуту соответствует диапазону от –45 до 45 градусов.

При проведении исследований возможность измерения дальности ограничивалась 35 метрами, но расстояние в 35 метров оказалось малым, сохранялась большая точность пеленгации. Далее изменялся уровень сигнала генератора вплоть до –65 dBm. При использовании на генераторе сигнала такого уровня также сохранялась точность пеленгации с ошибкой менее 10 градусов, что свидетельствует о том, что разработанное устройство для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот достоверно способно определять истинное направление на источник радиоизлучения на очень больших дальностях.

## Заключение

В работе было рассмотрено устройство для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот, основой устройства является программно-определяемое радио Pluto+ SDR. В качестве антенн в устройстве применялись широкополосные печатные логопериодические антенны, которые позволили производить пеленгацию в широкой полосе частот. При этом также стоит брать во внимание то, что полоса функционирующих частот разработанного устройства ограничивается как используемыми антеннами, так и непосредственно полосой функционирующих частот SDR приёмника. Было проведено исследование по определению дальности пеленгации, при котором сохраняется достаточная достоверность

функционирования разработанного устройства. Результаты исследования показали, что разработанный пеленгатор способен достоверно определять истинное направление на источник радиоизлучения на довольно больших дальностях и обладает большим потенциалом для его использования. Удалось добиться главной цели работы — разработать недорогое и несложное в реализации устройство для определения направления на источник радиоизлучения в широкой полосе частот, обладающее хорошими характеристиками определения пеленга.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект № FZGM-2025-0004).

**Литература**

1. *Rohde & Schwarz*. An Introduction to Direction Finding Methodologies: White Paper. – 2020. – 26 p.

2. *Purwanto K. N. J., Yahya A., Khamis N. H. H., Nor N. M., Shaari M. R., Sidek A. R. M.* Development of Radio Direction Finder using 6 Log Periodic Dipole Array Antennas // 2018 5th International Conference on Information Technology, Computer, and Electrical Engineering (ICITACEE). – 2018. – P. 157–160. doi: 10.1109/ICITACEE.2018.8576965.

3. *Anggraeni M. E., Handayani P., Hendrantoro G.* Double-directional outdoor MIMO channel measurement at 2.4 GHz using SDR // 2016 International Seminar on Intelligent Technology and Its Applications (ISITIA). – 2016. – P. 255–260. doi: 10.1109/ISITIA.2016.7828667.

УДК 621.396

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИАГРАММООБРАЗУЮЩЕЙ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ ЛИНЗЫ ЛЮНЕБЕРГА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК С ЧАСТОТНЫМ СКАНИРОВАНИЕМ

**И. А. Баранников, Е. А. Ищенко, Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, С. М. Фёдоров, А. П. Тихонов**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается конструкция разработанной антенной системы с использованием диограммообразующей схемы на основе линзы Люнеберга. Реализация частотного сканирования по углу места составляет ширину диапазона до 48 градусов. Также в разработке реализуется полноазимутальное электронное сканирование луча. Проводится компьютерное моделирование с целью получения характеристик разработанной антенной системы. В результате компьютерного моделирования коэффициент направленного действия антенной системы соответствует величине не менее 21 дБ. Цель работы: разработать антенную систему с гибридным сканированием луча, обладающую хорошими направленными характеристиками.

**Ключевые слова:** гибридное сканирование, электронное сканирование, частотное сканирование, линза Люнеберга, диаграммообразующая схема.

## Введение

В настоящее время довольно важной и актуальной задачей является создание разнообразных антенных систем, у которых будет иметься возможность реализации направленного луча. Использование таких антенных систем с направленным лучом дает возможность улучшить эффективность связи, увеличить точность связи, сделать большим расстояние передачи данных. Чем уже становится главный лепесток диаграммы направленности, тем большую энергию он концентрирует в определённом направлении. Но при выходе устройства из узкого луча связь будет нарушена, и в связи с этим фактором требуется система, которая будет отклонять узкий луч в необходимом направлении для поддержания постоянной связи. Часто в таких случаях применяют фазированные антенные решётки, в которых направление луча можно задавать при помощи изменения амплитудно-фазового распределения непосредственно на элементах фазированной антенной решётки. Но такие устройства довольно дорогостоящие и сложные. Возможно также применение иных методов сканирования луча, таких как: частотное сканирование [1], механическое сканирование [2], электронное сканирование [3] и гибридное сканирование [3].

Обычно антенны с возможностью частотного сканирования луча просты в реализации и имеют довольно высокий уровень надёжности вследствие отсутствия активных фазовращателей, но также такие антенны обычно являются довольно крупногабаритными вследствие того, что их размеры зачастую больше нескольких длин волн. Антенны, имеющие возможность механического сканирования луча, требуют наличия механически подвижных частей в своей конструкции, вследствие наличия этого фактора надёжность таких антенных систем обычно невысока.

В данной статье будет рассматриваться разработанная антенная решётка с гибридным сканированием, в основе которой стоит комбинация электронного сканирования луча и частотного сканирования луча. Электронное сканирование луча будет производиться по азимуту, а частотное сканирование — по угломестной плоскости. Схема диаграммообразования будет реализована на основе линзы Люнеберга. Пример антенных систем на основе линзы Люнеберга приведён в работе [4].

## 1. Конструкция разработанного устройства

В основе схемы диаграммообразования стоит линза Люнеберга. Линза Люнеберга — это линза, у которой показатель преломления не постоянен, изменяется по определённой закономерности. В контексте использования линзы Люнеберга для антенн непостоянным у неё будет показатель величины диэлектрической проницаемости. И этот показатель диэлектрической проницаемости также будет изменяться по определённой закономерности. Показатель относительной диэлектрической проницаемости в идеальном случае должен меняться плавно. Для большей простоты реализации конструкции в рассматриваемой антенной системе в линзе Люнеберга используется система из трёх слоёв: внешний слой, состоящий из тефлона (показатель диэлектрической проницаемости равен 2.1), промежуточный слой — полиэтилен (показатель диэлектрической проницаемости равен 2.3) и центральный слой, изготовленный из полистирола (показатель диэлектрической проницаемости равен 2.5). В схеме диаграммообразования применяется две линзы Люнеберга. Они отделяются друг от друга экраном, это даёт возможность повысить эффективность системы возбуждения излучения. Общая конструкция разработанной линзы Люнеберга представлена на рис. 1.

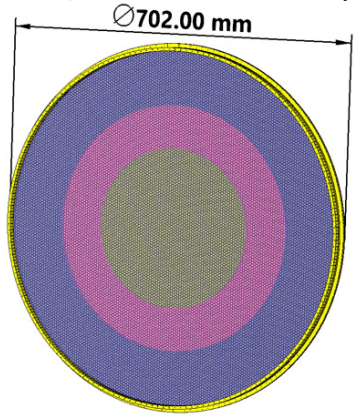



*Рис. 1. Конструкция линзы Люнеберга*

В разработанной диаграммообразующей схеме применяется 180 отдельных входов. Это даёт возможность поддерживать высокоэффективное возбуждение антенной системы наряду с эффективным захватом пространства. Возбуждающие элементы — это элементы Вивальди. Именно они позволяют обеспечить подачу волны в линзу Люнеберга. Элементы Вивальди вверху конструкции направляют волны непосредственно на нагрузку — на антенные линии. Ход волн через схему диаграммообразования располагается на рис. 2.

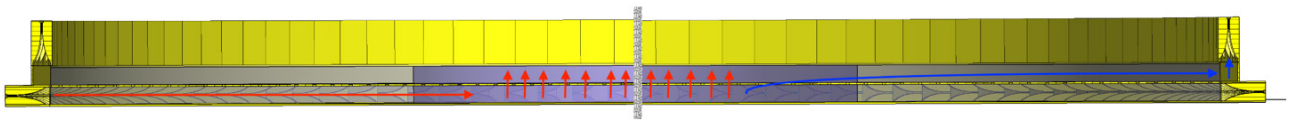


*Рис. 2. Прохождение волн через систему диаграммообразования*

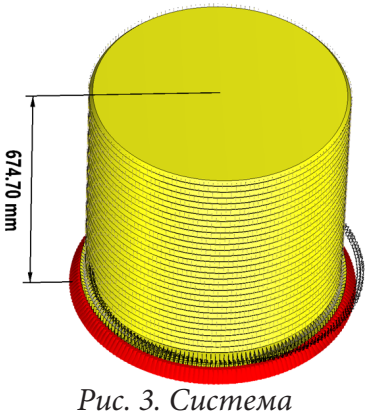



*Рис. 3. Система с гибридным сканированием*

Нагрузкой на диаграммообразующую схему является антенный блок, имеющий возможность частотного сканирования. Частотное сканирование становится возможным благодаря применению рельефно-фазовой дифракционной решётки эшелетт. Разработанная антенная система вместе с дифракционной решёткой расположена на рис. 3.

Разработанная антенная система предполагается для функционирования в полосе частот от 8 ГГц до 13 ГГц. Это даёт возможность добиться компромисса относительно размера конструкции и разрешающей способностью главного лепестка диаграммы направленности.

## 2. Характеристики разработанного устройства

Было проведено компьютерное моделирование в целях получения характеристик разработанной антенной системы. Моделирование проводилось с помощью программы CST Studio. Компьютерное моделирование производилось с учетом фактора того, что электронное ска-

нирование луча производится по азимуту, а частотное производится по углу места. В диапазоне рабочих частот коэффициент стоячей волны по напряжению соответствовал величине от 1.5 до 3 единиц в полосе частот от 8 ГГц до 13 ГГц. Такая ситуация соответствует потерям в диаграммообразующей схеме на высоких частотах, чтобы впоследствии избежать потерь возможен вариант применения структуры на малошумящих усилителях. На рис. 4 приводится диаграмма направленности разработанной системы, полученная в результате выполнения компьютерного моделирования.

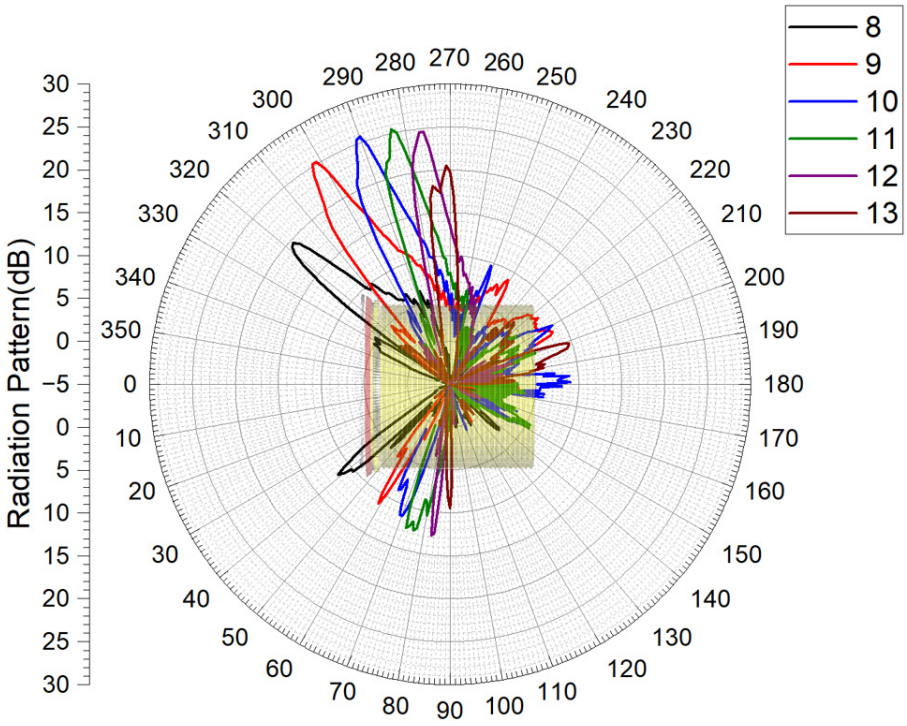



*Рис. 4. Диаграмма направленности разработанной системы*

Разработанная антенная система с использованием диаграммообразующей схемы на основе линзы Люнеберга может формировать лепесток шириной 3.9 на 5.7 градусов во время ортогонального излучения. Частотное сканирование по углу места соответствует величине до 48 градусов. Электронное сканирование в разработанном устройстве является полноазимутальным. Получившийся в ходе компьютерного моделирования коэффициент направленного действия системы составляет величину не менее 21 дБ.

## Заключение

В статье была рассмотрена конструкция разработанной антенной системы с использованием диограммообразующей схемы на основе линзы Люнеберга. Реализация частотного сканирования по углу места составляет ширину диапазона до 48 градусов. Также в разработке было реализовано полноазимутальное электронное сканирование луча. Было проведено компьютерное моделирование с целью получения характеристик разработанной антенной системы. В результате компьютерного моделирования коэффициент направленного действия антенной системы соответствует величине не менее 21 дБ. Удалось добиться цели работы: была разработана антенная система с гибридным сканированием луча, обладающая хорошими направленными характеристиками.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект № FZGM-2025-0004).

**Литература**

1. *Vázquez C., García C., Álvarez Y., Ver-Hoeye S., Las-Heras F.* Near Field Characterization of an Imaging System Based on a Frequency Scanning Antenna Array // in IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – May 2013. – Vol. 61, No 5. – P. 2874–2879. doi: 10.1109/TAP.2013.2244834.

2. *Feng P.-Y., Qu S.-W., Yang S.* Wideband meachanical scanning lens antenna at Ku-band // 2017 11th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP), Paris, France. – 2017. – P. 1076–1078. doi: 10.23919/EuCAP.2017.7928295.

3. *Sugimoto Y., Sakakibara K., Hung Nguyen T., Narita T., Kikuma N.* Mechani-cal/Electrical Hybrid Two-Dimensional Beam Scanning Cylindrical Dielectric Lens Antenna Fed by a Phased Array Primary Radiator // in IEEE Access. – 2025. – Vol. 13. – P. 6977–6987. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3525265.

4. *Сабуров Д. М., Кусайкин Д. В., Денисов Д. В.* О линзовых многолучевых антеннах Люнеберга миллиметрового диапазона для систем MIMO 5G // Инновационные аспекты развития науки и техники. – 2021. – №10.

УДК 004.925

# МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТРЁХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**С. А. Батуров, С. Н. Медведев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассмотрены два способа представления объектов в гиперболических пространствах. Первый метод определение аффинной координатной системы, и сформулированный для неё способ расчёта аффинных преобразований. Данная координатная система основывается на проецировании точек гиперболического пространства на гиперболоид в пространстве Минковского. Далее в статье описана гиперболическая полярная система координат и полярное преобразование, представляет собой операцию перевода из точки в заданную. Данное преобразование используется для описания аффинных преобразований в полярных координатах. В результате, представлен вывод о выборе более эффективной систем представления.

**Ключевые слова:** неевклидовая геометрия, гиперболическая геометрия, система координат, аффинные преобразования, операция отражения, операция перемещения, операция поворота, полярные координаты, аффинные преобразования, пространство Минковского, преобразование Лоренца, модель Бельтрами — Клейна.

## Введение

Задача визуализации гиперболических пространств сильно отличается от визуализации евклидовой геометрий с точки зрения представления Евклидового пространства. Для расчёта операций над объектами необходим способ их представления. Трёхмерное гиперболическое пространство будем обозначать как $H^3$.

Настоящая статья представляет различные способы представления объектов в гиперболическом пространстве, а также соответствующие им реализации аффинных преобразований.

## 1. Гиперболоидный способ представления пространств

Гиперболоидная модель или модель Минковского — это модель представления гиперболического пространства, где каждая точка $N$-мерного гиперболического пространства представлена, как точка гиперболоида в $(N+1)$-мерном пространстве Минковского. Данный тип пространства отображает положение объекта в некоторой точке $A=(a_1,a_2,...,a_N)$, в определённый момент времени $t$, таким образом точка в пространстве Минковского являются кортежем $t$ и координат пространства.

Пусть точка $A$ лежит на поверхности гиперболоида Минковского, тогда для неё выполняется равенство:

$$a_1^2+a_2^2+...+a_N^2-t^2=1,$$

где $t>0$. Тогда точка в данном пространстве представима, как вектор с координатами:

$$A=\left(a_1,a_2,...,a_N,\sqrt{1+a_1^2+a_2^2+...+a_N^2}\right)$$

$$A=\left(a_1,a_2,...,a_N,t\right).$$

Данный вид координат называют однородными координатами [1].

Таким образом, заданная точке в гиперболическом пространстве можем сопоставить единственный вектор. Это позволяет производить обработку заданной точки программируемым

образом. Для точек, представленных данным образом можно определить скалярное произведение. Рассмотрим трёхмерный случай $H^3$.

$$\langle a,b\rangle_h = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b - t_a t_b.$$

Данное скалярное произведение называется произведением Минковского. Оно может представить в матричном виде, обозначим её, как $I^{3,1}$ [1].

$$I^{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle a,b\rangle_h = a^T I^{3,1} b.$

## 2. Нормализованные координаты и модель Бельтрами — Клейна

Другой способ представления имеет вид $A_n\ (a_1, a_2, .., a_N, 1)$, он называется нормализованными или аффинными [1], по аналогии с аффинными координатами, применимые в представлении Евклидовых пространств. Для того, чтобы перейти от однородных координат к нормализованным, достаточно провести нормализацию, поделив все координаты на координату $t$, т. е. $A_n\left(\frac{a_1}{t}, \frac{a_2}{t}, .., \frac{a_N}{t}\right)$.

Тогда гиперболическое пространство $H^3$ можно представить, как набор всех векторов, для которых соблюдается $V_- = \{A \in R^4 \mid \langle A, A\rangle_h < 0\}$, которые соответствуют всем возможным векторам в однородных координатах. Они могут быть нормализованы, после чего получится набор всех подходящих векторов в аффинном представлении, что соответствует модели Бельтрами — Клейна.

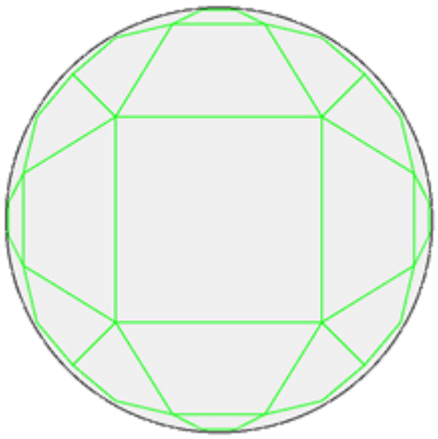


*Рис. 1. Двумерное замощение, представленное в модели Бельтрами — Клейна*

Модель Бельтрами — Клейна представляет собой единичную окружность или диск, в котором геодезическая представляет собой прямую (рис. 1). Данная модель представляет собой один из способов визуализации гиперболического пространства. Стоит также отметить, что данная модель не сохраняет углы.

## 3. Преобразование моделей

Евклидово пространство удобно для визуализации тем, что мы можем представить все операции над моделями, как матрицы аффинных преобразований, которые при последова-

тельном применении производят итоговую трансформацию объекта. Существуют подобные аналоги для гиперболического пространства. По аналогии с $R^3$, матрицы операций в пространстве $H^3$ будут иметь размерность $4\times4$.

Рассмотрим операцию отражения относительно точки. Пусть $p$ — точка в гиперболическом пространстве, тогда матрица отражения относительно точки p имеет вид:

$$r_p^{hyp} = I - 2pp^T I^{3,1} / \langle p, p \rangle_h .$$

Данная формула основывается на формуле отражения вектора [3]. Здесь операция произведения векторов заменена на произведение Минковского, с представлением его в матричном виде. Для любого вектора a в пространстве $H^3$ верно $\langle a, a \rangle = -1$. Исходя из этого формулу можно упростить:

$$r_p^{hyp} = I + 2pp^T I^{3,1}.$$

Определив операцию отражения, можем определить операцию переноса точки из координаты $a$ в $b$. По аналогии с Евклидовым пространством, мы можем сделать комбинацию из двух отражений. Сначала производится отражение относительно точки $a$, которое переносит точку в начало координат, а затем производится отражение относительно точки $m$, являющейся средней точкой между $a$ и $b$.

$$T_{a,b}^{hyp} = r_m^{hyp} \cdot r_a^{hyp}.$$

Для получения однородных координат средней точки используется формула:

$$m = (a+b) \cdot \sqrt{-\langle a, b \rangle_h},$$

где $a$ и $b$ — точки с однородными координатами.

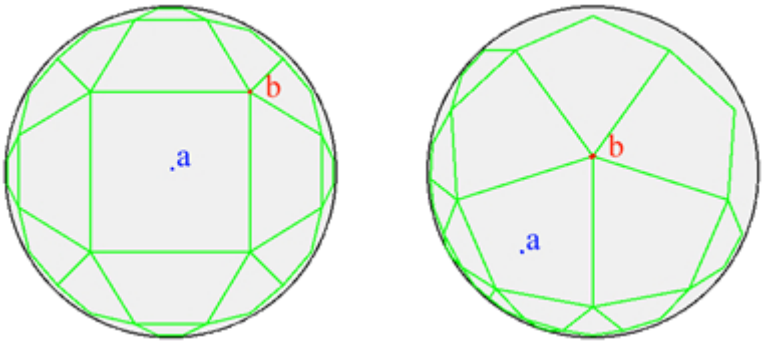



*Рис. 2. Применение операции переноса точки a в точку b на сцену*

В гиперболическом пространстве операция поворота аналогична операции поворота в Евклидовом пространстве той же размерности. Произведение операции поворота относительно заданной точки $p$ по своей структуре аналогично с подобной в Евклидовом пространстве. Оно представляет применение к объекту операцию, переносящей точку $p$ в начало координат, произведение операции поворота, и применение к результату операции переносящей точку из начала координат в $p$. Данный способ работает, как и для $R^3$, так и для $H^3$. Таким образом, матрица трансформации поворота вокруг точки в гиперболическом пространстве может иметь вид:

$$R_{l,\alpha}^{hyp} = T_{0,p}^{hyp} \cdot R_{u,\alpha}^{euc} \cdot T_{p,0}^{hyp}.$$

### 4. Полярная система координат

Полярная система координат основывается на преобразовании Лоренца, называемое для пространства Минковского. Данное преобразование представляет собой перемещение без вращения. Оно представимо, как оператор трансформации следующего вида:

$$\Lambda(r)=\begin{bmatrix}\cosh(r) & \mathrm{sh}(r) & 0\\ \mathrm{sh}(r) & \cosh(r) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Данная матрица соответствует перемещению по оси $X$ в $H^2$. Тогда для получения координаты следующей точки получим $x'=\Lambda(r)x$, где $r$ — параметр, отвечающий за расстояние на которое происходит перемещение.

Однако для гиперболического пространства порядок применения операции трансформации важен, в отличие от Евклидового. Так, при применении преобразования Лоренца по оси $X$, а затем по оси $Y$, будет отличаться результатом от того же набора операций в другом порядке. По этой причине координатная система, не может быть представлена, как набор операций перемещения по осям. По этой причине, имеет смысл использовать полярную систему координат.

Определим полярное преобразование [2]. Любое аффинное преобразование представимо, как комбинация из следующих преобразований.

$$T_{n,r,m}=R_nT_rR_m=\begin{bmatrix}\cos(n) & -\sin(n) & 0\\ \sin(n) & \cos(n) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cosh(r) & \mathrm{s}h(r) & 0\\ \mathrm{s}h(r) & \cosh(r) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(m) & -\sin(m) & 0\\ \sin(m) & \cos(m) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Первые два преобразования, составляющие полярное преобразование, которые мы будем называть $R_n$ и $T_r$, эффективно перемещают начало координат в точку с полярными координатами $(r,n)$. То есть структурно $R_nT_r$ соответствует переносу в заданную координату, а матрица $R_m$ задаёт поворот данной точки.

Тогда матрица операции переноса точки в начале координат в точку заданной координатами $(r,n)$. Таким образом, имеется способ однозначно задать каждую точку пространства.

## Заключение

Итак, в работе представлены два примера способов представления объектов в гиперболическом пространстве: нормализованные и полярные системы координат. Сравнивая два метода, получаем, что операции в полярных координатах являются более затратными, так как для одно аффинное преобразование рассчитывается в виде произведения трёх матриц. Исходя из этого можно, сделать вывод, что при программной реализации представленных операций, более эффективно использовать аффинные координаты.

## Литература

1. *Phillips Mark, Gunn Charles.* Visualizing Hyperbolic Space: Unusual Uses of 4×4 Matrices. – 1992. – P. 209–214.

2. Hyperbolic geometry for the uninitiated and curious – How to simulate hyperbolic space – Режим доступа: https://martinlusblog.wordpress.com/2020/07/25/on-simulating-and-understanding-hyperbolic-space-with-no-previous-knowledge-on-the-subject/ (дата обращения: 26.05.2025)

3. Reflection (mathematics) – Wikipedia – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Reflection_(mathematics) (дата обращения: 26.05.2025)

УДК 519.6

# ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОЦЕНКЕ РАДИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ И РАССТОЯНИЯ ДО ИСТОЧНИКА В ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

**В. А. Башкарев[1], С. А. Переселков[1], В. М. Кузькин[2], Н. В. Ладыкин[1], А. С. Переселков[1]**

*[1]Воронежский государственный университет*
*[2]Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук*

**Аннотация.** Методами численного эксперимента исследуется вопрос практической применимости интерферометрического подхода к обработки гидроакустического сигнала. Рассмотрена задача восстановления значений радиальной скорости и начальной дистанции движущегося в мелководном волноводе широкополосного источника акустических колебаний. Оценена эффективность подхода для широкого диапазона параметров приема — частот и времени наблюдения, и источника — дистанций и значений скорости. Сделан вывод об универсальных значениях параметров приема для эффективной оценки параметров источника.
**Ключевые слова:** интерферометрический метод, пассивная гидролокация, гидроакустический волновод, интерферограмма, голограмма, оценка параметров источника.

## Введение

В работах [1, 2] впервые предложен и обоснован интерферометрический подход обработки широкополосных гидроакустических сигналов. Следующим важным шагом в интерферометрической обработке [3] в океанических волноводах [4] является голографическая обработка [5–10]. Голографическая обработка [5–10] основана на устойчивых характеристиках интерферограмм, формируемых звуковыми источниками. Геометрия локальных полос определяется частотой, параметрами волновода и движением источника, а сами методы эффективны в широком диапазоне частот, устойчивы к шумам и изменениям океанологических условий, работая в нестационарной среде [8–22]. Совмещение голографии с оценкой глубины [23, 24] повышает помехоустойчивость при обнаружении [25, 26], различении целей [27–29], определении направления прихода [30–32], а также вычислении скорости, расстояния [5–9] и глубины [23, 24] малошумных объектов. Голография также позволяет применять адаптивные алгоритмы [33–35], выполнять модовую селекцию [36, 37] и использовать дробное преобразование Фурье [38]. По сравнению с методами обращения волнового фронта и временного реверса, голографический подход обеспечивает более высокую фокусировку [39], что делает его перспективным для задач локализации.

В данной работе методами численного эксперимента исследуется область практической применимости полученных с рядом допущений соотношений, которые предназначены для оценки значения радиальной скорости источника по отношению к приемнику и начальной дистанции между ними. Критерием практической применимости принято не превышение модулем относительной ошибки значения 10 % при оценке значения радиальной скорости и дистанции с соответствующей истинной величиной.

## 1. Математическая модель

Мелководный волновод представим в виде водного слоя воды постоянной глубины $H$ со скоростью звука $c(\vec{r},z)$. Здесь $\vec{r}=(x,y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости. Водный слой ограничен сверху свободной поверхностью $(z=0)$ и снизу дном $(z=H)$. Вектор-

но-скалярный приемник (ВСП) находится в точке $Q(\vec{r}_q, x_q, y_q, z_q)$. Источник звука — $S(\vec{r}_s, x_s(t), y_s(t), z_s(t))$. Здесь, $\vec{r}_s(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$, где $\vec{v}$ — скорость источника. Спектр сигнала обозначен $s(f)$.

Звуковое давление в точке приема в рамках модового подхода можно представить в виде:

$$P(f,t) = s(f)\sum_{m=1}^{M} \frac{\phi_m(z_s,f)\phi_m(z_q,f)\exp[ir(t)h_m(f)]}{\sqrt{r(t)h_m(f)}}, \quad (1)$$

где $r(t) = \left|\vec{r}_s(t) - \vec{r}_q\right|$ — расстояние между источником и приемником, $\phi_m(z,f)$, $h_m(f)$ — мода волновода и ее горизонтальное волновое число. На основе временной зависимости давления $P(f,t)$ формируется интерферограмма источника:

$$I(f,t) = P(f,t)P^*(f,t), \quad (2)$$

где верхний индекс «*» обозначает комплексно-сопряженную величину. Для повышения контрастности на интерферограмме устраняется среднее значение $\overline{I}(f,t)$, $\tilde{I}(f,t) = I(f,t) - \overline{I}(f,t)$.

2D-голограмма источника $F(\tau, v)$ формируется применением к интерферограмме $\tilde{I}(f,t)$ двумерного преобразования Фурье:

$$F(\tau,v) = \int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} \tilde{I}(f,t)\exp[i2\pi(vt - f\tau)]dfdt, \quad (3)$$

Здесь $v$ и $\tau$ — частота и время голограммы; $f_{1,2} = f_0 \mp (\Delta f/2)$, $f_0$ — средняя частота спектра. Спектральная плотность $F(\tau, v)$ сигнала движущегося источника локализована в 2-х узких полосах, зеркально перевернутых относительно начало координат, в виде отдельных фокальных пятен, вызванных интерференцией мод разных номеров [1, 2]. Они расположены в первом и третьем квадрантах голограммы, если радиальная скорость источника $v < 0$ (источник приближается к приемнику), и во втором и четвертом квадрантах, когда он удаляются от приемника $(v > 0)$. В случае неподвижного или движущегося источника с нулевой радиальной скоростью координаты пиков фокальных пятен расположены на оси времени $\tau$. Область локализации содержит $M-1$ пиков с координатами $(\tau_\mu, v_\mu)$, которые расположены на прямой $v = \varepsilon\tau$ с угловым коэффициентом $\varepsilon = v_\mu/\tau_\mu$. Здесь $M$ — число мод, формирующих поле, $\mu = 1$ — номер фокального пятна. Ближайший к началу координат пик первого фокального пятна, обусловленный интерференцией соседних мод, приходится на значения $(\tau_1, v_1)$. Координаты соседнего пика, вызванного интерференцией мод номеров $(m, m+2)$, расположены в точке $(\tau_2, v_2)$ и т. д. И, наконец, координаты самого удаленного пика, продиктованного интерференцией первой и последней моды — $(\tau_{M-1}, v_{M-1})$. Спектральная плотность шумоизлучения источника сосредоточена в полосе, ограниченной прямыми

$$v_I = \varepsilon\tau + \delta v, \quad v_{II} = \varepsilon\tau + \delta v, \quad (4)$$

где $\delta v = 1/\Delta t$ — полуширина фокальных пятен в направлении оси $v$. В направлении оси $\tau$ полуширина фокальных пятен $\delta\tau = 1/\Delta f$. Вне этой полосы спектральная плотность практически подавлена. Угловые коэффициенты $\varepsilon$ и интерференционных полос $\delta f/\delta t$ связаны соотношением

$$\varepsilon = -\delta f/\delta t, \quad (5)$$

где $\delta f$ — частотный сдвиг интерференционных максимума (ЧСИМ) поля за время $\delta t$.

Радиальная скорость $v$ и удаление источника от приемника $r_0$ в начальный момент времени $t = 0$, если $r_0 \gg |v|\Delta t$, связаны с координатами пиков фокальных пятен зависимостями

$$\dot{v} = -2\pi\kappa_{w\mu}v_\mu, \quad \dot{r}_0 = \kappa_{r\mu}\tau_\mu \quad (6)$$

где

$$\kappa_{w\mu} = \left|h_{m(m+\mu)}(f_0)\right|^{-1}, \quad \kappa_{r\mu} = 2\pi\left|dh_{m(m+\mu)}(f_0)/df\right|^{-1} \quad (7)$$

— коэффициенты, определяющие пространственные и частотные масштабы изменчивости передаточной функции волновода [21]. $h_{mn} = h_m - h_n$, $h_m$ — действительная составляющая го-

ризонтального волнового числа (постоянная распространения) $m$-й моды. Восстановленные параметры источников, в отличие от их истинных значений, отмечены точкой сверху. Черта сверху означает усреднение по номерам мод. В соотношения (6) входят непосредственно измеряемые по голограмме координаты максимумов фокальных пятен $(\tau_\mu, \nu_\mu)$ и неизвестные величины (7). Они могут быть определены по данным акустической калибровки района исследований или по результатам моделирования на основе априорной информации о характеристиках волновода.

Для рассматриваемой двухмодовой ситуации оценку величин радиальной скорости и начальной дистанции можно получить, используя значения координат $(\nu_0, \tau_0)$ экстремума функции спектральной плотности $F(\tau, \nu)$. Аналитические формулы, связывающие координаты пиков фокальных максимумов со значениями радиальной скорости $\nu$ (6) и начальной дистанции $r_0$ (7) между источником и приемником преобразуются к

$$\dot{\nu} = -2\pi \nu_0 h_{12}(f_0)^{-1}, \tag{8}$$

$$\dot{r}_0 = 2\pi\tau_0 [dh_{12}(f_0)/df]^{-1}, \tag{9}$$

где

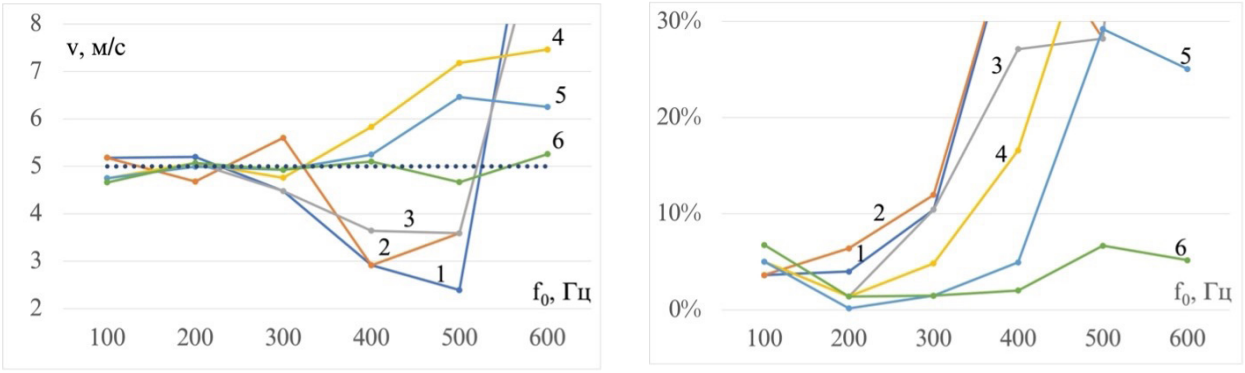
$$h_{12}(f_0) = h_1(f_0) - h_2(f_0). \tag{10}$$

Здесь $h_1(f_0)$ и $h_2(f_0)$ — действительная составляющая горизонтального волнового числа (постоянной распространения) соответственно 1-й и 2-й моды.

## 2. Результаты численного эксперимента

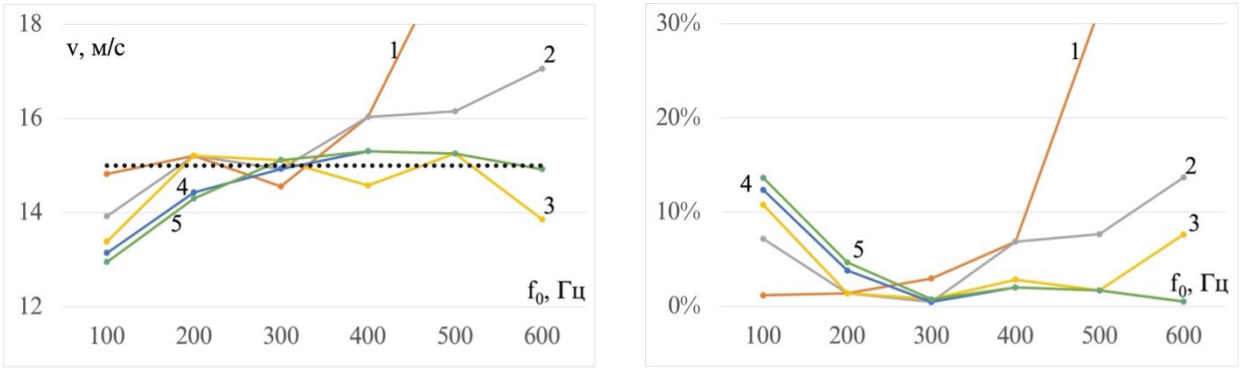
Как уже отмечалось, при проведении численного эксперимента использовалась модовая модель, учитывались две первые моды, которые в общем случае являются самыми энергонесущими, соответственно оценки радиальной скорости и начальной дистанции проводились согласно формулам (8, 9, 10). Рассматривался горизонтально-однородный океанический волновод глубиной $H = 50$ *м* с равномерным профилем скорости звука $c = 1500$ *м/с*. Параметры поглощающего жидкого однородного дна: отношение плотности грунта и воды $\rho = 1.8$, комплексный показатель преломления $n = 0.84(1 + i0.03)$.

Источник удаляется радиально от приемника вдоль оси X с постоянной скоростью. Глубина приемника $z_Q = 48$ *м*, глубина источника $z_S = 10$ *м*.



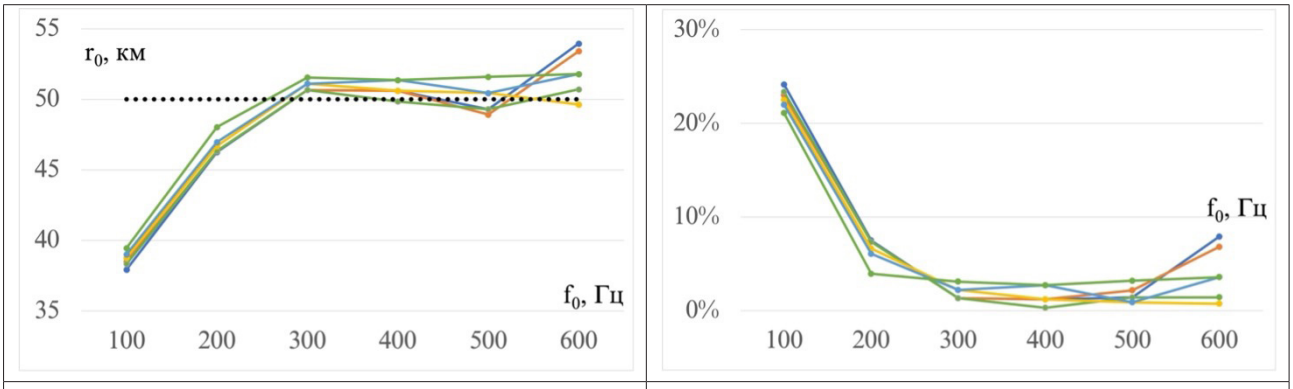

*(а)* *(б)*

*Рис. 1. Зависимости точности оценки скорости от частоты и времени наблюдения (а) — абсолютное значение, (б) — модуль относительной ошибки. Дистанция $r_0 = 10$ км, скорость $\nu = 5$ м/с. Время наблюдения $\Delta t$: кривая 1 — 30 с, кривая 2 — 60 с, кривая 3 — 120 с, кривая 4 — 240 с, кривая 5 — 300 с, кривая 6 — 600 с*




*(а)* *(б)*

*Рис. 2. Зависимости точности оценки скорости от частоты и дистанции (а) — абсолютное значение, (б) — модуль относительной ошибки. Время наблюдения $\Delta t = 120$ с, скорость $v = 15$ м/с. Дистанция $r_0$: кривая 1 — 5 км, кривая 2 — 10 км, кривая 3 — 25 км, кривая 4 — 50 км, кривая 5 — 100 км*




*(а)* *(б)*

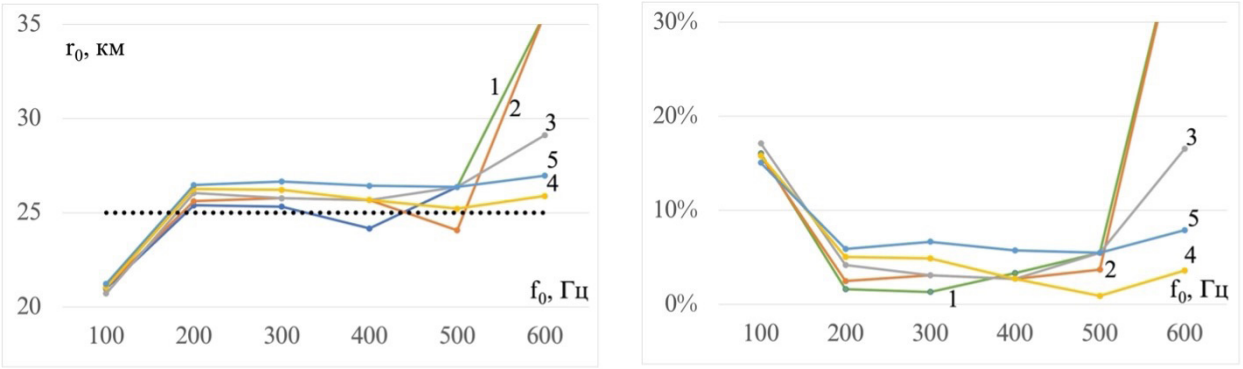
*Рис. 3. Зависимости точности оценки дистанции от частоты и времени наблюдения (а) — абсолютное значение, (б) — модуль относительной ошибки. Дистанция $r_0 = 50$ км, скорость $v = 5$ м/с*

Множество рассмотренных радиальных скоростей источника $v: 2,5,10,15,20$ м/с. Совокупность центральных частот $f_0: 100,200,300,400,500,600$ Гц с постоянной полосой для каждой центральной частоты $\Delta f = 50$ Гц. Набор времени наблюдения: $\Delta t: 60,120,240,300,600$ с. Набор начальных дистанций между источником и приемником $r_0: 5,10,25,50,100$ км.

На рис. 1 представлена характерная закономерность точности оценки скорости в зависимости частоты и времени наблюдения. Рост времени наблюдения увеличивает частотный диапазон, где относительная точность оценки скорости не хуже 10 %. При этом 10% точность достигается и при коротком времени наблюдения в 30 или 60 секунд на центральных частотах в 100, 200, 300 Гц.

Рис. 2 показывает зависимость точности оценки скорости от частоты и дистанции между приемником и источником. Можно сделать вывод, что использование диапазона центральных частот от 100 до 400 Гц позволяет с относительной точностью до 10 % оценивать дистанцию в широком диапазоне — от 5 до 100 км. Согласно рис. 3 наблюдается зависимость относительной точности оценки дистанции от частоты и времени наблюдения. Кривые плотно расположены, что говорит о слабой зависимости точности оценки дистанции от времени наблюдения. Видно, что 10 % относительная точность достигается для каждого рассмотренного времени наблюдения для частот от 200 до 500 Гц. Рис. 4 демонстрирует зависимость относительной точности восстановления значения дистанции от частоты и скорости объекта. Для всего рас-

сматриваемого диапазона скоростей обеспечивается относительная точность лучше 10 % для диапазона 200–500 Гц. Семейство кривых, соответствующих различным значениям скорости достаточно плотно расположены, что свидетельствует о слабой зависимости точности оценки от величины скорости источника.




*(а)* *(б)*

*Рис. 4. Зависимости точности оценки дистанции от частоты и скорости (а) — абсолютное значение, (б) — модуль относительной ошибки. Время наблюдения* $\Delta t = 120$ *с, дистанция* $r_0 = 25$ *км. Скорость v: кривая 1 — 2 м/с, кривая 2 — 5 м/с, кривая 3 — 10 м/с, кривая 4 — 15 м/с, кривая 5 — 20 м/с*

## Заключение

В работе продемонстрирована высокая эффективность применения интерферометрического подхода для оценки значения радиальной скорости и дистанции между источником и приемником. Высокая точность оценок доступна в широком диапазоне параметров источника — радиальной скорости (от 2 до 20 м/с) его движения и дистанции (от 5 до 100 км) между приемником и источником. На стороне приемника для эффективной работы метода выявлены следующие универсальные диапазоны параметров: центральная частота от 200 до 300 Гц для полосы в 50 Гц; время наблюдения 120–240 с для оценки скорости, 60–120 с для оценки дистанции.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

## Литература

1. *Чупров С. Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // Акустика океана. Современное состояние / Под ред. Л. М. Бреховских и И. Б. Андреевой. – М. : Наука, 1982. – С. 71–91.

2. *Weston D., Stevens K.* Interference of wide-band sound in shallow water // J. Sound Vibr. – 1972. – V. 21, № 1. – P. 57–64.

3. *Kuperman W. A., D'Spain G. L.* Ocean acoustic interference phenomena and signal processing, Ocean Acoust. Interfer. Phenom. Signal Process. – 2002. – P. 621.

4. *Бреховских Л. М.* Теоретические основы акустики океана / Л. М. Бреховских, Ю. П. Лысанов. – М. : Наука, 2007. – 370 с.

5. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

6. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Голографические методы обработки гидроакустических сигналов (Обзор) // Акуст. журн. – 2025. – Т. 71, № 1. – С. 96–117.

7. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

8. *Ehrhardt M., Pereselkov S., Kuz'kin V., Kaznacheev I., Rybyanets P.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

9. *Глущенко М. Ю., Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Хворостов Ю. А., Ткаченко С. А.* Голографический метод идентификации шумового подводного источника в мелком море // Акуст. журн. – 2024. – Т. 70, № 3. – С. 67–77.

10. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Matvienko Y., Tkachenko S., Rybyanets P.* The Formation of 2D Holograms of a Noise Source and Bearing Estimation by a Vector Scalar Receiver in the High-Frequency Band. // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – 12. – 704.

11. *Казначеев И. В., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

12. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kaznacheev I. V., Grigor'ev V. A.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. – 2017. – Vol. 25, No 4. – P. 299–306.

13. *Переселков С. А., Кузькин В. М., Кузнецов Г. Н., Просовецкий Д. Ю., Ткаченко С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов // Акуст. журн. – 2020. – Т. 66, № 4. – С. 437–445.

14. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Куцов М. В., Переселков С. А.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне // Изв. РАН. Сер. физ. – 2021. – Т. 85, № 6. – С. 907–912.

15. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Zvyagin V. G., Malykhin Yu. A., Prosovetskiy D. Yu.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 2. – P. 160–167.

16. *Badiey M., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu., Tkachenko S. A.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II. Phys. Wave Phenom. – 2019. – 27(4). – P. 313–319.

17. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204.

18. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Ладыкин Н. В., Куцов М. В.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

19. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 1922.

20. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Influence of Intense Internal Waves Traveling Along an Acoustic Path on Source Holographic Reconstruction in Shallow Water. // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – 13. – P. 1409.

21. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt, M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Effects of Irregular Bathymetry on Hologram Formation of Moving Source in ShallowWater. // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – 13. – P. 1775.

22. *Беседина Т. Н., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Определение глубины источника звука в мелком море на фоне интенсивного шума // Акуст. журн. – 2015. – Т. 61, № 6. – С. 718–728.

23. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Wave method for estimating the sound source depth in a oceanic waveguide // Phys. Wave Phenom. – 2016. – Vol. 24, No 4. – P. 310–316.

24. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А.* Обнаружение источника в диспергирующих средах // РЭНСИТ. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

25. *Матвиенко Ю. В., Кузькин В. М., Переселков С. А., Ладыкин Н. В., Грачев В. И.* Обнаружение и локализация шумового подводного источника в мелководной акватории на фоне интенсивного судоходства // РЭНСИТ. – 2025. – Т. 17, № 2. – С. 211–220.

26. *Kuz'kin V. M., Kuznetsov G. N., Pereselkov S. A., Grigor'ev V. A.* Resolving power of the interferometric method of source localization // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

27. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

28. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. A.* Resolution of hydroacoustic noise signals under conditions of spatial-temporal variability of ocean environment // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 4. – P. 290–299.

29. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kuznetsov G. N., Kaznacheev I. V.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

30. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Direction finding of a noise sound source // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 3. – P. 237–241.

31. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Логачев В. В., Косенко И. М.* Голографический метод обработки гидроакустических сигналов высокочастотного источника в мелком море // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 545–554.

32. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Tkachenko S. A.* Adaptive algorithms for interferometric processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 267–273.

33. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. F.* Adaptive method for holographic processing of broadband hydroacoustic signals // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 5. – P. 382–391.

34. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Адаптивный алгоритм локализации шумовых подводных источников в мелководных акваториях // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 533–544.

35. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Prosovetskii D. Yu., Kaznacheeva E. S.* Mode selection in oceanic waveguides // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, No 2. – P. 111–118.

36. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Kaznacheeva E. S., Tkachenko S. A.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, No 5. – P. 314–320.

37. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 279–286.

38. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Application of Fractional Fourier Transform to Hologram Formation of a Moving Acoustic Source. // J. Fractal Fract. – 2025. – Vol. 9. – P. 715.

39. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Use of interference patterns to control sound field focusing in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 559.

УДК 519.6

# ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ФИЛЬТРАЦИИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

**В. А. Башкарев[1], С. А. Переселков[1], В. М. Кузькин[2], Н. В. Ладыкин[1], А. С. Переселков[1]**

*[1]Воронежский государственный университет*
*[2]Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук*

**Аннотация.** На основе интерферометрического подхода рассмотрена фильтрация полезного сигнала в условиях высокого уровня аддитивных помех. Методом численного эксперимента оценивается эффективность подхода для широкого диапазона параметров приемника (частот и времени наблюдения) и источника (дистанций и значений скорости) при различных значениях отношения сигнал/помеха. Полученные результаты обосновывают эффективный способ фильтрации полезного сигнала при существенно неблагоприятной помеховой обстановке.
**Ключевые слова:** фильтрация, интерферометрический метод, гидроакустический волновод, интерферограмма, голограмма, функция углового распределения, отношение сигнал/помеха.

## Введение

Интерферометрическая обработка сигналов (ИОС) [1–6] — перспективный метод подводной акустики, альтернативный согласованному полю [7–10]. Он основан на формировании устойчивой интерференционной картины широкополосного излучения в океаническом волноводе [1,2]. Интерференционные структуры, возникающие при взаимодействии нормальных мод, проявляются в частотно-пространственном и временно-частотном представлениях. Ключевые теоретические основы заложены С.Д. Чупровым, введшим понятие волноводного инварианта [1]; дальнейшие исследования [3–6] расширили потенциал ИОС в задачах анализа звукового поля и параметров среды. Одним из наиболее развитых направлений является голографическая обработка сигналов (ГОС) [7–35]. Теория формирования голограмм представлена в [7–11]; в [9] метод распространён на шумовые источники, в [10,11] — на низкие частоты в регулярных волноводах. Работы [12,13] посвящены повышению разрешения, [14–21] — устойчивости при внутренних волнах, [22–24] — адаптивным вариантам, [25–27] — применению в антеннах. Модовая селекция в мелководье рассматривалась в [28–30]. Большинство исследований [7–30] ограничивались скалярным давлением в низкочастотной области. Однако современные задачи требуют регистрации также компонент скорости звука, что ведёт к использованию векторно-скалярных приёмников (ВСП) в высокочастотном диапазоне [31–35], существенно расширяющих информативность и точность восстановления параметров источников и среды.

Подходы к построению эффективных фильтров для выделения информационных составляющих или подавления помех разнообразны. Априорная информация об особенностях сигнала и помех позволяет проектировать наиболее эффективные фильтры. Применение интерферометрического подхода позволяет усилить полезную компоненту входного сигнала, она коррелирована и накапливается квазикогерентно, и подавить помеховую из-за ее некоррелированности.

В настоящей работе рассматривается подход к построению полосового либо режекторного фильтра, дается оценка эффективности работы для случая регулярного океанического волновода по критерию улучшения отношения сигнал/помеха на выходе фильтра по отно-

шению ко входу. В основу работы фильтра положен интерферометрический подход с использованием априорной информации о характере положения фокальных пятен, мест локализации энергии полезного сигнала на голограмме — двумерной спектральной плотности интерферограммы сигнала.

Алгоритм фильтрации следующий.

1) Формирование интерферограммы (интерференционной картины гидроакустического сигнала) в координатах время-частота

$$I(f,t) = P(f,t)P^*(f,t), \tag{1}$$

где $P(f,t)$ давление звукового поля в точки приема.

2) Получение голограммы (двумерной спектральной плотности $I(f,t)$) $F(\tau,v)$ применением к интерферограмме двумерного преобразования Фурье,

$$F(\tau,v) = \int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} \tilde{I}(f,t)\exp[i2\pi(vt - f\tau)]dfdt, \tag{2}$$

здесь $v$ и $\tau$ — частота и время голограммы, соответствующие времени $t$ и частоте $f$ на интерферограмме. На голограмме особенности характера накопления полезного сигнала и помеховой составляющей проявляются в формировании групп максимумов спектральной плотности в виде фокальных пятен, расположенных в узкой полосе, проходящей через начало координат.

3) Расчет функции углового распределения спектральной плотности голограммы (функция обнаружения) $G(\chi)$, которая представляет собой зависимость интегрального значения спектральной плотности, рассчитанного вдоль луча, исходящего из начала координат, в зависимости от тангенса угла этого луча:

$$G(\chi) = \int_0^{\Delta\tau} \left|F(\tau,\chi\tau)\right| d\tau, \tag{3}$$

4) По результатам анализа нормированной в диапазон (0, +1) функции обнаружения рассчитывается фильтр — это матрица из 0 и 1 для вырезания узкой полосы на голограмме. В полосу попадают фокальные пятна, которые являются продуктом квазикогерентного накопления энергии полезного сигнала, равномерно распределенной по всей голограмме, энергия помеховой составляющей отфильтровывается. Угол наклона полосы определяется по максимуму функции обнаружения, ширина полосы рассчитывается по ближайшим к максимуму значениям функции обнаружения, где ее значение снижаются до 0.5.

5) Фильтрация, произведение голограммы на входе фильтра на матрицу фильтра.

6) Применение к отфильтрованной голограмме обратного двумерного преобразования Фурье, получение очищенной от помех интерферограммы входного сигнала.

## 1. Численный эксперимент

Моделирование проводилось для регулярного океанического волновода с постоянным профилем скорости звука по глубине равным 1500 м/с. Использовались все возможные комбинации из следующих значений сигнальной и акустической обстановки.

1) Отношение сигнал/помеха (по мощности) на входе: 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1.0, 10.0.

2) Глубина волновода 50 м, приемника 48 м, источника 10 м.

3) Дистанция между приемником и источником: 3 км, 5 км, 10 км, 25 км, 50 км, 100 км.

4) Источник радиально удаляется от приемника с постоянной скоростью: 0 м/с, 2 м/с, 5 м/с, 10 м/с, 15 м/с, 20 м/с.

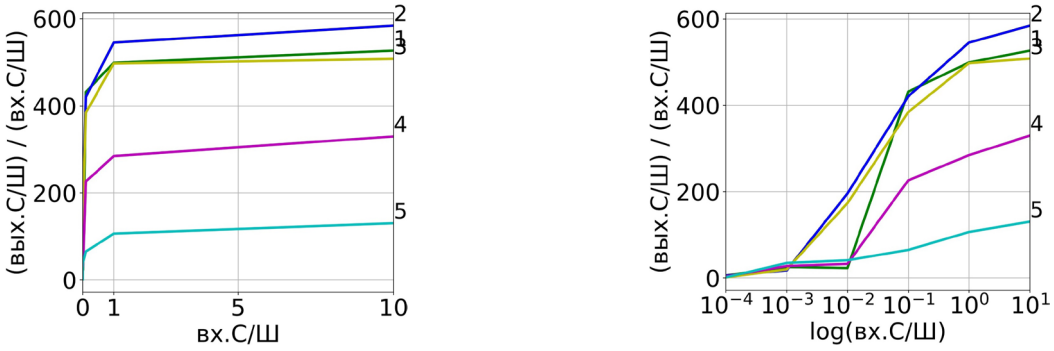
5) Время наблюдения (накопления): 30 с, 60 с, 120 с, 240 с, 600 с.

6) Полосы частот: 100–150 Гц, 300–350 Гц, 500–550 Гц, 700–750 Гц, 900–950 Гц.

На основе модового подхода [4] рассчитывалась интерферограмма полезного сигнала в точки приема. Исходя из множества значений отношения сигнал/помеха входного сигнала формировалась интерферограмма помеховой составляющей (как среднее по тридцати реализациям случайного процесса). Суммарная интерферограмма входного сигнала использовалась для формирования голограммы и функции обнаружения, из которой рассчитывалась матрица фильтра. Матрица фильтра раздельно применялась к голограмме только полезного сигнала и голограмме только помеховой составляющей, которые обратным двумерным преобразованием Фурье возвращали нас к интерферограмам полезного сигнала и помеховой составляющей после фильтрации. Полученные таким образом интерферограммы использовались для расчета отношения сигнал/помеха после процедуры фильтрации и затем производилось сравнение с соответствующим значением отношения сигнал/помеха на входе фильтра.

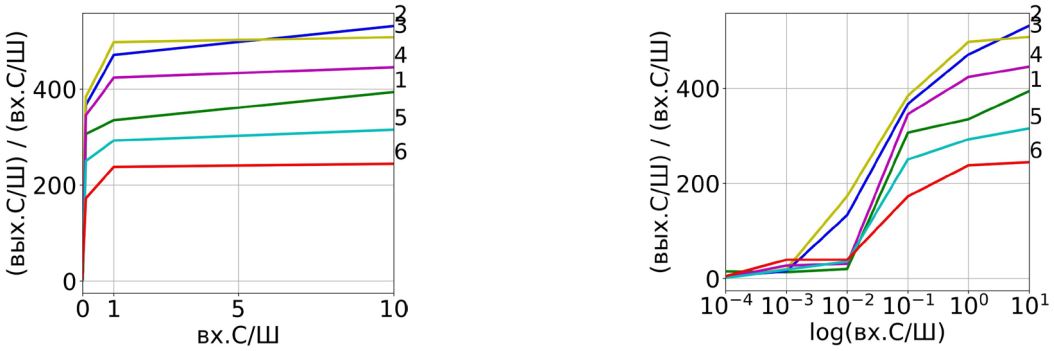
## 2. Результаты численного эксперимента

Семейство кривых на рис. 1 демонстрирует влияние времени наблюдения на эффективность работы фильтра.




*(а)* *(б)*

*Рис. 1. Эффективности работы фильтра от входного отношения сигнал/помеха, зависимость от времени наблюдения. (а) линейный и (б) логарифмический масштаб входного С/Ш. Дистанция $r_0 = 10$ км, скорость $v = 5$ м/с, частота $\Delta f = 100 - 150$ Гц. Время наблюдения $\Delta t$: кривая 1 — 30 с, кривая 2 — 60 с, кривая 3 — 120 с, кривая 4 — 240 с, кривая 5 — 600 с*

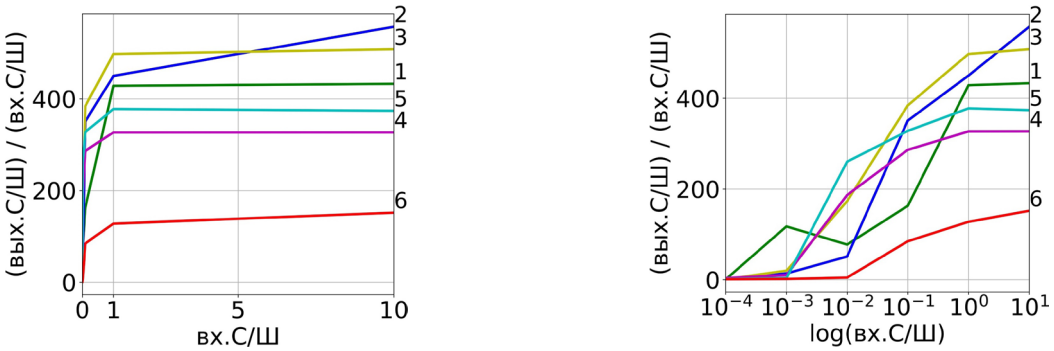



*(а)* *(б)*

*Рис. 2. Эффективности работы фильтра от входного отношения сигнал/помеха, зависимость от скорости источника. (а) линейный и (б) логарифмический масштаб входного С/Ш. Время наблюдения $\Delta t = 120$ с, дистанция $r_0 = 10$ км, частота $\Delta f = 100 - 150$ Гц. Скорость v: кривая 1 — 0 м/с, кривая 2 — 2 м/с, кривая 3 — 5 м/с, кривая 4 — 10 м/с, кривая 5 — 15 м/с, 6 — 20 м/с*

Универсальным значением времени наблюдения является интервал в 60 с. Значения 30 с и 120 с также обеспечивают хороший результат. Интервалы наблюдения в 240 с и 600 с дают худший результат, что объясняется эффектом «смазывания» интерференционной картины из-за движения источника. Зависимость эффективности работы фильтра от скорости источника представлены на рис. 2. Наблюдается ухудшение качества работы фильтра с ростом скорости источника, при этом средние показатели эффективности достигаются при его неподвижности.

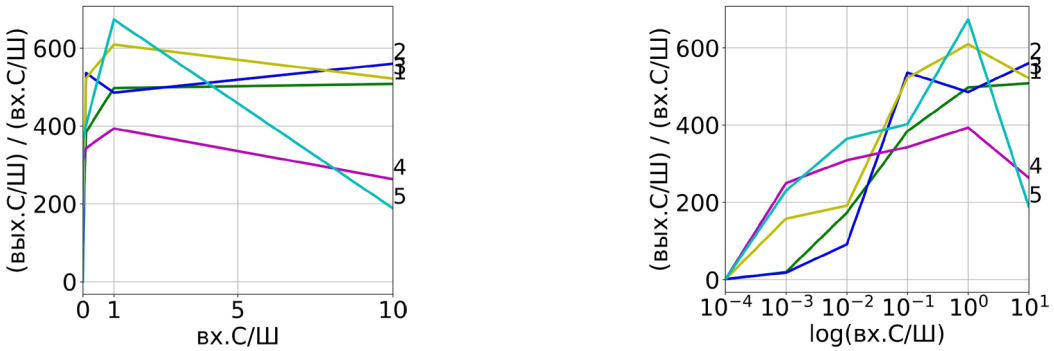
По рис. 3 можно выяснить качество работы предлагаемого фильтра в зависимости от дистанции между приемником и источником. Согласно него наблюдается кратное ухудшение работы фильтра с ростом дистанции.




*(а)* *(б)*

*Рис. 3. Эффективности работы фильтра от входного отношения сигнал/помеха, зависимость от начальной дистанции между приемником и источником. (а) линейный и (б) логарифмический масштаб входного С/Ш. Время наблюдения $\Delta t = 120$ с, скорость $v = 5$ м/с, частота $\Delta f = 100 - 150$ Гц. Дистанция $r_0$: кривая 1 — 3 км, 2 — 5 км, кривая 3 — 10 км, кривая 4 — 25 км, кривая 5 — 50 км, кривая 6 — 100 км*

Частотная закономерность качества работы фильтра представлена на рис. 4. Согласно него сделать однозначный вывод об эффективности использования определенного частотного диапазона не представляется возможным. Кривые, соответствующие различным полосам частот расположены достаточно плотно и многократно пересекаются. Для практики можно принять, что предлагаемый фильтр будет сопоставимо эффективно работать в широком диапазоне частот.




*(а)* *(б)*

*Рис. 4. Эффективности работы фильтра от входного отношения сигнал/помеха, зависимость от полосы частот. (а) линейный и (б) логарифмический масштаб входного С/Ш. Время наблюдения $\Delta t = 120$ с, скорость $v = 5$ м/с, дистанция $r_0 = 10$ км. Частота $\Delta f$: кривая 1 — 100–150 Гц, кривая 2 — 300–350 Гц, кривая 3 — 500–550 Гц, кривая 4 — 700–750 Гц, кривая 5 — 900–950 Гц*

Каждый из представленных рисунков демонстрирует зависимость улучшения отношения сигнал/помеха на выходе фильтра по отношению к входному отношению в сотни раз, устойчивое улучшение наблюдается со значения отношения сигнал/помеха 0.1, а при некоторых сочетаниях параметров с 0.01. Полученные результаты подтверждают высокую эффективность работы фильтра. При меньших чем 0.001 входных отношениях сигнал/помеха улучшения не превышают десятков раз. Однако и такие скромные результаты могут оказаться полезным при решении практических задач в крайне неблагоприятных помеховых условиях при отсутствии более эффективных способов обработки.

## Заключение

В работе продемонстрирована высокая эффективность фильтрации зашумленного аддитивной гауссовой помехой входного гидроакустического сигнала с использованием интерферометрического подхода. Показано, что при входном значении отношения сигал/помеха, равном или превышающем 0.1 наблюдается устойчивое улучшение отношения сигнал/помеха в сотни раз (от 100 до 400) для самого разнообразного сочетания параметров акустической обстановки.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

## Литература

1. *Чупров С. Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане. В книге: Акустика океана. Современное состояние. – Москва : Наука, 1982. – С. 71–91.

2. *Weston D., Stevens K.* Interference of wide-band sound in shallow water // J. Sound Vibr. – 1972. – 21(2). – P. 57–64.

3. *Грачев Г.* Теория инвариантов акустического поля в слоистых волноводах // Акуст. физ. – 1993. – 39(1). – P. 67–71.

4. *Орлов Е. Ф., Шаронов Г. А.* Интерференция звуковых волн в океане. – Дальнаука, 1998.

5. *Ianniello J.* Recent developments in sonar signal processing // IEEE Signal Proc. Mag. – 1998. – 15(1). P. 27–40.

6. *Kuperman W. A., D'Spain G. L.* Ocean acoustic interference phenomena and signal processing // In: Ocean Acoustic Interference Phenomena and Signal Processing; American Institute of Physics, San-Francisco, 2002.

7. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Кузнецов Г. Н.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелководном море // Акустический журнал. – 2017. – 63(4). – P. 406–418.

8. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А.* Обнаружение источника в диспергирующих средах // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2019. – 11(3). – P. 337–344.

9. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Matvienko Y. V., Lyakhov G. A., Tkachenko S. A.* Noise source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. – 28(1). P. 68–74.

10. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – 151. – P. 666–676.

11. *Ehrhardt M., Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M., Kaznacheev I., Rybyanets P.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // J. Sound Vibr. – 2023. – 544. – 117388.

12. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kuznetsov G. N., Grigor'ev V. A.* Resolving power of the interferometric method of source localization // Phys. Wave Phenom. – 2018. – 26(2). – P. 150–159.

13. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2024. – 16(3). – P. 395–406.

14. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Zvyagin V. G., Malykhin Yu. A., Prosovetskiy D. Yu.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Physics of Wave Phenomena. – 2018. – 26(2). – P. 160–167.

15. *Badiey M., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu., Tkachenko S. A.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf // Part II. Phys. Wave Phenom. – 2019. – 27(4). – P. 313–319.

16. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves // Physics of Wave Phenomena. – 2021. – 29(3). – P. 278–284.

17. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Badiey M., Ladykin N. V., Malykhin A. Yu., Tkachenko S. A.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves // Physics of Wave Phenomena. – 2023. – 31(5). – P. 346–354.

18. *Badiey M., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A.* Interferometry of hydrodynamics of oceanic shelf caused by intensive internal waves // Fundam. Appl. Hydrophys. – 2020. – 1. – P. 45–55.

19. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – 14(2). – P. 197–204.

20. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Ладыкин Н. В., Куцов М. В.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – 15(3). – P. 317–326.

21. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – 11. – 1922.

22. *Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С.* Интерферометрическая обработка с использованием вертикальной линейной антенны // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 2. – С. 14–23.

23. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Ткаченко С. А., Казначеев И. В.* Реализация адаптивного интерферометрического метода локализации источника звука. II часть // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 1. – С. 14–23.

24. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Lyakhov G., Tkachenko S., Kaznacheeva E.* Adaptive Algorithms for Interferometric Processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. No 28. – P. 267–273.

25. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Lyakhov G., Tkachenko S., Kaznacheeva E.* Adaptive algorithms for interferometric processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. – 28(3). – P. 267–273.

26. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Ткаченко С. А., Казначеев И. В.* Интерферометрическая обработка акустической информации с использованием протяженных антенн в диспергирующих средах // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2020. – 12(4). – P. 483–494.

27. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А., Просовецкий Д. Ю.* Обнаружение шумового сигнала в океаническом волноводе горизонтальной антенной // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – 14(1). – С. 65–72.

28. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Prosovetskii D. Yu., Kaznacheeva E. S.* Mode selection in oceanic waveguides // Physics of Wave Phenomena. – 2022. – 30(2). – P. 111–118.

29. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Kaznacheeva E. S., Tkachenko S. A.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves // Physics of Wave Phenomena. – 2022. – 30(5). – P. 314–320.

30. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – 14(3). – P. 279–286.

31. *Казначеев И. В., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. – 2018. – 64(1). – С. 33–45.

32. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kaznacheev I. V., Grigor'ev V. A.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. – 2017. – 25(4). – P. 299–306.

33. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kuznetsov G. N., Kaznacheev I. V.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver // Physics of Wave Phenomena. – 2018. – 26(1). – P. 63–73.

34. *Переселков С. А., Кузькин В. М., Кузнецов Г. Н., Просовецкий Д. Ю., Ткаченко С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов // Акустический журнал. – 2020. – 66(4). – P. 437–445.

35. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Куцов М. В., Переселков С. А.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне // Известия РАН. Серия физическая. – 2021. – 85(6). – P. 907–912.

УДК 004.942

# АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

**А. М. Бирюкова**

*Университет Иннополис*

**Аннотация.** В работе рассматривается задача идентификации параметров электрической цепи в условиях стохастических возмущений. Предложена дискретная стохастическая модель цепи в пространстве состояний и разработан алгоритм совместной оценки вектора состояния и неизвестных параметров на основе расширенного фильтра Калмана. Проведено компьютерное моделирование с использованием языка Python, включая сравнительный анализ с результатами, полученными в пакете Proteus.
**Ключевые слова:** идентификации параметров, стохастическая модель, расширенный фильтр Калмана, математическая модель, компьютерное моделирование.

## Введение

Современные задачи управления и диагностики технических систем, включая электронные устройства и энергетические компоненты, требуют построения адекватных математических моделей, учитывающих неопределенность и шумы [1– 3]. Одной из ключевых задач при этом является параметрическая идентификация — определение неизвестных характеристик системы по входным и выходным данным.

В данной работе в качестве объекта исследования выбрана параллельная $RLC$-цепь — классическая динамическая система второго порядка, широко используемая в радиотехнике, автоматике и энергетике. Целью исследования является разработка и программная реализация алгоритма идентификации параметров $R$, $L$ и $C$ на основе расширенного фильтра Калмана (РФК), способного работать с нелинейными стохастическими моделями.

## 1. Математическое моделирование

### *1.1. Детерминистская модель*

На основе законов Кирхгофа и базовых соотношений для пассивных элементов — резистора, катушки индуктивности и конденсатора — была составлена система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая динамику электрической цепи. В качестве переменных состояния выбраны ток через индуктивность $I$ и напряжение на конденсаторе $U$. Внешнее воздействие обозначено как $r(t)$:

$$\dot{x} = Fx + Br(t),$$
$$z(t) = Hx,$$

где вектор состояния x состоит из $I$ и $U$, а матрицы $F$, $B$ и $H$ определяются параметрами цепи — индуктивностью $L$, емкостью $C$ и сопротивлением $R$.

Соответствующая передаточная функция, связывающая входное воздействие и выходную переменную (напряжение на конденсаторе), представляет собой дробно-рациональное выражение второго порядка, характерное для колебательного звена:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}.$$

### *1.2. Стохастическая дискретная модель*

Для учета случайных возмущений вводятся аддитивные гауссовские шумы процесса $w(t)$ и измерений $v(t)$. После дискретизации с шагом $\tau = t_{i+1} - t_i$ получаем:

$$x(t_{i+1}) = \Phi(\tau)x(t_i) + B_d(\tau)u(t_i) + G_d w_d(t_i),\ \ x(t_0) = x_0$$
$$z(t_i) = H(t_i)x(t_i) + v(t_i),\ \ i = 1,2,....$$

Анализ управляемости, наблюдаемости и устойчивости показал, что при положительных значениях $R, L, C$ система полностью управляема, наблюдаема и асимптотически устойчива [5].

### *1.3. Алгоритм идентификации на основе расширенного фильтра Калмана*

Поскольку параметры $R,\ L,\ C$ неизвестны, они включаются в расширенный вектор состояния и их динамика описывается как:

$$x(t_i) = \begin{bmatrix} x_1(t_i) \\ x_2(t_i) \\ R(t_i) \\ L(t_i) \\ C(t_i) \end{bmatrix}.$$

$$R(t_{i+1}) = R(t_i) = \text{const},\ \ L(t_{i+1}) = L(t_i) = \text{const},\ \ C(t_{i+1}) = C(t_i) = \text{const}.$$

Таким образом, получаем нелинейную дискретную систему, к которой применим РФК. На каждом шаге вычисляется матрица Якоби [6]:

$$F = \frac{\partial \Phi(\tau)x}{\partial x},$$

где

$$F = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial R}x_1 + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial R}x_2 & \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial C}x_1 + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial C}x_2 & \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial L}x_1 + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial L}x_2 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial R}x_1 + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial R}x_2 & \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial C}x_1 + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial C}x_2 & \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial L}x_1 + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial L}x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22}$ — нелинейные функции от $\Phi_*(\tau)$.

Алгоритм РФК включает этапы:

1. Прогноз состояния:

$$\hat{x}(t_i^-) = f(\hat{x}(t_{i-1}^-), u(t_{i-1})).$$

2. Матрица Якоби (линеаризация):

$$F(t_i) = \frac{\partial \Phi(\tau)x}{\partial x}\Big|_{x=\hat{x}(t_i^-)}.$$

3. Прогноз ковариационной матрицы ошибки:

$$P(t_i^-) = F(t_i)P(t_i)F^T(t_i) + Q(t_i),\quad i = 0,1,2,...$$

4. Вычисление коэффициента усиления Калмана:

$$K(t_i) = P(t_i^-)H^T(HP(t_i^-)H^T + R)^{-1}.$$

5. Коррекция оценки состояния и ковариационной матрицы:

$$\hat{x}(t_i) = \hat{x}(t_i^-) + K(t_i)(z(t_i) - H\hat{x}(t_i^-)),$$

$$P(t_i) = (I - K(t_i)H)P(t_i^-).$$

Вычислительная сложность алгоритма оценивается как $O(Kp^3)$, где $K$ — число шагов, $p = 5$ размер расширенного вектора.

## 2. Компьютерный эксперимент

### *2.1. Описание экспериментальных данных и эксперимента*

С целью проведения компьютерного моделирования разработано программное приложение на Python с графическим интерфейсом (Tkinter) и визуализацией (Matplotlib). Реализованы два режима:

- Оценка состояния при известных параметрах (стандартный фильтр Калмана);
- Совместная оценка состояния и параметров (РФК).

По умолчанию в графическом интерфейсе для обеих моделей заданы следующие параметры: число итераций — 100, $R = 1.0$, $L = 1.0$, $C = 1.0$, интенсивность шума процесса $q$, ковариация шума измерений $R$. Для расширенной модели дополнительно задаются дисперсии ошибок: для тока и напряжения — 0.1, для параметров $R$, $L$, $C$ — 0.001.

В программной реализации использованы:

1. 100 независимых запусков моделирования;
2. Шаг дискретизации $\tau = 0.1$;
3. Начальные оценки состояния: $I(0) = 0.3$, $U(0) = 0.7$;
4. Начальные значения параметров — истинные значения с нормальным случайным отклонением ($\mu = 0$, $\sigma = 0.1$);
5. Входное воздействие: $u(k) = A\sin(\omega k + \varphi)$, где $A = 0.5$, $\omega = 0.1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

### *2.2. Метрики*

Результаты усреднены по всем запускам и представлены в табл. 1 и 2. Смещение оценок определялось как разность между средним значением оценок и истинным значением параметра.

Таблица 1

*Оценка состояния (ФК)*

| | **RMSE** | **MSE** | **MAE** | **MAPE, %** |
|---|---|---|---|---|
| $I$ | 0.0010 | 0.00010 | 0.0003 | 0.2460 |
| $U$ | 0.0006 | 0.00004 | 0.0003 | 1.9820 |

Таблица 2

*Оценка состояния и параметров (РФК)*

| | **RMSE** | **MSE** | **MAE** | **MAPE, %** |
|---|---|---|---|---|
| $I$ | 0.0053 | 0.00028 | 0.0024 | 1.8227 |
| $U$ | 0.0038 | 0.00015 | 0.0025 | 6.9407 |
| $R$ | 0.0009 | 0.00001 | 0.0004 | 0.0313 |
| $L$ | 0.0005 | 0.000003 | 0.0003 | 0.0260 |
| $C$ | 0.00109 | 0.000019 | 0.00014 | 0.0135 |

### *2.3. Результаты компьютерного моделирования*

Проведенный анализ результатов компьютерного моделирования показал, что стандартный фильтр Калмана обеспечивает более точную оценку состояния $(I, U)$, поскольку не решает задачу идентификации параметров. РФК, напротив, одновременно оценивает и состояние, и параметры $R$, $L$, $C$, что приводит к росту ошибок состояния, но обеспечивает высокую точность идентификации: MAPE < 0.05 % для всех параметров. Наилучшая сходимость наблюдается для емкости $C$. Точность обоих методов существенно зависит от ковариаций шумов, определяемых матрицами $R$ (скалярная $1 \times 1$) и $Q$ (зависит от интенсивности процесса $q$). Проверка адекватности модели проведена путем сравнения полученных результатов с результатами имитационного моделирования в системе Proteus [7].

Проведенные исследования позволили разработать и реализовать программный продукт, предназначенный для решения задачи параметрической идентификации стохастической системы на примере $RLC$-цепи. Созданная компьютерная модель адекватно отражает динамику системы с учетом случайных возмущений, что подтверждается результатами имитационного моделирования. Программная реализация алгоритма идентификации параметров модели продемонстрировала свою эффективность при работе с зашумленными данными, при этом сравнительный анализ двух подходов к фильтрации (фильтр Калмана и расширенный фильтр Калмана) позволил выявить оптимальный метод для различных условий.

## Заключение

Показана применимость РФК для идентификации параметров модели в условиях неопределенности, когда присутствует шумы в процессе и измерениях, а также имеются неизвестные параметры математической модели. Программная реализация на Python обеспечивает гибкость, наглядность и высокую точность даже в условиях шумов.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения предложенного подхода для диагностики и мониторинга реальных электротехнических систем, таких как аккумуляторы, фильтры и источники питания. В перспективе планируется расширение функционала за счет интеграции других нелинейных фильтров и поддержки произвольных динамических моделей.

## Литература

1. *Gammaitoni L., Bulsara A. R.* Noise Activated Nonlinear Dynamic Sensors // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 88. – P. 230601. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.230601. – URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.230601 (дата обращения: 05.10.2025).

2. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления / пер. с англ. Б. И. Копылова. – Москва : Лаборатория Базовых Знаний, 2004. – 831 с.

3. *Мишина А. А.* Моделирование и его основные понятия, математическое моделирование // Сборник материалов международных научно-практических конференций / под ред. А. А. Коротких. – Москва, 2018. – С. 429–433.

4. *Филиповский В. М.* Системы управления в пространстве состояний : учеб. пособие. – Санкт-Петербург, 2022. – 75 с. – URL: https://elib.spbstu.ru/dl/5/tr/2022/tr22-20.pdf/download/tr22-20.pdf (дата обращения: 05.10.2025).

5. *Семушин И. В., Цыганова Ю. В.* Стохастические модели, оценки и управление. – Ульяновск : УлГУ, 2007. – 57 с. – URL: https://staff.ulsu.ru/semushin/_index/_pilocus/_gist/docs/mycourseware/13-stochmod/2-reading/det_models-of_dyn-sys=cut.pdf (дата обращения: 05.10.2025).

6. *Митришкин Ю. В.* Линейные модели управляемых динамических систем : учеб. пособие : в 2 ч. – Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – 222 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/106305 (дата обращения: 05.10.2025). – Режим доступа: по подписке.

7. *Васьков А. С., Смирнов Б. И.* Использование пакета Proteus для проектирования виртуальных моделей микропроцессорных устройств // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2013. – № 2. – С. 38–43. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-paketa-proteus-dlya-proektirovaniya-virtualnyh-modeley-mikroprotsessornyh-ustroystv (дата обращения: 05.10.2025).

УДК 539.374

# К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

**А. А. Верлин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В рамках теории малых деформаций рассматривается упругопластическое состояние быстровращающегося тонком диска. Показано, что при выборе кусочно-линейных функций пластичности сингулярные режимы выполняются на границе раздела областей, в которых реализуются регулярные режимы пластичности. Установлено, что при увеличении параметра нагрузки происходит смещение границы выполнения сингулярного режима. В процессе нагружения в пластической области изменение положения границы между зонами выполнения регулярных режимов мало, в работе вместо ассоциированного закона пластического течения выбирается ассоциированный закон пластического деформирования. При определении напряженного и деформированного состояния диска рассматривается степенное условие пластичности Карафиллиса-Бойса, которое является одним из обобщений условия пластичности Мизеса, а также при увеличении показателя степени компонент девиатора напряжений переходит в условие пластичности Ишлинского. Приведены графики напряжений, перемещений, деформаций и годографа вектора напряжений.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, плоское напряженное состояние, вращающиеся диски, упругопластическое тело, условие пластичности Карафиллиса-Бойса, ассоциированный закон пластического деформирования, годограф вектора напряжений, вычислительный эксперимент.

## Введение

Выбор кусочно-линейных функций пластичности для идеально пластического тела позволяет получить аналитическое решение задачи о диске, а выбор гладких функций пластичности, в общем случае, приводит к необходимости численного решения. При этом следует отметить, что для регулярных режимов кусочно-линейных условий пластичности соотношения ассоциированного закона пластического течения интегрируются и переходят в соотношения ассоциированного закона пластического деформирования, а для сингулярных режимов эта процедура не имеет место.

При рассмотрении сплошных и кольцевых дисков под действием только сил инерции в статье [1] выполнено сравнение напряженного состояния для условий пластичности Треска и Мизеса. Отмечается, что для условия Треска, когда диск полностью переходит в пластическое состояние, значение параметра нагрузки меньше, чем для условия Мизеса. Определение напряженного и деформированного состояния вращающегося диска для условия Мизеса приведено в [2]; выполнено сравнение полей напряжений и перемещений, полученных в рамках теории пластического течения и деформационной теории. Влияние пластической сжимаемости на упругопластическое состояние вращающегося диска рассмотрено в [3]. Границы зарождения пластических областей для разных условий пластичности рассматривались в [4]. В ряде работ изучалось упругопластическое состояние дисков переменной толщины. В [5] рассматривался вопрос об определении профиля равнопрочного кольцевого диска для условия Мизеса. В настоящей работе предлагается алгоритм определения напряженного и деформированного состояния вращающихся дисков при выборе гладких функций пластичности.

## 1. Постановка задачи

В рамках теории малых деформаций рассматривается упругопластическое квазистатическое состояние быстровращающегося тонкого кругового диска постоянной толщины. Принимается, что материал диска является идеально упругопластическим, однородным и изотропным. Также принимается гипотеза о естественном состоянии диска и приближение плоского напряженного состояния, для которого все искомые величины являются осредненными по толщине диска. Все параметры материала, входящие в определяющие уравнения, рассматриваются как постоянные величины. Рассматривается цилиндрическая система координат $\rho\theta z$, ось $z$ которой проходит через центр диска $\rho = 0$, а плоскость $z = 0$ является средней плоскостью. Внешний контур диска $\rho = b$ свободен от усилий. На упругопластической границе и границах между областями, в которых реализуются разные режимы пластичности, выполняются условия непрерывности компонент тензора напряжений и вектора перемещений. При выполнении численных расчетов выбирается условие пластичности максимального приведенного напряжения [6] и степенное условие пластичности [7].

## 2. Безразмерные величины

В настоящей работе все соотношения и величины проводятся к безразмерному виду. За характерный масштаб величин, имеющих размерность напряжений, выбирается значение предела пластичности $k$ при одноосном растяжении, за масштаб длины выбирается значение радиус диска.

Перемещения и деформации умножаются на безразмерный модуль Юнга, что делает их величинами того же порядка, что и безразмерные напряжения.

## 3. Математическая модель

Математическая модель упругой области диска включает:

уравнение равновесия в собственной системе отсчета [2] (уравнение движения в инерциальной системе отсчета [8])

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho; \tag{1}$$

соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^e &= \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \\ E\varepsilon_\theta^e &= \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \\ E\varepsilon_z^e &= -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta); \end{aligned} \tag{2}$$

условие совместности полных деформаций

$$\rho\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0; \tag{3}$$

соотношения Коши, определяющие деформации через перемещения

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}; \tag{4}$$

связь пластических, полных и упругих деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho^p &= \varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^e, \\ \varepsilon_\theta^p &= \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^e, \\ \varepsilon_z^p &= \varepsilon_z - \varepsilon_z^e; \end{aligned} \tag{5}$$

условие пластичности

$$F(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z)\,|_{\sigma_z=0}=f(\sigma_\rho,\sigma_\theta)=0;$$

соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_i^p=d\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_i}\,|_{\sigma_{z=0}},\quad d\lambda\ge 0.$$

Если в начальном состоянии (до момента нагружения) в диске необратимые деформации равны нулю, то компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в упругой области диска определяются по формулам [9]

$$\begin{aligned}\sigma_\rho&=A-\frac{B}{\rho^2}-\frac{3+\nu}{8}m\rho^2,\\ \sigma_\theta&=A+\frac{B}{\rho^2}-\frac{1+3\nu}{8}m\rho^2,\\ Eu&=(1-\nu)A\rho+\frac{1+\nu}{\rho}B-\frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3.\end{aligned}\tag{6}$$

Если весь диск находится в упругом состоянии, то для граничных условий

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=0}=\sigma_\theta\,|_{\rho=0},\quad \sigma_\rho\,|_{\rho=b}=0,$$

на основании формул (6) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\rho^2\right),\\ \sigma_\theta&=\frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\rho^2\right),\\ Eu&=(1-\nu)\left(\frac{3+\nu}{8}b^2-\frac{1+\nu^2}{8}\rho^2\right)m\rho.\end{aligned}\tag{7}$$

Обычно в центре диска указывают условие $u\,|_{\rho=0}=0$. Условие $\sigma_\rho\,|_{\rho=0}=\sigma_\theta\,|_{\rho=0}$ является следствием симметрии поля напряжений в центре диска.

Если для всех условий пластичности выбран предел пластичности на одноосное растяжение $k$, то при увеличении нагрузки пластическая область зарождается в центре диска когда

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=0}=\sigma_\theta\,|_{\rho=0}=k.\tag{8}$$

Из (6), (8) находим условие зарождения пластической области в центре диска

$$m=m_0=\frac{8}{b^2}\frac{k+p_b}{3+\nu}.$$

## 4. Условие Ишлинского

Рассмотрим случай, когда выбирается условие пластичности Ишлинского и выполняется только один режим

$$\sigma_\rho+\sigma_\theta=2k.\tag{9}$$

Учитывая, что в центре диска выполняется условие (8), решая систему уравнений (1), (9) находим

$$\begin{aligned}\sigma_\rho&=k-\frac{m\rho^2}{4},\\ \sigma_\theta&=k+\frac{m\rho^2}{4}.\end{aligned}\tag{10}$$

Из соотношений ассоциированного закона пластического деформирования получаем дифференциальное уравнение для определения перемещений в пластической области

$$\frac{dEu}{d\rho}-\frac{Eu}{\rho}+\frac{1+\nu}{2}m\rho^2=0. \tag{11}$$

Решая уравнение (11), находим

$$Eu=\left(C-\frac{1+\nu}{4}m\rho^2\right)\rho. \tag{12}$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе следует, что

$$C=\frac{1+\nu}{4}mc^2+(1-\nu)k. \tag{13}$$

Учитывая (13) формула (12) примет вид

$$Eu=\left(\frac{1+\nu}{2}m\left(2c^2-\rho^2\right)+\left(1-\nu\right)k\right)\rho.$$

Пластические деформации

$$E\varepsilon_\rho^p=E\varepsilon_\theta^p=\frac{1+\nu}{2}m(c^2-\rho^2),$$

$$\varepsilon_z^p=-2\varepsilon_\theta^p.$$

На упругопластической границе $\rho=c$ из (11) следует, что

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=c}=k-\frac{mc^2}{4},$$

$$\sigma_\theta\,|_{\rho=c}=k+\frac{mc^2}{4}.$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c}=0,\quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c}=0$$

определяем величины $A, B$ в формулах (6)

$$A=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2,\quad B=\frac{1+\nu}{8}mc^4.$$

Поэтому напряжения в упругой области

$$\sigma_\rho=k+\frac{1+\nu}{4}\left(1-\frac{c^2}{2\rho^2}\right)mc^2-\frac{3+\nu}{8}m\rho^2,$$

$$\sigma_\theta=k+\frac{1+\nu}{4}\left(1+\frac{c^2}{2\rho^2}\right)mc^2-\frac{1+3\nu}{8}m\rho^2.$$

Если на границе $\rho=b$ задано условие $\sigma_\rho\,|_{\rho=b}=-p_b$, то из него следует, что

$$c=b\sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{1+\nu}\cdot\left(4\frac{k+p_b}{mb^2}-1\right)}}$$

$$m=\frac{8(k+p_b)b^2}{(1+\nu)(b^2-c^2)^2+2b^4}.$$

Когда в пластической области реализуется только режим (9) и на упругопластической границе компоненты тензора напряжений

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=c}=\frac{2k}{3},$$
$$\sigma_\theta\,|_{\rho=c}=\frac{4k}{3}, \tag{14}$$

то из условия $\sigma_\rho\,|_{\rho=b}=-p_b$ определяем

$$m=m_1=\frac{4}{3b^2}\frac{3p_b+(4+\nu)k+\sqrt{(13+4\nu)k^2+6(4+\nu)kp_b+9p_b^2}}{3+\nu}.$$

При выполнении (14), учитывая формулы (10) находим, что

$$mc^2=\frac{4k}{3}.$$

Поэтому значение радиуса упругопластической границы, когда $m=m_1$ будет определяться по формуле

$$c=c_1=b\sqrt{\frac{(3+\nu)k}{(4+\nu)k+3p_b+\sqrt{(13+4\nu)k^2+6(4+\nu)kp_b+9p_b^2}}}.$$

Если $p_b=0,$ то

$$m=m_1=\frac{4k}{3b^2}\frac{4+\nu+\sqrt{13+4\nu}}{3+\nu}$$
$$c=c_1=b\sqrt{\frac{3+\nu}{4+\nu+\sqrt{13+4\nu}}}.$$

На рис. 1 показаны графики напряжений, перемещений, пластических деформаций и годографа вектора напряжений, когда $k=1,\ b=1,\ \nu=0.25,\ m=m_1=3.2786.$

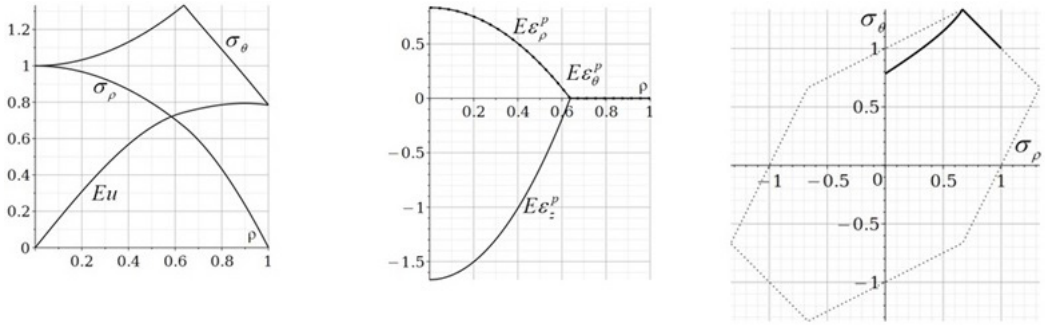



*Рис. 1. Графики напряжений, перемещений, пластических деформаций*

Рассмотрим случай, когда $m>m_1$ и $p_b=0.$ В пластической области $0\le\rho\le c$ реализуются три режима. Первый режим

$$1)\ \begin{cases}\sigma_\theta+\sigma_\rho=2k,\\ \dfrac{2k}{3}\le\sigma_\rho\le\dfrac{4k}{3}\end{cases}$$

реализуется в области $0\le\rho\le c_1.$ Второй режим

$$2)\ \begin{cases}2\sigma_\theta-\sigma_\rho=2k,\\ -\dfrac{k}{3}\le\sigma_\rho\le\dfrac{2k}{3}\end{cases}$$

реализуется в области $c_1\le\rho\le c.$ Третий режим

$$3)\ \begin{cases}\sigma_\theta+\sigma_\rho=2k,\\ 2\sigma_\theta-\sigma_\rho=2k\end{cases}$$

выполняется только на границе $\rho=c_1.$

Для первого режима справедливы соотношения (10)–(12). На границе $\rho = c_1$

$$mc_1^2 = \frac{4k}{3}.$$

Поэтому на границе $\rho = c_1$, учитывая (12), получаем

$$Eu\,|_{\rho=c_1} = \left( C - \frac{1+\nu}{3} k \right) c_1.$$

Неизвестная величины $C$ определяется, например, из условия непрерывности перемещений на границе $\rho = c_1$.

Для второго режима учитывая, что на границе $\rho = c_1$

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=c_1} = \frac{2k}{3},$$

напряжения в пластической области $c_1 \le \rho \le c$

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= 2\left( k - \frac{m\rho^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}} \right), \\ \sigma_\theta &= 2k - \frac{m\rho^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Учитывая соотношения ассоциированного закона пластического деформирования, получаем уравнение для перемещений в пластической области

$$2\frac{dEu}{d\rho} + \frac{Eu}{\rho} + \frac{5-4\nu}{\rho^{1/2}} \left( \frac{\rho^{5/2} - c_1^{5/2}}{5} m + \frac{2c_1^{1/2}}{3} k \right) - 6(1-\nu)k = 0.$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$Eu = 2(1-\nu)k\rho + (5-4\nu) \left( \frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left( \frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{m\rho^2}{35} \right) \rho + \frac{C_1}{\rho^{1/2}}. \tag{16}$$

Пластические деформации

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^p &= \frac{c_1^{1/2} k}{2\rho^{1/2}} - \left( \frac{1-5\nu}{7} \rho^2 + \frac{3c_1^{5/2}}{4\rho^{1/2}} \right) \frac{m}{5} - \frac{C_1}{2\rho^{3/2}}, \\ E\varepsilon_\theta^p &= -\frac{c_1^{1/2} k}{\rho^{1/2}} + \left( 2\frac{1-5\nu}{7} \rho^2 + \frac{3c_1^{5/2}}{2\rho^{1/2}} \right) \frac{m}{5} + \frac{C_1}{\rho^{3/2}}, \\ \varepsilon_{\ddot{y}}^p &= -(\varepsilon_\rho^p + \varepsilon_\theta^p). \end{aligned} \tag{17}$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе $\rho = c$ находим

$$C_1 = c_1^{1/2} ck - \left( 2\frac{1-5\nu}{35} c^{5/2} + \frac{3c_1^{5/2}}{10} \right) mc. \tag{18}$$

Подстановка (18) в (16) дает

$$Eu = (5-4\nu) \left( \frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left( \frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{m\rho^2}{35} \right) \rho + 2(1-\nu)k\rho - \left( 2\frac{1-5\nu}{35} c^{5/2} + \frac{3c_1^{5/2}}{10} \right) \frac{mc}{\rho^{1/2}} + \frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} ck.$$

На границе $\rho = c_1$

$$Eu\,|_{\rho=c_1} = (5-4\nu) \left( \frac{mc_1^2}{14} - \frac{k}{3} - \right) c_1 + 2(1-\nu)kc_1 - \left( 2\frac{1-5\nu}{35} \frac{c^{5/2}}{c_1^{1/2}} + \frac{3c_1^2}{10} \right) mc + ck. \tag{19}$$

Из условия непрерывности перемещений на границе $\rho = c_1$, учитывая (16), (19), находим

$$C = \left( \frac{1-2\nu}{3} + \frac{c}{c_1} \right) k + \left( \frac{17-\nu}{28} c_1^2 - \frac{3c_1 c}{10} - 2\frac{1-5\nu}{35} \cdot \frac{c^{7/2}}{c_1^{3/2}} \right) m.$$

На упругопластической границе $\rho = c$ из (15) следует, что

$$\sigma_\rho |_{\rho=c} = 2\left( k - \frac{mc^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c}} \right),$$

$$\sigma_\theta |_{\rho=c} = 2k - \frac{mc^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c}}.$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c} = 0$$

определяем величины $A, B$ входящие в формулы (6) для определения напряжений в упругой области

$$A = 2k + \frac{3mc_1^2 - 10k}{10} \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} + \frac{5\nu - 1}{20} mc^2,$$

$$B = \left( \left( \frac{k}{3} - \frac{mc_1^2}{10} \right) \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} + \frac{5\nu - 1}{40} mc^2 \right) c^2.$$

На границе $\rho = b$

$$\sigma_\rho |_{\rho=b} = 2k + \left( \frac{5\nu-1}{10} \left( 1 - \frac{c^2}{2b^2} \right) c^2 + \left( 3 + \frac{c^2}{b^2} \right) \cdot \frac{c_1^{5/2}}{5c^{1/2}} - \frac{3+\nu}{4} b^2 \right) \frac{m}{2} - \left( 1 + \frac{c^2}{3b^2} \right) \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} k.$$

Из условия $\sigma_\rho |_{\rho=b} = 0$ численно находим радиус упругопластической границы.

Третий режим реализуется на границе $\rho = c_1$, где

$$\sigma_\rho = \frac{2k}{3},$$

$$\sigma_\theta = \frac{4k}{3}.$$

На рис. 2 показаны графики напряжений и годографа напряжений.

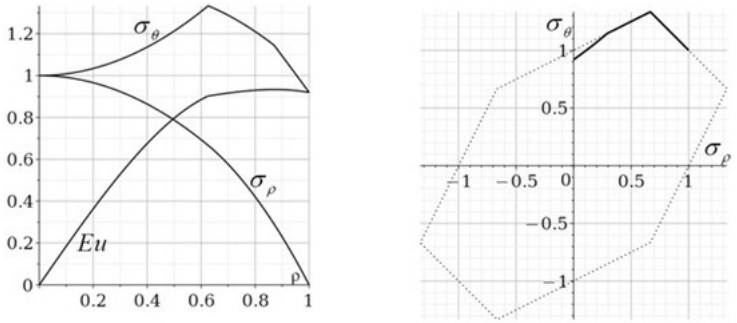



*Рис. 2.* $\nu = 0.25,\ m = 3.4036,\ c_1 = 0.6259,\ c = 0.8702$

Рассмотрим процесс, когда значение параметра $m$ уменьшается от $m_2$, при котором диск находится в предельном состоянии, до нуля.

В области $0 \le \rho \le c_1$ остаются необратимые деформации $\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$, вычисляемые по формулам (17), в которых надо полагать

$$m = m_2, \quad c = c_1.$$

На рис. 3 приведены график годографа вектора напряжений, перемещений и остаточных деформаций.

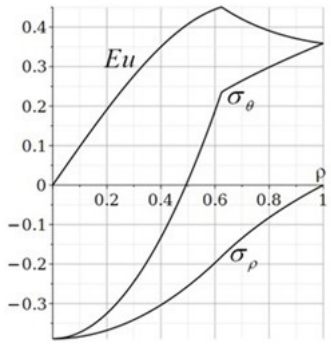



*Рис. 3. График годографа вектора напряжений перемещений и остаточных деформаций при* $m = 0$

Изменения эквивалентного напряжения показывает, что при уменьшении параметра $m$ до нуля в диске не происходит повторного пластического деформирования.

## 5. Гладкие функции пластичности

Рассмотрим случай, когда функция пластичности является гладкой. Выбор конкретной функции пластичности не имеет принципиального значения. В работе [15] была предложена степенная функция пластичности

$$F = \left( \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^{2n} + (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)^{2n} + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^{2n}}{2 + 2^{2n}} \right)^{1/2n} = k. \qquad (20)$$

При $n = 1$ условие (20) переходит в условие пластичности Мизеса [10], при $n \to \infty$ условие (20) переходит в условие пластичности Ишлинского.

Для задачи о диске

$$F(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z)\,|_{\sigma_z = 0} = f(\sigma_\rho, \sigma_\theta) = \left( \frac{(2\sigma_\rho - \sigma_\theta)^{2n} + (2\sigma_\theta - \sigma_\rho)^{2n} + (\sigma_\rho + \sigma_\theta)^{2n}}{2 + 2^{2n}} \right)^{1/2n} = k.$$

Напряжения в пластической области $0 \le \rho \le c$ определяем из системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \dfrac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho, \\ F = k. \end{cases} \qquad (21)$$

Решение (21) находим численно с учетом условий (8).

Напряжения и перемещения в упругой области определяются согласно (5). Неизвестные величины $A, B$ в (5) и радиус упругопластической границы $\rho = c$ определяем из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе и граничного условия на внешнем контуре диска $\rho = c$ и условия $\sigma_\rho\,|_{\rho = b} = -p_b$.

Из ассоциированного закона пластического деформирования, учитывая формулы (5), соотношения закона Гука и формулы Коши, следует уравнение для определения радиальной компоненты вектора перемещений

$$\frac{dEu}{d\rho} - \sigma_\rho + \nu\sigma_\theta - \frac{\partial F / \partial \sigma_\rho\,|_{\sigma_z = 0}}{\partial F / \partial \sigma_\theta\,|_{\sigma_z = 0}} \left( \frac{Eu}{\rho} - \sigma_\theta + \nu\sigma_\rho \right) = 0,$$

Поскольку в центре диска $u\,|_{\rho = 0} = 0,$ то в малой окрестности точки $\rho = 0$ $(\rho \le \delta)$ приближенно можно полагать $u = \mu\rho$ [2]. В зависимости от выбранного алгоритма решения задачи

величину $\mu$ определяем, например, из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе или из других граничных условий. При выполнении численных расчетов принималось, что $\delta = 10^{-10}$.

На рис. 4 изображены графики годографа вектора напряжений, компонент вектора напряжений и пластических деформаций для предельного состояния диска.

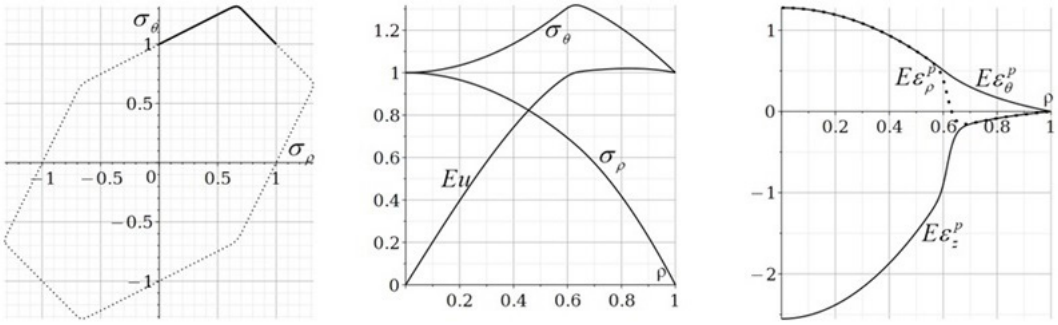



*Рис. 4.* $n = 30, m = 3.4177$

## Заключение

Предложенный алгоритм решения задачи о тонком быстровращающемся диске в рамках теории малых деформаций, рассмотренный в данной работе, позволяет выбирать любые гладкие функции пластичности. В качестве примера рассматривались условия пластичности максимального приведенного напряжения, условие пластичности Карафиллиса — Бойса. Полученные результаты показывают, что в зависимости от значения параметра нагрузки $m$, в пластической области выполняться один или три режима условия пластичности максимального приведенного напряжения. При этом сингулярный режим не будет выполняться в некоторой 2D области.

## Литература


1. *Rees D. W. A.* Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM). – 1999. – Vol. 7, Iss. 4. – P. 281 – 288.

2. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.

3. *Lomakin E.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs / E. Lomakin, S. Alexandrov, Y.R. Jeng. // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86, Iss. 1–2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.

4. *Artemov M. A.* On the appearance of plastic regions in a rotating disk / M. A. Artemov, E. S. Baranovsky, R. G. Medzhidov [et al.] // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. – 2024. – No 1 (59). – P. 21–39.

5. *Лямина Е. А.* Дизайн равнопрочного вращающегося диска / Е. А. Лямина, О. В. Новожилова. // Инновационные транспортные системы и технологии. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 122–134.

6. *Ишлинский А. Ю.* Гипотеза прочности формоизменения // Ученые записки МГУ. – Механика. – 1940. – Вып. 46. – С. 117–124.

7. *Karafillis A. P.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor / A. P. Karafillis, M. C. Boyce // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – Vol. 41, Iss. 12. – P. 1859–1886.

8. *Chakrabarty J.* Theory of Plasticity / J. Chakrabarty // Elsevier Butterworth-Heinemann. – 2006. – P. 882.

9. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М. : Наука, 1975. – 576 с.

10. *Mises R.* Mechanik der plastischen formänderung von kristallen // Z. Ang. Math. Mech. – 1928. – 8. – P. 161–185.

УДК 519.6; 51-76

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФАРКТА МИОКАРДА, ВЫЗВАННОГО ОККЛЮЗИЕЙ КОРОНАРНОЙ АРТЕРИИ

**О. Ф. Воропаева**

*Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск*

**Аннотация.** Разработаны и численно реализованы две концепции математических моделей механизма патогенеза инфаркта миокарда. Различие концепций определяется тем, что одна из них нацелена исключительно на математическую формализацию развития фундаментальной защитно-приспособительной реакции врожденной иммунной системы в очаге инфаркта, образовавшемся в результате тромботической окклюзии коронарной артерии, а другая представляет инфаркт как противостояние между функционально наиболее значимыми клетками миокарда и клетками врожденной иммунной системы в сложных условиях постишемии, функциональной поляризации воспалительных факторов и постоянно меняющегося микроокружения в ходе воспалительной и репаративной фаз инфаркта.
**Ключевые слова:** математическая модель, ишемия, инфаркт миокарда, врожденная иммунная реакция, иммунное лечение, окклюзия коронарной артерии.

## Введение

Воспаление является главным типовым процессом в рамках сложных механизмов патогенеза большинства заболеваний человека, включая ишемические инфаркты, нейродегенеративные и онкологические процессы, повреждения в результате механических и химических воздействий или хирургических вмешательств [1, 2]. В данной работе предложены новые математические модели для изучения общих закономерностей развития инициированного ишемией локального повреждения миокарда и восстановления сердечной мышцы, а также для анализа трансформации этих закономерностей в зависимости от индивидуальных факторов и хода хирургической операции лигирования коронарных артерий у мышей. Во всех моделях сложная структура дифференциальных уравнений отражает известные взаимосвязи ключевых параметров состояния реальной биологической системы, определяющей биокинетику врожденного иммунного ответа на повреждение любой этиологии. Используется стандартная методология идентификации динамических систем и математического моделирования, базовые постулаты биокинетики, теории динамических систем, теории подобия и размерностей.

## 1. Иерархия математических моделей врожденного иммунного ответа на тромботическую окклюзию коронарной артерии

Тромботическая окклюзия коронарной артерии является ключевым звеном патогенеза ишемии, приводящей к инфаркту миокарда (ИМ): кровяной сгусток, состоящий преимущественно из активированных клеток крови тромбоцитов, перекрывает просвет сосуда, полностью останавливая кровоток, что может вызвать повреждение или гибель участка сердечной мышцы. Тромбоциты также играют важную роль в патогенезе ИМ, поскольку они модулируют воспаление, высвобождая в процессе активации и дегрануляции иммуномодулирующие медиаторы и вазоконстрикторные молекулы, а также способствуют образованию новых тромбов и/или микротромбов. Помимо негативного влияния тромбоцитов на ИМ, в лабораторных исследованиях устанавливаются все новые факты о защитном эффекте молекул, высвобожда-

емых активированными тромбоцитами во время ИМ. Однако роль тромбоцитов в кардиопротекции до сих пор недостаточно изучена. Поэтому велика потребность в разработке надежных математических формализаций фундаментальных общебиологических представлений об участии компонентов врожденной иммунной системы в защитно-приспособительных реакциях в очаге воспаления, в том числе о роли тромбоцитов в механизме врожденной иммунной реакции на локальное повреждение миокарда при инфаркте. Изучение защитной роли тромбоцитов при ИМ может привести к появлению новых методов лечения и диагностики ИМ, выявлению и определению клинической полезности тромбоцитарных биомаркеров [1–3].

Иерархия математических моделей динамики асептического воспалительного ответа разработана в [4]. Модели сформулированы как задачи с начальным условием для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздыванием. Используется приближение локальной пространственной однородности моделируемых процессов независимо от уровня повреждения. Обозначения параметров состояния — компонент вектора решения задачи $x_q$ $(q=1,...,14)$ — определены в таблице 1; $k_p$ $i=1,...,m$ — постоянные параметры моделей. Для наглядности эти обозначения и нумерация переменных и параметров в моделях 1–4 остаются неизменными.

Таблица 1

*Список параметров состояния модельной биологической системы*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | плотность активных тромбоцитов | $x_8$ | концентрация фактора роста PDGF |
| $x_2$ | плотность живых нейтрофилов | $x_9$ | концентрация интерлейкина IL-1 |
| $x_3$ | плотность нейтрофилов, умерших путем апоптоза | $x_{10}$ | концентрация хемокина CXCL8 |
| $x_4$ | плотность макрофагов фенотипа M1 | $x_{11}$ | концентрация интерлейкина IL-6 |
| $x_5$ | плотность макрофагов фенотипа M2 | $x_{12}$ | концентрация интерлейкина IL-10 |
| $x_6$ | концентрация фактора некроза опухоли TNF-$\alpha$ | $x_{13}$ | концентрация интерлейкина IL-12 |
| $x_7$ | концентрация фактора роста TGF-$\beta$ | $x_{14}$ | концентрация белка MIP-1$\alpha$ |

### *2.1. Модель 1*

$$\frac{dx_1}{dt}=k_0-k_1x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{k_2x_7}{k_3+x_7}+\frac{k_4x_8}{k_5+x_8}+\frac{k_6x_{10}}{k_7+x_{10}}+\left(\frac{k_8x_9}{k_9+x_9}+\frac{k_{10}x_6}{k_{11}+x_6}\right)x_2-\frac{k_{12}x_{11}}{k_{13}+x_{11}}x_2-k_{14}x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{k_{12}x_{11}}{k_{13}+x_{11}}x_2+k_{14}x_2-\frac{k_{15}x_3}{k_{16}+x_3}x_4,$$

$$\frac{dx_4}{dt}=\frac{k_{17}x_7^2\left(t-\tau\right)}{k_{18}+x_7^2\left(t-\tau\right)}+\frac{k_{19}x_8}{k_{20}+x_8}+\frac{k_{21}x_6}{k_{22}+x_6}+\frac{k_{23}x_{14}^2}{k_{24}+x_{14}^2}+k_{25}x_3-\frac{k_{26}k_{27}}{k_{27}+x_3}x_4+k_{28}x_5-k_{29}x_4,$$

$$\frac{dx_5}{dt}=\frac{k_{30}x_{12}}{k_{31}+x_{12}}x_5+\frac{k_{26}k_{27}}{k_{27}+x_3}x_4-k_{28}x_5-k_{29}x_5,$$

$$\frac{dx_6}{dt}=\frac{k_{32}x_{13}}{k_{33}+x_{13}}x_6+\frac{k_{34}k_{35}}{k_{35}+x_7}\frac{k_{36}}{k_{36}+x_{11}}x_2+\frac{k_{37}k_{38}}{k_{38}+x_{12}}\frac{k_{39}}{k_{39}+x_7}\frac{k_{40}x_4}{k_{40}+x_{11}^{\alpha}}+k_{41}x_5-k_{42}x_6,$$

$$\frac{dx_7}{dt}=k_{43}x_1+k_{44}x_2+\left(k_{45}x_4+k_{46}x_5\right)\frac{x_7}{k_{47}+x_7}-k_{48}x_7,$$

$$\frac{dx_8}{dt}=\frac{k_{49}x_1^2}{k_{50}+x_1^2}+\left(k_{51}x_4+k_{52}x_5\right)\frac{x_8}{k_{53}+x_8}-k_{54}x_8,$$

$$\frac{dx_9}{dt} = \frac{k_{55}k_{56}}{k_{56}+x_7}\frac{k_{57}}{k_{57}+x_{11}}x_2 + \frac{k_{58}k_{59}}{k_{59}+x_{12}}\frac{k_{60}}{k_{60}+x_7}\frac{k_{61}}{k_{61}+x_{11}^{\sigma}}x_4 + k_{62}x_5 - k_{63}x_9,$$

$$\frac{dx_{10}}{dt} = k_{64}x_4 + k_{65}x_5 + \left(\frac{k_{66}x_9}{k_{67}+x_9} + \frac{k_{68}x_6}{k_{69}+x_6}\right)x_{10} - k_{70}x_{10},$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} = \frac{k_{71}k_{72}}{k_{72}+x_7}\frac{k_{73}}{k_{73}+x_{11}}x_2 + \frac{k_{74}k_{75}}{k_{75}+x_{12}}x_4 + \frac{k_{76}k_{75}}{k_{75}+x_{12}}\frac{x_7}{k_{77}+x_7}x_4 + k_{78}x_5 - k_{79}x_{11},$$

$$\frac{dx_{12}}{dt} = k_{80}x_4 + \frac{k_{81}x_7}{k_{82}+x_7}x_4 + \frac{k_{83}k_{84}}{k_{84}+x_{12}}x_5 - k_{85}x_{12},$$

$$\frac{dx_{13}}{dt} = \frac{k_{86}x_6}{k_{87}+x_6}x_4 + \frac{k_{88}x_6}{k_{89}+x_6}x_2 - k_{90}x_{13},$$

$$\frac{dx_{14}}{dt} = k_{91}x_4 + k_{92}x_5 - k_{93}x_{14}.$$

### *2.2. Модель 2*

Отличие от модели 1 состоит в предположении, что ввиду относительно малого количества связей с остальными компонентами иммунного ответа влияние хемокина CXCL8, интерлейкинов IL-10 и IL-12 и макрофагального воспалительного белка MIP-1$\alpha$ может быть отнесено в категорию неопределенностей:

$$\frac{dx_1}{dt} = k_0 - k_1x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k_2x_7}{k_3+x_7} + \frac{k_4x_8}{k_5+x_8} + \left(\frac{k_8x_9}{k_9+x_9} + \frac{k_{10}x_6}{k_{11}+x_6}\right)x_2 - \frac{k_{12}x_{11}}{k_{13}+x_{11}}x_2 - k_{14}x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{k_{12}x_{11}}{k_{13}+x_{11}}x_2 + k_{14}x_2 - \frac{k_{15}x_3}{k_{16}+x_3}x_4,$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{k_{17}x_7^2(t-\tau)}{k_{18}+x_7^2(t-\tau)} + \frac{k_{19}x_8}{k_{20}+x_8} + \frac{k_{21}x_6}{k_{22}+x_6} + k_{25}x_3 - \frac{k_{26}k_{27}}{k_{27}+x_3}x_4 + k_{28}x_5 - k_{29}x_4,$$

$$\frac{dx_5}{dt} = k_{26}\frac{k_{27}}{k_{27}+x_3}x_4 - k_{28}x_5 - k_{29}x_5,$$

$$\frac{dx_6}{dt} = \frac{k_{34}k_{35}}{k_{35}+x_7}\frac{k_{36}}{k_{36}+x_{11}}x_2 + k_{37}\frac{k_{39}}{k_{39}+x_7}\frac{k_{40}}{k_{40}+x_{11}^{\alpha}}x_4 + k_{41}x_5 - k_{42}x_6,$$

$$\frac{dx_7}{dt} = k_{43}x_1 + k_{44}x_2 + (k_{45}x_4 + k_{46}x_5)\frac{x_7}{k_{47}+x_7} - k_{48}x_7,$$

$$\frac{dx_8}{dt} = \frac{k_{49}x_1^2}{k_{50}+x_1^2} + (k_{51}x_4 + k_{52}x_5)\frac{x_8}{k_{53}+x_8} - k_{54}x_8,$$

$$\frac{dx_9}{dt} = \frac{k_{55}k_{56}}{k_{56}+x_7}\frac{k_{57}}{k_{57}+x_{11}}x_2 + k_{58}\frac{k_{60}}{k_{60}+x_7}\frac{k_{61}}{k_{61}+x_{11}^{\sigma}}x_4 + k_{62}x_5 - k_{63}x_9,$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} = \frac{k_{71}k_{72}}{k_{72}+x_7}\frac{k_{73}}{k_{73}+x_{11}}x_2 + k_{76}\frac{x_7}{k_{77}+x_7}x_4 + k_{78}x_5 - k_{79}x_{11}.$$

### *2.3. Модель 3*

$$\frac{dx_1}{dt} = k_0 - k_1 x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k_2 x_7}{k_3 + x_7} + \frac{k_4 x_8}{k_5 + x_8} + \frac{k_{10} x_6}{k_{11} + x_6} x_2 - k_{14} x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = k_{14} x_2 - \frac{k_{15} x_3}{k_{16} + x_3} x_4,$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{k_{17} x_7^2 (t-\tau)}{k_{18} + x_7^2 (t-\tau)} + \frac{k_{19} x_8}{k_{20} + x_8} + \frac{k_{21} x_6}{k_{22} + x_6} + k_{25} x_3 - \frac{k_{26} k_{27}}{k_{27} + x_3} x_4 + k_{28} x_5 - k_{29} x_4,$$

$$\frac{dx_5}{dt} = \frac{k_{26} k_{27}}{k_{27} + x_3} x_4 - k_{28} x_5 - k_{29} x_5,$$

$$\frac{dx_6}{dt} = \frac{k_{34} k_{35}}{k_{35} + x_7} x_2 + k_{37} \frac{k_{39}}{k_{39} + x_7} x_4 + k_{41} x_5 - k_{42} x_6,$$

$$\frac{dx_7}{dt} = k_{43} x_1 + k_{44} x_2 + (k_{45} x_4 + k_{46} x_5) \frac{x_7}{k_{47} + x_7} - k_{48} x_7,$$

$$\frac{dx_8}{dt} = \frac{k_{49} x_1^2}{k_{50} + x_1^2} + (k_{51} x_4 + k_{52} x_5) \frac{x_8}{k_{53} + x_8} - k_{54} x_8.$$

### *2.4. Модель 4*

Модель представляет собой попытку сделать более лаконичным описание пула нейтрофилов и цитокинов и, как следствие, — процесса M1/M2 поляризации макрофагов. Для этого из числа параметров состояния системы исключена плотность субпопуляции нейтрофилов, умерших путем апоптоза, которой в моделях 1–3 фактически отведена роль важного провоспалительного фактора; дополнительно исключен параметр $x_7$ (уровень фактора роста TGF-$\beta$):

$$\frac{dx_1}{dt} = k_0 - k_1 x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k_4 x_8}{k_5 + x_8} + \frac{k_{10} x_6}{k_{11} + x_6} x_2 - k_{14} x_2,$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{k_{19} x_8}{k_{20} + x_8} + \frac{k_{21} x_6}{k_{22} + x_6} - k_{26} x_4 + k_{28} x_5 - k_{29} x_4,$$

$$\frac{dx_5}{dt} = k_{26} x_4 - k_{28} x_5 - k_{29} x_5,$$

$$\frac{dx_6}{dt} = k_{34} x_2 + k_{37} x_4 + k_{41} x_5 - k_{42} x_6,$$

$$\frac{dx_8}{dt} = \frac{k_{49} x_1^2}{k_{50} + x_1^2} + (k_{51} x_4 + k_{52} x_5) \frac{x_8}{k_{53} + x_8} - k_{54} x_8.$$

При постановке начальной задачи для моделей 1–3 начальные условия задаются в виде функций «истории» на интервале $[t_0 - \tau, t_0]$: $\mathbf{x}(\theta) = \boldsymbol{\varphi}_0(\theta) \equiv \mathbf{a}$, $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — вектор решения, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $a_i = \text{const} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$; привлекается идея метода последовательного интегрирования (метод шагов). Начальные условия в задаче Коши для модели 4 определялись как $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{a}$. Численный алгоритм заключается в привлечении хорошо

апробированных методов из семейства Адамса решения задачи Коши и идеи блочного аналога метода Зейделя, позволяющего сделать шаг от чисто явных схем расчетов к полунеявным. Эффективность алгоритма и результаты методических расчетов обсуждаются в [4].

Практическая ценность моделей [4] состоит в том, что они представляют собой полноценный исследовательский инструмент для изучения врожденной иммунной реакции на повреждение любой этиологии. В [4] модели откалиброваны, в частности, на экспериментальных данных о динамике асептического воспаления в центральной зоне хирургической раны кожи у нескольких групп живых моделей; там же представлены результаты проверки робастности, включая анализ чувствительности к малым вариациям значений параметров и «диагностические» проверки отклика системы на типичные патологические изменения фонового состояния врожденной иммунной системы.

В вычислительных экспериментах настоящей работы показано, что любая из этих моделей может описывать динамику факторов воспаления при остром инфаркте в левом желудочке сердца мыши, демонстрируя адекватный отклик на «нетипичную» динамику уровня активных тромбоцитов (рис. 1). Представляет интерес дополнительный вычислительный эксперимент, в рамках которого частичное ингибирование или нокаут TGF-$\beta$ в разгар острой фазы воспалительной реакции на повреждение (в 1–4 дни) связаны с повышенной инфильтрацией лейкоцитов и экспрессией хемокинов, тогда как более позднее устранение TGF-$\beta$ приводит к ускорению элиминации провоспалительных факторов, в том числе нейтрофилов и M1-макрофагов, и одновременно способствует уменьшению фиброза тканей за счет сохранения пула M2-макрофагов на более поздней репаративной стадии ИМ.

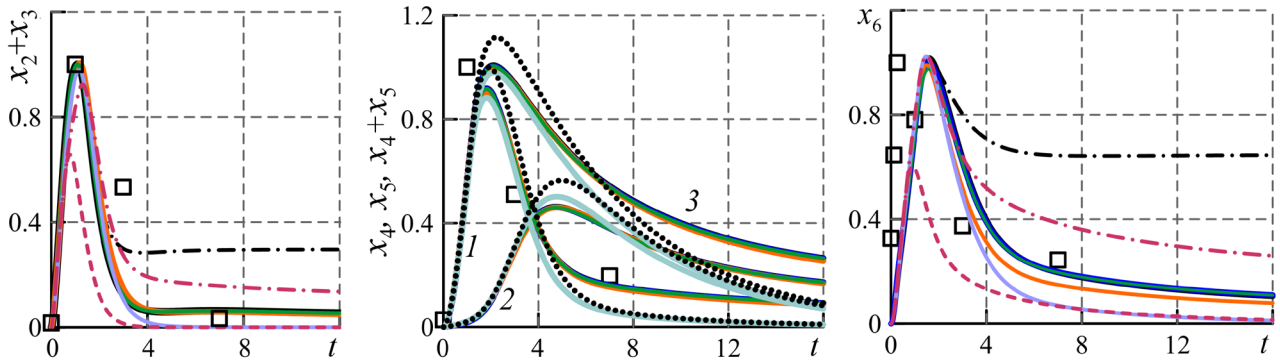



*Рис. 1. Динамика плотности нейтрофилов ($x_2 + x_3$) и макрофагов фенотипа M1 (1) и M2 (2) и их суммы (3), концентраций TNF-$\alpha$ ($x_6$) и интерлейкина IL-10 ($x_{12}$) в патогенезе инфаркта. Линии: сплошные — модели 1–4, штрихпунктирные — избыток активных тромбоцитов (модель 4), штриховые — дефицит активных тромбоцитов (модель 1); пунктирные — нокаут TGF-$\beta$ при $t \geq 44$ ч, оранжевые — без нокаута (модель 3). Маркеры — эксперимент [5]*

## 2. Математическая модель острого инфаркта миокарда, вызванного окклюзией коронарной артерии (модель 5)

Клеточный состав сердечной ткани весьма разнообразен и многофункционален, что необходимо, в первую очередь, для обеспечения бесперебойной работы сердца. Основу биологической идеализации патогенеза инфаркта составляют функционально наиболее значимые клеточные субпопуляции ткани миокарда: кардиомиоциты, фибробласты и эндотелиальные клетки. Этот выбор обусловлен следующими соображениями. В норме всю сократительную работу в сердце выполняют кардиомиоциты — особые клетки, которые генерируют и проводят электрические волны. Клетки соединительной ткани фибробласты сами не передают возбуждение, но выполняют в этом процессе сложные посреднические функции, а также в фибробластах происходит синтез белков внеклеточного матрикса (ECM), которые обеспечи-

вают механическую поддержку клеток миокарда и транспорт химических веществ. Основную часть молекул ECM сердца представляют коллагены. Эндотелиальные клетки выстилают стенки кровеносных сосудов и относительно равномерно распределяются в остальной части сердечной ткани, выполняя жизнеобеспечивающие функции, такие как контроль свертывания крови и продуцирование различных регуляторных ростовых факторов и цитокинов.

Согласно принятой модели, начало острой ишемии миокарда вызывает повреждение и гибель клеточных компонентов миокарда — кардиомиоцитов, эндотелиальных клеток и фибробластов, а также разрушение ECM. Это, в свою очередь, инициирует острую воспалительную реакцию посредством согласованного действия нескольких процессов, включая выработку активных форм кислорода (ROS) и формирование молекулярных паттернов (DAMPs), связанных с клеточным повреждением. Воспаление ассоциировано с высвобождением различных медиаторов воспаления (таких как цитокины и хемокины IL-1, TNF-$\alpha$, MIP-2, MCP-1, IL-10) и факторов роста (VEGF, PDGF, TGF-$\beta$), которые индуцируют рекрутирование и активацию лейкоцитов (нейтрофилов и макрофагов фенотипов M1 и M2), модулируют воспалительную реакцию, формируют микросреду, необходимую для восстановления сердечной ткани. Нацеливаясь на жизнеспособную часть клеточной популяции, лейкоциты могут вызвать гибель кардиомиоцитов, тем самым распространяя ишемическое повреждение за пределы исходной зоны повреждения. Однако постепенно формирующийся противовоспалительный пул факторов воспаления, основу которого составляют M2-макрофаги и IL-10, противодействует этому и способствует переходу биологического процесса в фазу постинфарктного восстановления ткани и, по возможности, функций клеток миокарда (см., например, [6–8]).

Действие механизмов смерти и восстановления клеток миокарда в условиях локального противостояния про- и противовоспалительного пулов врожденного иммунитета формулируется как задача Коши для жесткой нелинейной системы ОДУ, в которой начальные условия согласованы с экспериментальными данными. Основной блок математической модели 5, описывающий динамику плотностей клеточных субпопуляций сердечной ткани в характерных точках миокарда, состоит из следующих уравнений биокинетики:

$$\frac{dC}{dt} = -\left(\lambda_1 \frac{I_1}{K_1 + I_1} + \lambda_2 \frac{T_\alpha}{K_2 + T_\alpha}\right) \frac{K_3}{K_3 + I_{10}} C - d_C M_1 C,$$

$$\frac{dF}{dt} = \lambda_3 \frac{G}{K_4 + G} \frac{O}{K_5 + O} F - d_F F,$$

$$\frac{dE}{dt} = \lambda_4 \frac{E}{K_6 + E} \frac{V^\sigma}{K_7^\sigma + V^\sigma} - d_E E.$$

Здесь и далее $\sigma$, $F$ и $E$ — плотности кардиомиоцитов, фибробластов и эндотелиальных клеток; $O$ — уровень доставляемого кислорода, $D$ — уровень DAMPs; $N$ — плотность функционально состоятельных нейтрофилов; $M_1$ и $M_2$ — плотность макрофагов фенотипов M1 и M2; $T_\beta$, $G$ и $V$ — уровни факторов роста TGF-$\beta$, PDGF и VEGF; $I_1$, $I_{10}$ и $T_\alpha$ — уровни IL-1, IL-10 и TNF-$\alpha$; $I_p$, $P$, $Q$ — уровни MIP-2, MCP-1 и MMP соответственно; $d$, $K$, $\lambda$, $\sigma$ — постоянные параметры. Легко заметить, что структура уравнений поддерживает общепринятую гипотезу: во взрослом сердце при любом уровне повреждения вероятность зарождения новых кардиомиоцитов пренебрежимо мала. Остальные не представленные здесь уравнения модели построены на той же основе, что и в моделях 1–3. Структурная и параметрическая идентификация моделей данной работы осуществлялась путем решения комплекса обратных коэффициентных задач с привлечением эволюционного вещественного алгоритма BGA [4] и широкого круга известных экспериментальных данных. Результаты численного моделирования инфаркта миокарда на рис. 2 согласуются с экспериментальными данными о динамике этих параметров состояния при инфаркте в левом желудочке сердца мыши (см., в частности, в [8]).

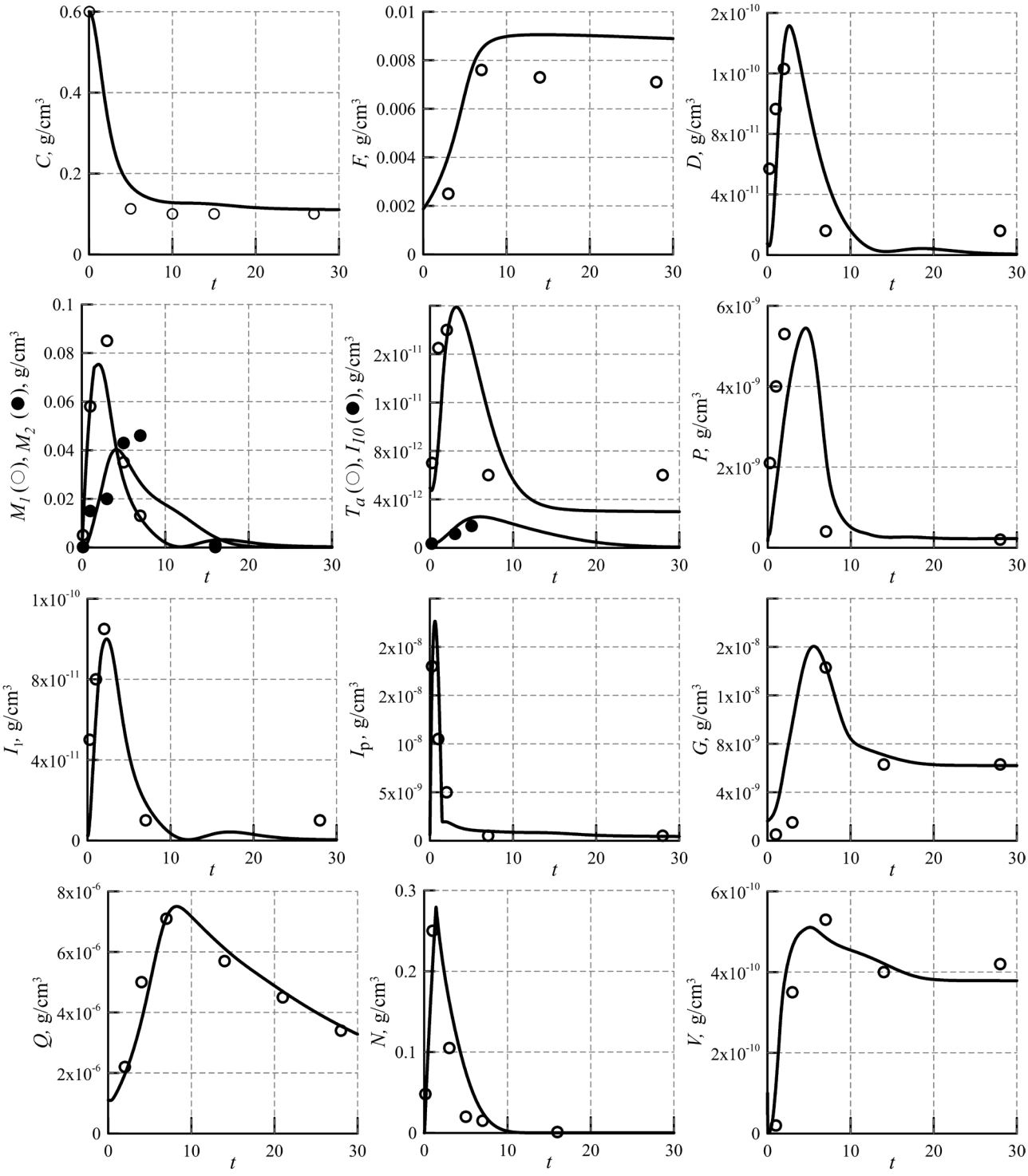



*Рис. 2. Динамика наблюдаемых параметров состояния миокарда в первые 30 дней инфаркта в левом желудочке сердца мыши. Линии — модель 5, маркеры — эксперименты (см. [8])*

## Заключение

В работе представлены основные идеи и примеры численной реализации двух концепций математических моделей механизмов патогенеза инфаркта миокарда, вызванного ишемическим локальным повреждением клеток сердечной мышцы. Предложена иерархия новых математических моделей врожденного иммунного ответа на тромботическую окклюзию коронар-

ной артерии, приводящую к инфаркту. В дополнение к этому разработана и апробирована на известных экспериментальных данных концепция дальнейшего развития модели инфаркта, в том числе в части, касающейся формирования внеклеточного матрикса и функционирования репаративного механизма в постинфарктном сердце.

**Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий. Автор благодарит Н. П. Белоусова за участие в разработке модели 5.

**Литература**

1. *Черешнев В. А.* Иммунологические механизмы локального воспаления / В. А. Черешнев, М. В. Черешнева // Медицинская иммунология. – 2011. – Т. 13, № 6. – С. 557–568.

2. *Головизнин М. В.* Иммунология в мире идей и в мире вещей: эволюционный спуск и проблемы сконструированной реальности / М. В. Головизнин, В. И. Моисеев, В. Т. Тимофеев, Н. С. Лахонина, Ю. Р. Булдакова // Российский иммунологический журнал. 2024. – Т. 27, № 2. – С. 397–402. doi: 10.46235/1028-7221-16874-IOT.

3. *Hałucha K.* Protective Role of Platelets in Myocardial Infarction and Ischemia/Reperfusion Injury / K. Hałucha, A. Rak-Pasikowska, I. Bil-Lula // Cardiology Research and Practice. – 2021. – V. 2021. – Article 5545416. – 14 p. https://doi.org/10.1155/2021/5545416

4. *Воропаева О. Ф.* Иерархия математических моделей динамики асептического воспаления. I. Идентификация моделей / О. Ф. Воропаева // Математическая биология и биоинформатика. – 2025. – Т. 20, № 2. – С. 467–493. doi: 10.17537/2025.20.467.

5. *Dewald O.* Of mice and dogs: Species-specific differences in the inflammatory response following myocardial infarction / O. Dewald, G. Ren, G. D. Duerr, M. Zoerlein, C. Klemm, C. Gersch, S. Tincey, L. H. Michael, M. L. Entman, N. G. Frangogiannis // The American Journal of Pathology. – 2004. – V. 164. – P. 665–677. doi: 10.1016/S0002-9440(10)63154-9.

6. *Ong S.-B.* Inflammation following acute myocardial infarction: Multiple players, dynamic roles, and novel therapeutic opportunities / S.-B. Ong, S. Hernández-Reséndiz, G. E. Crespo-Avilan, R. T. Mukhametshina, X.-Y. Kwek, H. A. Cabrera-Fuentes, D. J. Hausenloy // Pharmacology & Therapeutics. – 2018. – V. 186. – P. 73–87. doi: 10.1016/j.pharmthera.2018.01.001.

7. *Schanze N.* Contributions to Myocardial Ischemia/Reperfusion Injury / N. Schanze, C. Bode, D. Duerschmied // Frontiers in Immunology. – 2019. – V. 10. – Article 1260.

8. *Moise N.* A mathematical model of immunomodulatory treatment in myocardial infarction / N. Moise, A. Friedman // Journal of Theoretical Biology. – 2022. – V. 544. – Article 111122. – 25 p. DOI: 10.1016/j.jtbi.2022.111122.

УДК 519.82

# ОПТИМИЗАЦИЯ ГИПЕРПАРАМЕТРОВ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ БУСТИНГА ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ СТОИМОСТИ КВАРТИРЫ

**Л. А. Глуховская, Е. М. Аристова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье разработан усовершенствованный алгоритм бустинга для прогнозирования стоимости квартир с адаптивным подбором гиперпараметров базовых моделей. Реализовано сравнение трех методов оптимизации: GridSearch, RandomizedSearch и генетического алгоритма. Экспериментально подтверждено превосходство предложенного подхода над стандартным бустингом с достижением $R^2 = 0{,}9802$.
**Ключевые слова:** машинное обучение, бустинг, оптимизация гиперпараметров, GridSearch, генетический алгоритм, прогнозирование, линейная регрессия, случайный лес.

## Введение

Стремительный рост объемов данных в цифровой экономике создает принципиально новые возможности для применения технологий интеллектуального анализа информации. Особую актуальность эти методы приобретают в сфере жилой недвижимости – одном из наиболее динамичных и социально значимых сегментов рынка. Ежедневно тысячи потенциальных покупателей и продавцов сталкиваются с проблемой информационной перегрузки, пытаясь проанализировать сотни предложений с разнородными характеристиками. Существующие системы зачастую ограничиваются простейшими фильтрами, не учитывающими комплексные взаимосвязи между параметрами объектов и реальными предпочтениями пользователей.

Данное исследование направлено на разработку интеллектуальной рекомендательной системы, способной не только обрабатывать массивные наборы данных о недвижимости, но и выявлять скрытые закономерности для формирования персонализированных предложений. Реализация такой системы позволит не только улучшить пользовательский опыт через релевантные рекомендации, но и повысить эффективность сделок за счет более точного прогнозирования стоимости и востребованности объектов.

## 1. Постановка задачи и подготовка данных

Рассмотрим задачу:

По данным о характеристиках квартир России и их ценах необходимо предсказать стоимость некоторой квартиры с известными характеристиками.

Имеется таблица, содержащая информацию о более чем 1 млрд. квартир России. В ней представлены основные характеристики квартир, такие как: общая площадь, местонахождение, количество комнат и, самое главное, стоимость квартиры. В задаче будет рассмотрено 13 характеристик.

Начнем с **подготовки данных**.

В столбах street_id (улица) и house_id (номер дома) имеется много пропусков (от 30 %). Удалять такое количество квартир будет нерациональным в виду большой потери данных, но и замена пропусков модой не совсем корректна. Поэтому удалим данные характеристики из рассмотрения.

В столбце postal_code (почтовый индекс) 4 % данных пропущено. Заменим эти пропуски модой для каждого региона.

Заметим, что в данных содержится ряд ошибок и выбросов. Исключим квартиры, содержащие ошибки, с помощью следующих фильтров:

– rooms (количество комнат) больше 0 и меньше 15;

– kitchen_area (площадь кухни) больше 0 и меньше 50;

– area (общая площадь) больше 0 и меньше 300;

– levels (количество этажей в здании) больше 0 и меньше 100;

– level (этаж) больше 0 и меньше 100.

В столбце date (дата выставления на продажу) содержатся данные в формате даты. Преобразуем их в числа (например, 2021-01-01 в 20210101).

Заметим, что сравнивать все регионы вместе не совсем корректно, поскольку в зависимости от города может сильно отличаться цена за 1 квадратный метр. В качестве примера будем рассматривать г. Воронеж. Для этого сначала отберём квартиры в 36 регионе, а затем выберем только те квартиры, которые находятся в пределах Воронежа по координатам (координаты каждой квартиры представлены в данных).

В данных присутствуют координаты квартир, но в необработанном виде они мало информативны. Рассчитаем расстояние от каждой квартиры до центра города. Центром города считается главный почтамт. Под *расстоянием* подразумевается геодезический путь, то есть кратчайший путь с учетом эллиптической формы земли, который можно рассчитать по следующей формуле:

$$d = \overline{R} \cdot \arccos(\sin(t_1) \cdot \sin(t_2) + \cos(t_1) \cdot \cos(t_2) \cdot \cos(g_1 - g_2)),$$

$$\overline{R} = 6371,01,$$

где $\overline{R}$ — среднее значение радиуса Земли в километрах, $(t_1, g_1)$ — широта и долгота первой точки, соответственно, $(t_2, g_2)$ — широта и долгота второй точки, соответственно.

## 2. Корреляционный и регрессионный анализ данных

Построим модель множественной линейной регрессии [1]. Коэффициент детерминации $R^2 = 0,755$. Его близость к 1 указывает на то, что выбранная модель значима [2]. Проверим факторы на мультиколлинеарность с помощью матрицы корреляции и исключим не значимые коэффициенты [6]. Факторы исключаются по очереди, на каждой итерации пересчитывается $R^2$.

Первая построенная матрица корреляции имеет следующий вид (рис. 1).

Факторы исключаются в следующем порядке: geo_lon (долгота), postal_code (почтовый индекс), object_type (вторичка/новостройка), date (дата выставления на продажу), geo_lon (широта). Также исключим rooms (количество комнат), потому что этот фактор имеет высокую корреляцию с area (общая площадь).

На последней итерации получается следующая матрица корреляции (рис. 2).

Из оставшихся параметров можно составить **рейтинг параметров, имеющих наибольшую корреляцию с целевой переменной**:

1) area (общая площадь);

2) kitchen_area (площадь кухни);

3) distance (расстояние до центра);

4) levels (количество этажей в здании);

5) level (этаж);

6) building_type (тип дома).

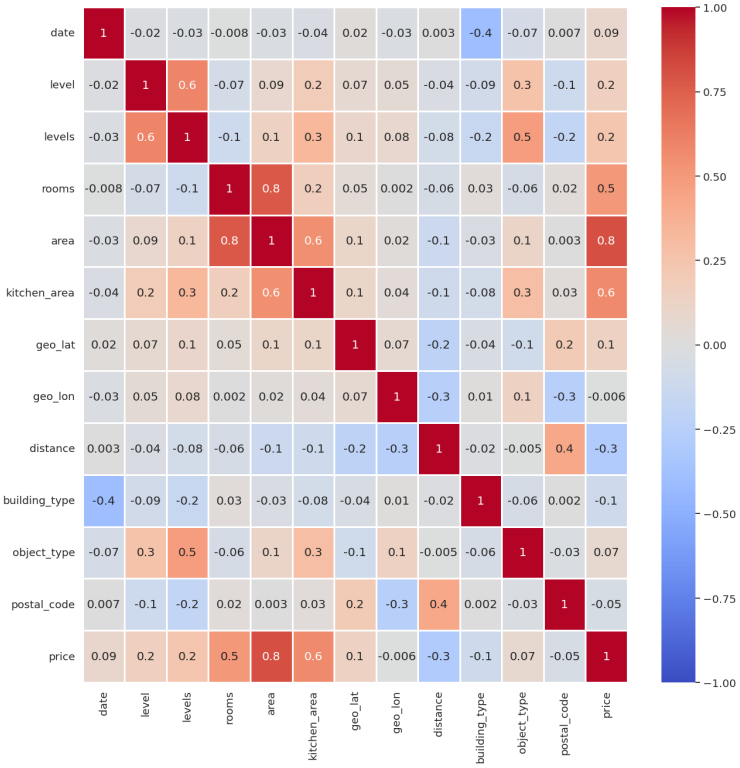



*Рис. 1. Матрица корреляции до исключения факторов*

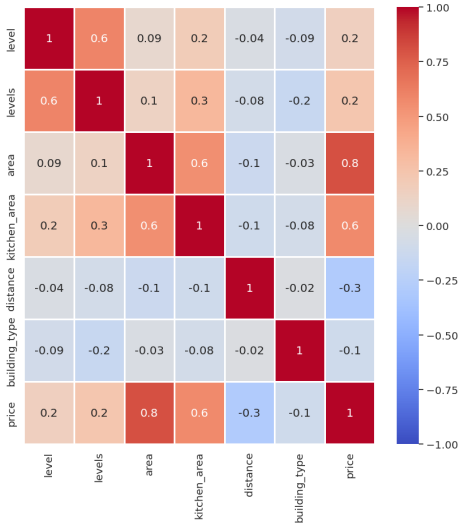



*Рис. 2. Итоговая матрица корреляции*

## 3. Реализация алгоритма бустинга с подбором оптимальных гиперпараметров базовых моделей

Рассмотрим **усовершенствованный алгоритм бустинга** [3], разработанный для решения задачи предсказания стоимости квартир. Основное отличие от классического подхода заключается в адаптивном выборе не только моделей, но и методов оптимизации их гиперпараметров на каждой итерации.

1) инициализация: задаются базовые модели: решающее дерево, случайный лес [4], метод опорных векторов и линейная регрессия, как самые подходящие для решения регрессионной задачи;

2) подготовка данных: используется StandardScaler для масштабирования признаков.

3) основной цикл бустинга:

a) оптимизируются гиперпараметры для каждой базовой модели;

b) выбирается лучшая модель из списка базовых моделей на основе метрики $R^2$;

c) выбранная модель обучается на текущих остатках (разностях между реальными значениями и предсказаниями предыдущих итераций);

d) предсказания лучшей модели добавляются как новый признак.

4) ранняя остановка: алгоритм прекращает работу, если в течение 3 последовательных итераций улучшение среднеквадратичной ошибки не превышает 1 %.

5) финальное обучение: все выбранные модели объединяются в одну финальную модель.

**Базовые модели**, используемые в алгоритме, имеют разные наборы гиперпараметров. Перечислим некоторые из них:

– *решающее дерево*: max_depth (глубина дерева), max_leaf_nodes (максимальное количество листьев в дереве);

– *случайный лес*: n_estimators (количество деревьев в лесу), max_depth (максимальная глубина каждого дерева), max_sample (доля данных, отводимых каждому отдельному дереву);

– *метод опорных векторов*: C (параметр регуляризации, при большем значении C меньше допускаются ошибки, но повышается вероятность переобучения), epsilon (допустимая ошибка), gamma (коэффициент ядра, при большем значении gammaучитываются только близкие точки);

– *линейная регрессия*: для стандартной линейной регрессии гиперпарамтеров для настройки нет.

Для подбора оптимальных гиперпараметров для всех базовых моделей сравним три метода: GridSearch, RandomizedSearch и генетический алгоритм.

Рассмотрим **алгоритм GridSearch** [7]:

1) определение пространства поиска: задается дискретное множество значений для каждого гиперпараметра модели, формируя многомерную сетку.

2) создание комбинаций параметров: генерируются все возможные комбинации гиперпараметров из заданных множеств.

3) последовательное обучение моделей: для каждой комбинации параметров:

a) обучается модель на тренировочных данных;

b) оценивается качество модели на валидационной выборке с использованием выбранной метрики.

4) выбор оптимальной комбинации: после перебора всех вариантов выбирается комбинация гиперпараметров, показавшая наилучшее качество модели.

**Алгоритм RandomizedSearch** отличается от GridSearch принципом исследования пространства гиперпараметров:

1) определение распределений параметров: для каждого гиперпараметра задается вероятностное распределение (равномерное, логарифмическое и др.).

2) случайная генерация комбинаций: случайным образом выбирается заданное количество комбинаций гиперпараметров из определенных распределений.

Шаги 3, 4 аналогичны алгоритму GridSearch.

Рассмотрим **генетический алгоритм** [5], адаптированный для решения нашей задачи:

1) создается начальная популяция, состоящая из 16 случайных комбинаций значений параметров в заданных диапазонах;

2) производится оценка качества прогнозов модели бустинга при заданных параметрах;

3) отбирается половина лучших особей;

4) двое случайно отобранных родителя скрещиваются путем вычисления среднего арифметического значения для каждого параметра;

5) для каждого потомка с вероятностью 0,15 производится мутация, представляющая собой изменение одного из параметров на 10 %;

6) среди родителей и потомков выбираются 16 лучших для создания новой популяции.

Подытожим наш алгоритм. Бустинг итеративен. Каждая последующая итерация работает с остатками предыдущей итерации, то есть с разностями между реальными значениями и предсказаниями предыдущих итераций. На каждой итерации может выиграть любая из 4 моделей (решающее дерево, случайный лес, метод опорных векторов и линейная регрессия), для каждой из которых мы каждый раз будем выбирать лучший алгоритм подбора оптимальных гиперпараметров. Это делает наш алгоритм адаптивным, то есть способным менять стратегию в зависимости от того, с какими данными он работает на каждом шаге.

## 4. Анализ результатов

Получим следующие результаты работы алгоритма (табл. 1).

**Итоговый результат** улучшенного бустинга — 0,9802.

Таблица 1

*Работа алгоритма*

| Номер итерации | Модель | Алгоритм подбора оптимальных гиперпараметров | $R^2$ | Лучший результат |
|---|---|---|---|---|
| 1 | решающее дерево | GridSearch | 0,6968 | линейная регрессия $R^2 = 0,8121$ |
| | | RandomizedSearch | 0,6789 | |
| | | генетический алгоритм | 0,6925 | |
| | случайный лес | GridSearch | 0,7865 | |
| | | RandomizedSearch | 0,7765 | |
| | | генетический алгоритм | 0,7876 | |
| | метод опорных векторов | GridSearch | –0,0701 | |
| | | RandomizedSearch | –0,0704 | |
| | | генетический алгоритм | –0,0703 | |
| | линейная регрессия | — | 0,8121 | |
| 2 | решающее дерево | GridSearch | 0,7355 | линейная регрессия $R^2 = 0,7778$ |
| | | RandomizedSearch | 0,7017 | |
| | | генетический алгоритм | 0,7024 | |
| | случайный лес | GridSearch | 0,7645 | |
| | | RandomizedSearch | 0,7718 | |
| | | генетический алгоритм | 0,7694 | |
| | метод опорных векторов | GridSearch | –0,0675 | |
| | | RandomizedSearch | –0,0683 | |
| | | генетический алгоритм | –0,0683 | |
| | линейная регрессия | — | 0,7778 | |
| 3 | решающее дерево | GridSearch | 0,7008 | RandomizedSearch $R^2 = 0,7393$ |
| | | RandomizedSearch | 0,6681 | |
| | | генетический алгоритм | 0,7124 | |
| | случайный лес | GridSearch | 0,7279 | |
| | | RandomizedSearch | 0,7393 | |
| | | генетический алгоритм | 0,7386 | |
| | метод опорных векторов | GridSearch | –0,0804 | |
| | | RandomizedSearch | –0,0811 | |
| | | генетический алгоритм | –0,0811 | |
| | линейная регрессия | — | 0,7392 | |
| 4 | решающее дерево | GridSearch | 0,9010 | линейная регрессия $R^2 = 0,9670$ |
| | | RandomizedSearch | 0,9003 | |
| | | генетический алгоритм | 0,9066 | |
| | случайный лес | GridSearch | 0,9037 | |
| | | RandomizedSearch | 0,9019 | |
| | | генетический алгоритм | 0,9087 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | метод опорных векторов | GridSearch | –0,0857 | |
| | | RandomizedSearch | –0,0867 | |
| | | генетический алгоритм | –0,0867 | |
| | линейная регрессия | — | 0,9670 | |
| 5 | решающее дерево | GridSearch | 0,9213 | линейная регрессия $R^2 = 0,9596$ |
| | | RandomizedSearch | 0,9077 | |
| | | генетический алгоритм | 0,9040 | |
| | случайный лес | GridSearch | 0,9226 | |
| | | RandomizedSearch | 0,9164 | |
| | | генетический алгоритм | 0,9205 | |
| | метод опорных векторов | GridSearch | –0,0882 | |
| | | RandomizedSearch | –0,0891 | |
| | | генетический алгоритм | –0,0891 | |
| | линейная регрессия | — | 0,9596 | |

Метод GridSearch показал лучший результат в 9 случаях (60 %), RandomizedSearch — в 2 случаях (13,3 %), а генетический алгоритм — в 4 случаях (26,7 %). Теория о том, что в разных случаях подходят разные методы оптимизации подтвердилась.

Линейная регрессия оказалась самой сильной моделью для решения данной задачи и уверенно одержала победу в 4 из 5 итераций. Однако метод опорных векторов показывал очень плохие результаты на каждой итерации (отрицательные значения коэффициенты детерминации), следовательно, его не стоит использовать как базовую модель для решения конкретно нашей задачи. Метод опорных векторов чувствителен к выбросам, а в данных содержится ряд квартир, отличающихся от остальных высокой или низкой ценой.

Рассмотрим **рейтинг параметров**, оказывающих наибольшее влияние на целевую переменную:

– building_type (тип дома).
– kitchen_area (площадь кухни);
– area (общая площадь);
– levels (количество этажей в здании);
– distance (расстояние до центра);
– level (этаж).

Заметим, что данный рейтинг отличается от того, который был получен по матрице корреляции. Это объясняется тем, что бустинг учитывает в том числе нелинейные зависимости и взаимодействие признаков между собой.

Сравним новый алгоритм с базовым (встроенным) алгоритмом бустинга (табл. 2).

Таблица 2

*Оценка качества построенных моделей*

| Модель | MSE | RMSE | MAE | $R^2$ |
|---|---|---|---|---|
| Бустинг (базовый алгоритм) | $8,8 \cdot 10^{10}$ | $2,97 \cdot 10^5$ | $2,33 \cdot 10^6$ | 0,9738 |
| Бустинг (новый алгоритм) | $6,64 \cdot 10^{10}$ | $2,58 \cdot 10^5$ | $1,85 \cdot 10^6$ | 0,9802 |

По всем четырем метрикам наш алгоритм показал результаты лучше, чем базовая реализация бустинга.

Перечислим **ключевые особенности** нового алгоритма бустинга:

– *большее количество базовых моделей*: добавлены дополнительные модели, например, случайный лес и линейная регрессия;

– *оптимизация параметров*: применяются специальные алгоритмы для подбора оптимальных гиперпараметров;

– *ранняя остановка*: реализована логика ранней остановки, чтобы избежать чрезмерного увеличения количества итераций;

– *обновление признаков*: после каждой итерации добавляется новый признак, представляющий результаты предыдущих предсказаний;

– *кросс-валидация:* используется кросс-валидация для оценки производительности модели;

– *скейлинг данных*: масштабирование помогает улучшить стабильность модели.

Этот алгоритм представляет собой комплексное решение, сочетающее в себе различные методы машинного обучения и оптимизацию для создания надежной регрессионной модели. Он позволяет адаптироваться к различным типам данных и задачам, а также предоставляет инструменты для интерпретации результатов.

## Заключение

В ходе работы был реализован алгоритм бустинга для прогнозирования стоимости квартир, включающий в себя несколько базовых моделей с адаптивным подбором гиперпараметров. Результаты работы алгоритма подтвердили эффективность предложенного подхода: коэффициент детерминации составил 0,9802, что превысило результат стандартного бустинга.

Алгоритм продемонстрировал способность учитывать нелинейные зависимости между признаками, что отразилось в изменении рейтинга их важности по сравнению с корреляционным анализом.

Разработанное решение представляет практическую ценность для рынка недвижимости и может быть адаптировано для других задач регрессионного анализа.

## Литература

1. *Аристова Е. М.* Модели принятия решений: учебное пособие / Е. М. Аристова. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. – 64 с.

2. *Алиева П. М.* Курс лекций по дисциплине «Многомерные статистические методы» / П. М. Алиева. – Махачкала, 2014. – 76 с.

3. *Смирнова Л. А.* Реализация метода градиентного бустинга для решения задачи определения стоимости недвижимости / Л. А. Смирнова // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Мужвузовской научной конференции молодых ученых, студентов и школьников (Воронеж, 23 апреля 2025 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2025.

4. *Лимановская О. В.* Основы машинного обучения: учебное пособие / О. В. Ливановская, Т. И. Алферьева; Министерство науки и высшего образования РФ. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2020. – 88 с.

5. *Панченко Т. В.* Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие / Т. В. Панченко, Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань : Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.

6. Что такое мультиколлинеарность? Вот все, что вам нужно знать. Skine. – URL: https://skine.ru/articles/260134/ (дата обращения: 25.10.2025).

7. Оптимизация гиперпараметров с помощью поиска по сетке и случайного поиска в Python. Хабр. – URL: https://habr.com/ru/companies/otus/articles/698370/ (дата обращения: 02.11.2025).

УДК 519.82

# РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ARIMA ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

**М. В. Глуховский, Е. М. Аристова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье разработана система поддержки принятия решений для анализа демографической ситуации в городах России. На основе данных о численности населения за 1994–2023 гг. проведена кластеризация городов методами k-средних и c-средних, выявившая территории с различной динамикой роста. Результаты позволяют дифференцировать подходы к региональной демографической политике.
**Ключевые слова:** демографический анализ, кластеризация, k-средних, c-средних, временные ряды, ARIMA, система поддержки принятия решений.

## Введение

Демографическая ситуация в России отличается значительной региональной дифференциацией, требующей современных инструментов анализа. Основной проблемой являются административно-территориальные изменения, искажающие реальные демографические тренды из-за скачкообразных изменений численности населения.

В работе предлагается система поддержки принятия решений, сочетающая методы анализа временных рядов и машинного обучения. Разработанный подход включает алгоритм обнаружения административных преобразований, использование модели ARIMA с оптимизацией параметров и методы кластеризации для выявления городов со схожей динамикой роста.

## 1. Постановка задачи и подготовка данных

**Постановка задачи:**

По данным о населении городов России (1994–2023 гг.) оценить демографическую ситуацию в конкретных городах, кластеризовать их по темпу роста населения и предложить способы улучшения ситуации.

**Решение:**

Имеется таблица, содержащая информацию о численности населения городов в период с 1994 по 2023 г.

Начнем с подготовки данных [1]. Заметим, что про Симферополь, Севастополь, Евпаторию и Керчь данных очень мало — только с 2015 года, так что исключим их из рассмотрения.

Нормализируем столбец «численность населения», используя метод Z-нормализации.

Моделирование временных рядов является важным инструментом для прогнозирования будущих значений ряда, что позволяет принимать более обоснованные решения в различных областях [2].

При анализе временных рядов численности населения городов РФ возникает методологическая проблема, связанная с административно-территориальными преобразованиями. Включение пригородных территорий в состав городов приводит к скачкообразным изменениям численности населения. Например, в 2010 г. в состав города Норильска были включены города Талнах и Кайеркан, ставшие районами Норильска, и население этих городов было включено в число жителей Норильска (рис. 1).

Такие административные изменения искажают реальные демографические тренды и снижают качество прогнозирования. Данные до и после реформы становятся несравнимы.

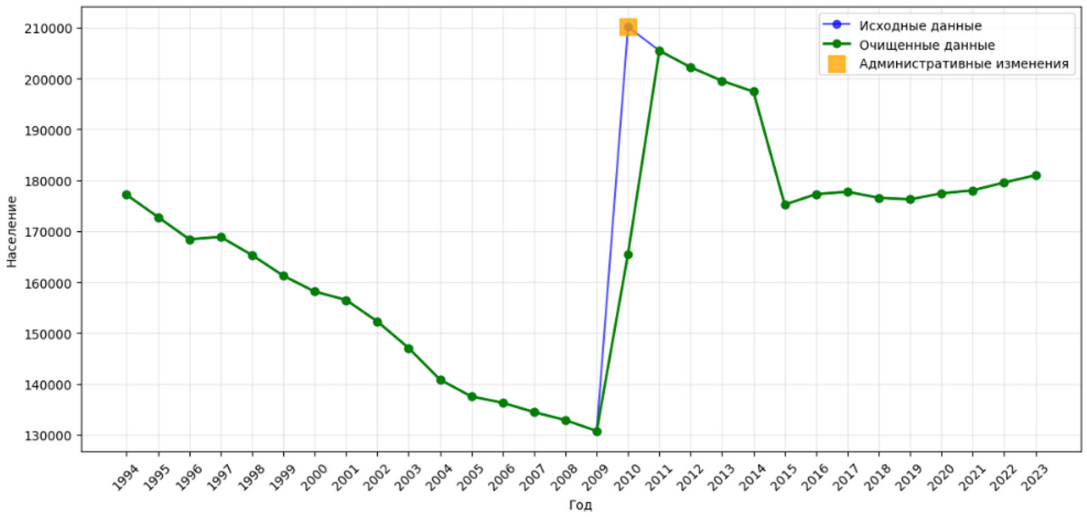



*Рис. 1. Расширение территории Норильска*

Для решения данной проблемы разработана многоуровневая **система обнаружения административных преобразований**:

1) обнаружение экстремальных скачков:
   – относительное изменение численности > 50 % за один год;
   – абсолютный прирост > 20 000 человек;
2) адаптивные пороги обнаружения:
   – размер города (нормализация по 50 000 населения);
   – историческая волатильность изменений;
   – региональные особенности демографической динамики;
3) контекстный анализ изменений:
   – сравнение средних значений до и после скачка;
   – анализ изменения угла наклона трендовой линии;
   – оценка волатильности в пост-реформенный период;
   – проверка сохранения нового уровня населения.

Для устранения влияния административных изменений на результаты анализа применяется **сегментарное моделирование**:

1) разделение временного ряда на периоды до и после административного изменения;
2) построение отдельных трендов для каждого сегмента;
3) плавный переход между сегментами через расчет переходного значения;
4) сохранение общей динамики при устранении скачкообразных изменений.

## 2. Реализация модели ARIMA

**ARIMA** — это модель, комбинирующая авторегрессионные и скользящие средние модели. ARIMA позволяет моделировать данные, не являющиеся стационарными, как это не требуется для AR- и MA-моделей [3].

ARIMA включает три параметра: параметр авторегрессии (p), параметр скользящего среднего (q) и параметр интегрирования (d). Рассмотрим данные параметры подробнее:

– параметр авторегрессии (p): этот параметр указывает количество предыдущих значений временного ряда, которые используются для предсказания текущего значения. Он определяет, сколько лагов (отставаний) будет включено в модель.

– параметр интегрирования (d): этот параметр определяет, сколько раз необходимо дифференцировать временной ряд, чтобы сделать его стационарным. Стационарный ряд — это ряд, у которого статистические свойства (среднее, дисперсия) не зависят от времени.

– параметр скользящего среднего (q): этот параметр указывает количество предыдущих ошибок предсказания, которые используются для предсказания текущего значения. Он определяет количество лагов ошибок, которые будут включены в модель.

Оптимальные гиперпараметры можно подобрать с помощью генетического алгоритма (ГА) или метода роя частиц (МРЧ). Сравним их и выберем тот, который лучше подойдет для решения задачи.

**ГА** работают на основе популяции возможных решений, которые представляют собой хромосомы [4]. Каждая хромосома кодирует потенциальное решение задачи. Процесс эволюции включает в себя следующие ключевые этапы:

1) создание популяции: сначала создается начальная популяция хромосом, которые могут быть случайными или основанными на определенных предположениях о решении.

2) оценка фитнес-функции: каждое решение оценивается с помощью функции фитнеса, которая измеряет, насколько хорошо оно решает задачу. Чем выше значение фитнеса, тем лучше решение.

3) селекция (отбор): на этом этапе выбираются лучшие хромосомы для размножения. Существует несколько методов селекции, включая рулеточный выбор, турниры и ранговую селекцию.

4) кроссовер (скрещивание): выбранные хромосомы комбинируются для создания новых «потомков». Этот процесс имитирует естественное размножение, где генетическая информация от родителей передается потомству.

5) мутация: для поддержания генетического разнообразия в популяции применяется мутация. Это случайные изменения в хромосомах, которые могут привести к созданию новых решений.

6) создание новой популяции: новые особи заменяют старую популяцию, и процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто удовлетворительное решение или не исчерпаются ресурсы (время, вычислительные мощности).

В нашем случае ГА будет выглядеть следующим образом:

1) создается начальная популяция, состоящая из 12 случайных комбинаций значений параметров (p, d, q) в заданных диапазонах;

2) производится оценка качества прогнозов модели при заданных параметрах с помощью метрики RMSE [7];

3) для каждой особи вычисляется вероятность её выбора в качестве родителя и с учетом этой вероятности формируются 3 пары;

4) скрещивание происходит путем случайного наследования каждого параметра от одного или другого родителя с равной вероятностью по схеме «два родителя — два потомка»;

5) для каждого потомка с вероятностью 0,1 производится мутация, представляющая собой изменение одного из параметров на 1 в пределах заданного диапазона;

6) среди родителей и потомков выбираются 12 лучших для создания новой популяции;

**МРЧ** имитирует поведение стаи птиц или косяка рыб, где каждая частица учится на собственном опыте и опыте соседей. Рассмотрим его алгоритм:

1) создание популяции: создается начальная популяция частиц в количестве N, где каждая частица представляет собой потенциальное решение задачи. Положение каждой частицы инициализируется случайным образом в пространстве поиска, скорости частиц также инициализируются случайными значениями.

2) инициализация лучших позиций: для каждой частицы запоминается ее начальное положение как лучшее индивидуальное достижение (pbest), а среди всех частиц определяется лучшая позиция как лучшее глобальное достижение (gbest).

3) цикл оптимизации (повторяется до выполнения критерия остановки):

а) оценка фитнес-функции;

б) обновление индивидуальных лучших позиций (pbest);

в) обновление глобальной лучшей позиции (gbest);

г) обновление скоростей частиц по формуле:

$$v_{new} = w \cdot v_{old} + c_1 \cdot r_1 \cdot (pbest - x_{old}) + c_2 \cdot r_2 \cdot (pbest - x_{old}),$$

где $w$ — коэффициент инерции, $c_1, c_2$ — коэффициенты ускорения (обычно равны приблизительно 2), $r_1, r_2$ — случайные числа от 0 до 1, $x_{old}$ — текущее положение частицы.

д) обновление позиций частиц по формуле:

$$x_{new} = x_{old} + v_{new};$$

4) проверка критериев остановки: проверяется, достигнуто ли максимальное число итераций, найдено ли решение с достаточной точностью или прекратилось ли улучшение решения за последние k итераций.

5) возврат результата: возвращается лучшее найденное решение (gbest) и соответствующее значение целевой функции.

Составим **алгоритм модели ARIMA** с подбором оптимальных параметров:

1) подготовка данных:

a) предобработка исходного временного ряда;

b) разбиение выборки на тестовую и тренировочную выборки;

2) подбор оптимальных параметров;

3) инициализация модели с полученными оптимальными параметрами;

4) обучение модели;

5) генерация прогнозов.

Разделим данные на тренировочные и тестовые, выделив на последние 15 % от всех данных, и, обучив модель ARIMA, сравним результаты для ГА и МРЧ (табл. 1).

Таблица 1

*Сравнение алгоритмов для определения оптимальных гиперпараметров*

| Алгоритм для определения гиперпараметров | MSE | RMSE | MAE | MAPE |
|---|---|---|---|---|
| ГА | $1{,}14 \cdot 10^{10}$ | $1{,}01 \cdot 10^{5}$ | $9{,}2 \cdot 10^{4}$ | 3,22 % |
| МРЧ | $7{,}05 \cdot 10^{10}$ | $1{,}65 \cdot 10^{5}$ | $1{,}56 \cdot 10^{5}$ | 4,37 % |

ГА показал лучший результат по всем метрикам, поэтому будем использовать его для дальнейшей работы.

### 3. Кластеризация городов по темпу роста численности населения

Перейдем к кластеризации. Для начала определим оптимальное количество кластеров с помощью **метода локтя** (рис. 2).

Начиная с 4, сумма квадратов внутрикластерных расстояний до центра кластера перестает резко убывать, поэтому оптимально будет разбить города на 4 кластера.

Однако для сравнения воспользуемся **методом силуэта** (рис. 3).

Оптимальное количество кластеров — это компромисс между максимальным средним коэффициентом силуэта и визуально однородной структурой графика. Метод силуэта определил 6 как наилучший вариант. Будем разбивать на 6 кластеров, так как это позволит сделать анализ более детальным.

Для этого воспользуемся **методом $k$-средних** [5]:

1) выбираем число кластеров $k$;

2) выбираем $k$ случайных значений, эти точки будут работать как центроиды кластеров;

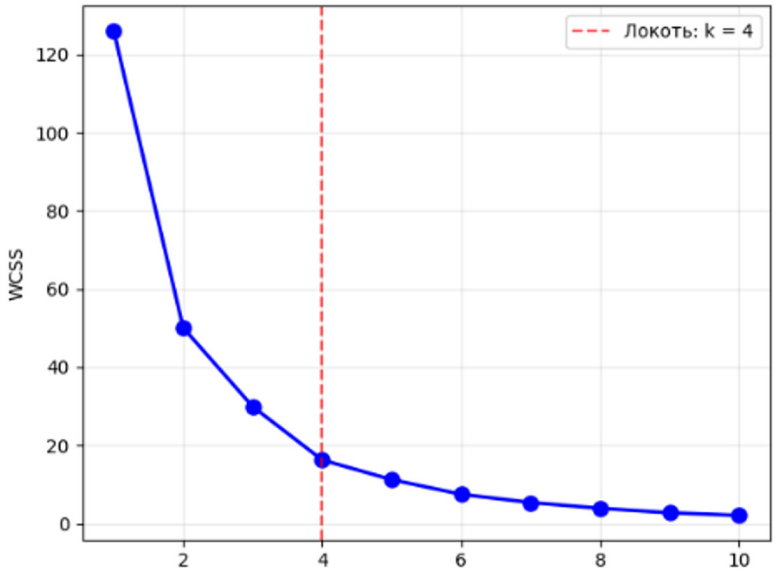



*Рис. 2. Метод локтя*

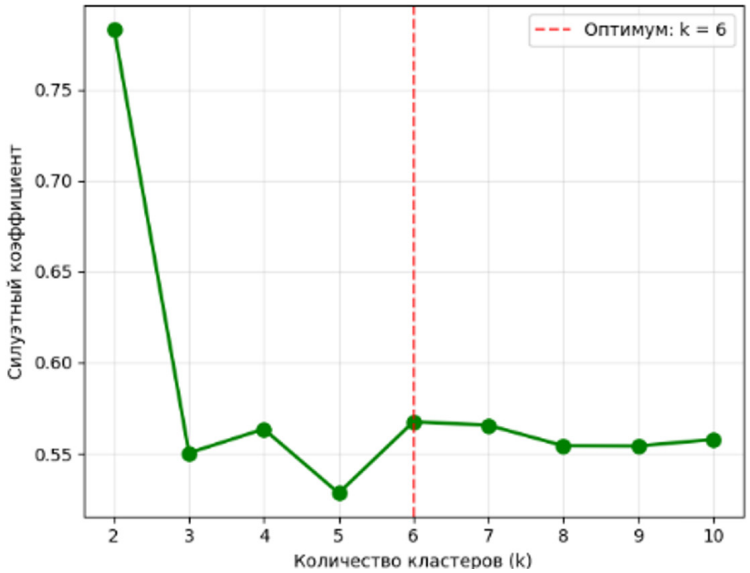



*Рис. 3. Метод силуэта*

3) создаем кластеры, для этого измеряем расстояние между каждым значением наших данных до каждого из центроидов по формуле (в двумерном пространстве):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

где $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — координаты точек, между которыми вычисляется расстояние, а затем добавляем его к наиболее близкому кластеру;

4) вычисляем новый центроид каждого кластера как среднее арифметическое абсцисс всех точек, попавших в данный кластер, и среднее арифметическое ординат этих точек;

5) оцениваем качество каждого кластера, вычисляя величину Within-Clustersumofsquares (WCSS) — сумму квадратов внутрикластерных расстояний до центра кластера:

$$WCSS = \sum_{j=1}^{k} \sum_{x_i \in j} d(x_i; \overline{x}_j)^2,$$

где $j$ — номер кластера, $x_i$ — точки, принадлежащие кластеру $j$, $\overline{x}_j$ — центроид кластера $j$;

6) повторяем шаги 3–5 относительно новых центроидов, пока кластеры не перестанут меняться.

Получим следующее разбиение (рис. 4).

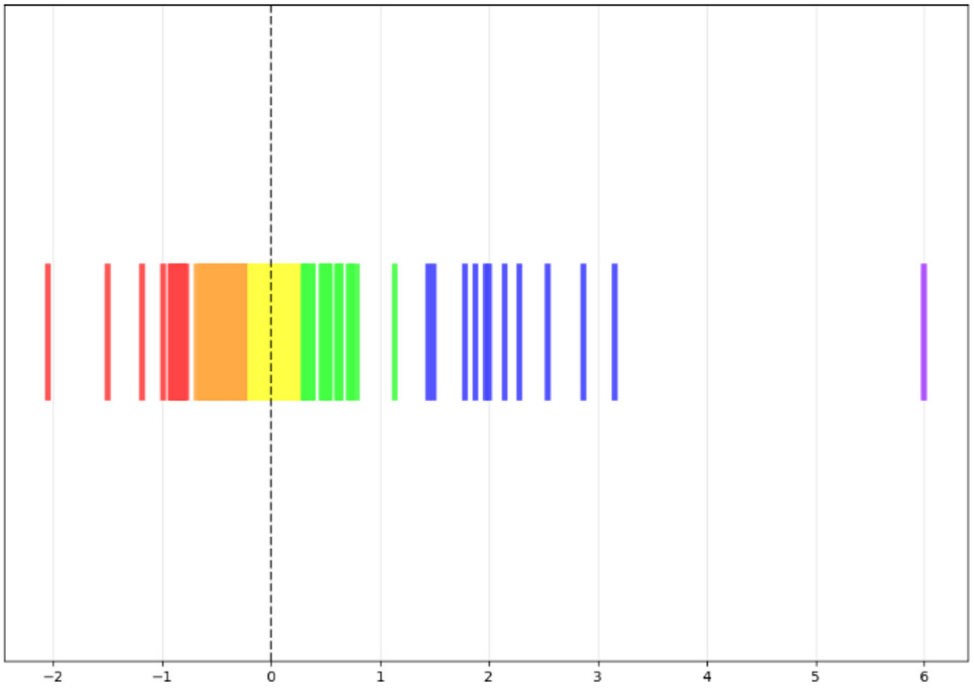



*Рис. 4. Разбиение на кластеры методом k-средних*

В первый кластер с наименьшим темпом роста населения попало всего 15 городов, в том числе, Норильск. Во второй кластер попало 59 городов, в третий кластер — 74 города, в четвертый — 24 города, в пятый — 11 городов, в шестой кластер с самым большим темпом роста попал всего 1 город — Балашиха. Воронеж оказался в третьем кластере с умеренным ростом населения.

Стоит отметить, что в пятый кластер попало очень много городов из Подмосковья, что может быть обусловлено тем, что качество жизни (медицина, транспорт, возможность получить хорошее образование и посетить культурные мероприятия) не сильно уступает московскому, и многие готовы тратить ежедневно время на поездку в столицу, экономя на жилье.

Попробуем разбить города на кластеры с помощью ещё одного метода — метода нечеткой кластеризации с-средних. Нечеткие методы кластеризации позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким (или даже всем) кластерам, но с различной степенью принадлежности [6]. Нечеткая кластеризация во многих ситуациях более естественна, чем четкая, например, для объектов, расположенных на границе кластеров.

Рассмотрим **алгоритм метода нечеткой кластеризации** $c$**-средних**:

1) зададим количество кластеров $c$, коэффициент нечеткости $m$, порог остановки $\varepsilon$ и максимальное количество итераций $\max_iter$;

2) случайным образом сгенерируем матрицу принадлежностей $U = \mu_{ij}$, где $\mu_{ij}$ означает степень принадлежности $i$-го объекта данных к $j$-му кластеру;

3) на каждой итерации вычисляются центроиды кластеров по формуле:

$$C_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{m} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{m}},$$

где $x_i$ — $i$-й вектор данных, а $n$ — общее количество объектов;

4) на основе рассчитанных центроидов обновляются значения степеней принадлежности:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{c} \frac{\left\| x_i - C_j \right\|}{\left\| x_i - C_k \right\|^{\frac{2}{m-1}}}};$$

5) проверяются условия остановки: $\max_iter \left\| U_{new} - U_{old} \right\|$ или достигнуто $\max_iter$.

Получим следующее разбиение (рис. 5).

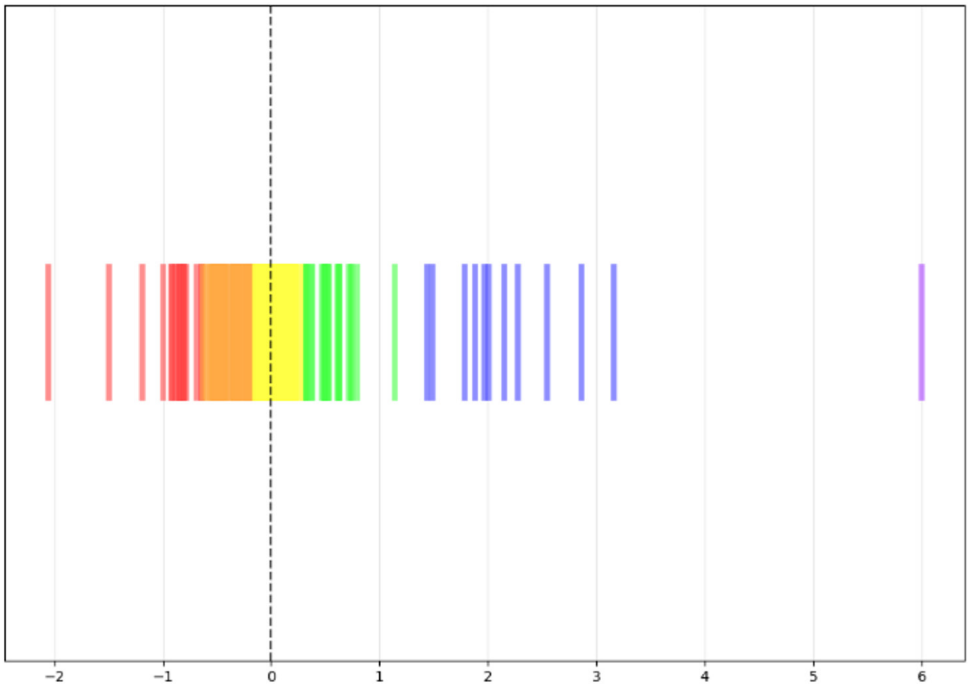



*Рис. 5. Разбиение на кластеры методом c-средних*

Метод c-средних степенью непрозрачности цвета отражал степень принадлежности города к данному кластеру.

Метод k-средних продемонстрировал четкое разделение объектов по кластерам, что обеспечивает однозначную интерпретацию результатов. Полученное разбиение на 6 кластеров выявило ярко выраженные группы городов с различной демографической динамикой: от депрессивных регионов с отрицательным приростом до rapidly развивающихся агломераций. Особенностью метода является его детерминированность — каждый город относится строго к одному кластеру, что упрощает последующий анализ и принятие управленческих решений.

Метод c-средних (нечеткая кластеризация) показал более гибкий подход к распределению объектов. Ключевым преимуществом метода является возможность определения степени принадлежности городов к нескольким кластерам одновременно, что особенно ценно для объектов, находящихся на границах кластерных групп. Это позволяет выявить переходные зоны в демографическом развитии городов и более точно моделировать сложные демографические процессы.

Сравнительный анализ показал, что метод k-средних более эффективен для первоначального стратегического анализа, когда требуется четкая классификация территорий для дифференциации мер государственной поддержки. В то же время, метод c-средних предоставляет более тонкий инструмент для тактического планирования, позволяя учитывать переходные состояния в демографическом развитии городов.

Оба метода подтвердили существование выраженной региональной дифференциации в демографических процессах, однако нечеткая кластеризация выявила более сложную структуру взаимосвязей между демографическими показателями различных городов.

## Заключение

Разработанная система поддержки принятия решений позволяет эффективно анализировать демографическую ситуацию в городах России. Применение методов кластеризации выявило четкую региональную дифференциацию по темпам роста населения. Полученные результаты могут быть использованы для целевого распределения бюджетных средств и разработки адресных мер демографической политики.

## Литература

1. *Глуховский М. В.* Машинное обучение в прогнозировании / М. В. Глуховский, Л. А. Смирнова // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Мужвузовской научной конференции молодых ученых, студентов и школьников (Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2024. – С. 150–157.

2. *Артамонов Н. В.* Введение в анализ временных рядов: учебное пособие для вузов / Н. В. Артамонов, Е. А. Ивин, А. Н. Курбацкий, Д. Фантаццини; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики. – Вологда : ВолНЦ РАН, 2021. – 134 с.

3. *Глуховский М. В.* Оптимизация параметров модели ARIMA для решения демографических задач / М.В. Глуховский // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Мужвузовской научной конференции молодых ученых, студентов и школьников (Воронеж, 23 апреля 2025 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2025.

4. *Панченко Т. В.* Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие / Т. В. Панченко, Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.

5. *Барсегян А. А.* Методы анализа данных: OLAP и Data Mining / А. А. Барсегян, М. С. Куприянов, В. В. Степаненко, И. И. Холод. – Санкт-Петербург : БВХ-Петербург, 2004. – 336 с.

6. *Глуховский М. В.* Нечеткое моделирование в среде Matlab / М. В. Глуховский, Е. М. Аристова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции (Воронеж, 4–6 декабря 2023 г.). – Воронеж, 2023. – С. 401–407.

7. Метрики качества линейных регрессионных моделей. Loginom. – URL: https://loginom.ru/blog/quality-metrics (дата обращения: 19.10.2025).

УДК 519.86

# АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ: ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ И СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

**М. В. Гордеева**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Данная статья посвящена анализу детерминированных и стохастических моделей управления запасами. Актуальность темы обусловлена трудностями, с которыми сталкиваются компании при выборе моделей для товаров с различным характером спроса, что приводит к неоптимальным уровням запасов. Целью работы является обзор и сравнительный анализ математических моделей, позволяющих определять оптимальные объемы пополнения и интервалы между поставками в условиях постоянного и случайного спроса.

**Ключевые слова:** управление запасами, детерминированные модели, стохастические модели, многономенклатурные запасы, точка заказа, модель «Точка заказа — Размер заказа», модель «Точка заказа — Максимальный уровень запаса», синхронизированные поставки, оптимальный размер заказа, страховой запас.

## Введение

Управление запасами является основой эффективной логистики и функционирования цепочек поставок. Крупные компании управляют десятками тысяч наименований на складах, каждое из которых отличается стоимостью, условиями хранения, характером спроса и способами пополнения. Это создает потребность в специально разработанных системах и моделях управления запасами, которые, в зависимости от фактора неопределенности, традиционно делятся на детерминированные и стохастические. Несмотря на развитие вычислительной техники и широкую доступность данных, многие компании сталкиваются с трудностями при классификации запасов и выборе адекватной модели управления для каждой группы. Анализ литературы и практики показывает, что распространенной проблемой является использование детерминированной модели для товаров с высоковариабельным спросом, что приводит к нехватке или избыткам продукции. Кроме того, в управлении запасами встречается игнорирование многономенклатурности, то есть рассмотрение каждой позиции без учета общих ограничений, таких как складские площади или бюджет, и синергетических эффектов, например, совместных закупок. Данная статья посвящена обзору математических моделей, которые позволяют определять объемы пополнения запасов и времена между смежными пополнениями, которые оказываются оптимальными в случае постоянного спроса на продукцию и демонстрируют высокую эффективность в условиях случайного спроса [1, 2].

## 1. Детерминированные модели управления запасами

В контексте теории и практики управления запасами, детерминированные модели традиционно классифицируются как наиболее простые. Данные модели характеризуются предположением о постоянстве спроса на материальные ресурсы или, как минимум, о его известности в пределах определенного временного горизонта.

Многие известные модели управления запасами, рассчитанные на постоянный спрос, предполагают хранение одного продукта, независимое управление несколькими продуктами или их объединение в комплекты. Однако в реальности склады вынуждены содержать широкий ассортимент товаров, что исключает возможность их независимого управления. В связи с

этим далее рассматриваются принципы построения моделей для многономенклатурных запасов в условиях недопустимости дефицита.

### *1.1. Однопродуктовая модель, предполагающая отсутствие дефицита запасов*

Одной из самых известных и распространенных моделей для определения объема пополнения запасов, когда на складе хранится один тип продукции, является однопродуктовая модель Уилсона — Харриса. Общие затраты на доставку продукции и хранение запасов в этом случае могут быть представлены как:

$$D(q) = \frac{c_h q}{2} + C_s \frac{R}{q}, \tag{1}$$

где $c_h$ — затраты на хранение единицы продукции на единицу времени;

$q$ — объем хранящейся продукции на складе;

$C_s$ — стоимость одной поставки для всех групп продуктов;

$R$ — интенсивность спроса.

Оптимальное значение для объема пополняемой продукции $q^*$, находится из как точка минимума функции общих затрат $D(q)$. Чтобы найти экстремум, необходимо взять производную функции $D(q)$ по переменной $q$ и приравнять ее к нулю: $\frac{dD(q)}{dq} = 0.$

Дифференцирование функции затрат по переменной $q$ дает:

$$\frac{dD(q)}{dq} = \frac{c_h}{2} - C_s \frac{R}{q^2}.$$

Отсюда

$$q^2 = \frac{2C_s R}{c_h}.$$

Следовательно, экстремальное значение переменной $q$ определяется выражением:

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_s R}{c_h}}. \tag{2}$$

### *1.2. Многопродуктовая модель с синхронизированными поставками*

В случае с многопродуктовыми запасами, использование формул (1)–(2) становится нецелесообразным, так как для каждого продукта будет определена своя оптимальная величина и свое время возобновления поставки, что приводит к несинхронизированным графикам поставок. Для обеспечения процесса синхронизации необходимо одновременное пополнение группы продуктов с общим интервалом времени $t_s$. На рис.1 представлено изменение величины запасов при одновременной поставке разных продуктов:

В этом случае целесообразно использовать многопродуктовую модель с синхронизированными поставками, которая имеет следующий вид:

$$D(t_s) = \sum_{i=1}^{L} \frac{c_i r_i t_s}{2} + \frac{C_s}{t_s}, \tag{3}$$

где $L$ — количество типов продукции;

$c_i$ — стоимость хранения единицы продукта $i$ в единицу времени;

$r_i$ — спрос на продукцию $i$ в единицу времени;

$C_s$ — стоимость одной поставки для всех групп продуктов;

$t_s$ — время между смежными пополнениями запасов.

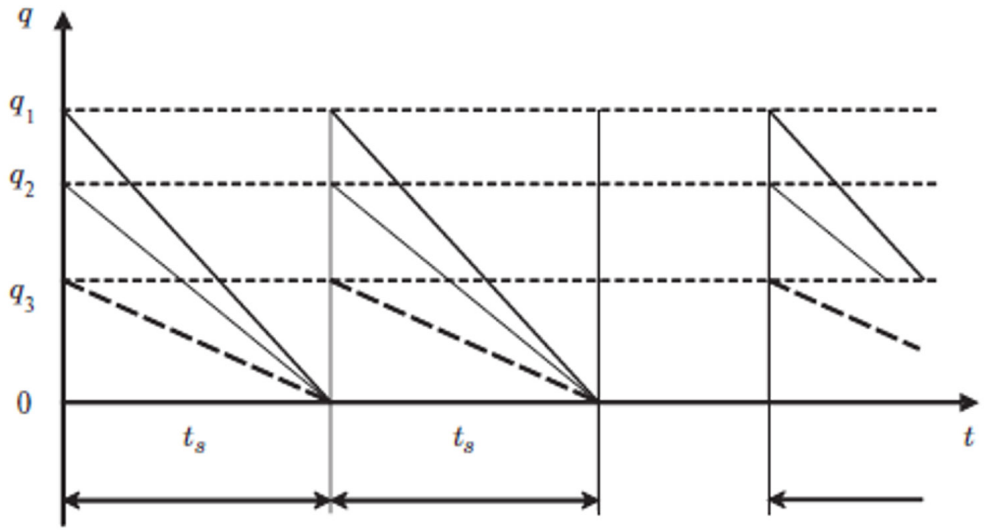



*Рис. 1. График изменения величины запасов при одновременной поставке разных продуктов*

Тогда, оптимальное время между поставками рассчитывается как:

$$t_i^* = \sqrt{\frac{2C_s}{\sum_{i=1}^{n} c_i r_i}}. \tag{4}$$

Таким образом, выражение для оптимального объема заказа $i$-го продукта имеет вид [1]:

$$q_i^* = r_i t_s^*. \tag{5}$$

## 2. Стохастические модели управления запасами

Как было отмечено во введении, распространенной ошибкой является использование детерминированных моделей для товаров с высоковариабельным спросом. Для преодоления этой проблемы требуется перейти к использованию моделей, учитывающих стохастическую природу спроса.

Эти модели оперируют вероятностными характеристиками спроса, такими как математическое ожидание, дисперсия, закон распределения случайной величины. Такой подход позволяет количественно оценить риски дефицита, а также оптимизировать объем страхового запаса, тем самым формируя политику пополнения, обеспечивающую устойчивое функционирование логистической системы в стохастической среде.

### *2.1. Модель «Точка заказа — Размер заказа» ($(s,Q)$-модель)*

Данная модель относится к классу моделей с непрерывным контролем уровня запасов.

Ключевые параметры обозначаются следующим образом:

$s$ — точка заказа, минимальный уровень запасов, при достижении которого необходимо сделать заказ;

$Q$ — фиксированный объем заказа.

Заказ на пополнение запасов размещается в момент, когда позиционный уровень запаса снижается до $s$. Позиционный уровень запаса представляет собой сумму физического остатка на складе и уже размещенных, но еще не полученных заказов. Использование позиционного уровня, а не физического остатка исключает дублирование заказов, так как учитывает весь товар, находящийся в цепи поставок.

Данную модель можно интерпретировать следующим образом: весь запас условно разделяется на две части по принципу двухбункерной системы — рабочий запас (первый бункер), использующийся для удовлетворения текущего спроса, и буферный запас (второй бункер), объем которого соответствует точке заказа $s$.

Для корректной работы данной модели необходимо соблюдение условия, чтобы в системе одновременно находилось не более одного невыполненного заказа. Это накладывает ограничение на размер $Q$: он должен существенно превышать средний спрос за время выполнения заказа $t$, то есть $Q > \bar{D} \times t$ ($\bar{D}$ — средний дневной спрос).

Резюмируя вышесказанное, логику принятия решения о заказе продукции можно представить так: в произвольный момент времени $t$ рассчитывается позиционный уровень запаса $L(t)$. Если $L(t) \le s$, то принимается решение сделать заказ объемом $Q$, при этом точка заказа $s$ служит главным образом для покрытия риска возникновения дефицита в течение времени выполнения заказа и рассчитывается как: $s = \bar{D} \times t + SS$, где страховой запас $SS$ зависит от дисперсии спроса за время выполнения заказа $t$ [2].

Размер заказа $Q$ преимущественно влияет на баланс между затратами на размещение заказа и хранение. Для его определения в условиях стохастического спроса часто в качестве аппроксимации используют детерминированную формулу Уилсона — Харриса (см. п.1.1), подставляя в нее значение среднего спроса $\bar{D}$:

$$Q \approx \sqrt{\frac{2C_s \bar{D}}{c_h}}.$$

### *2.2. Модель «Точка заказа — Максимальный уровень запаса» ($(s,S)$-модель)*

Эта модель также предполагает непрерывный контроль, и, как и в модели $(s,Q)$, пополнение заказывается тогда, когда уровень запасов опускается до точки заказа $s$ или ниже. Однако, в отличие от системы $(s,Q)$, используется переменный объем заказываемой партии, ровно столько, чтобы поднять уровень запасов до максимального уровня $S$.

Объем заказа в момент времени $t$ определяется как $Q(t) = S - L(t)$ при условии, что $L(t) \le s$.

Стоит отметить, что модель $(s,S)$ имеет общие затраты на пополнение, хранение запасов и содержание склада, которые не больше, чем у модели $(s,Q)$. Однако вычислительные усилия для нахождения наилучшей пары $(s,S)$ существенно выше. Следовательно, система $(s,Q)$ может быть лучшим выбором, за исключением случаев работы с позициями, где потенциальная экономия значительна [2].

## Заключение

Проведенный анализ некоторых моделей, используемых для управления запасами, позволяет выявить особенности применения детерминированных и стохастических моделей в условиях различной природы спроса. На основе анализа математического аппарата и областей применения моделей управления сформулированы следующие выводы: для товаров со стабильным спросом оптимальными являются детерминированные модели, среди которых многопродуктовая модель с синхронизированными поставками показывает большую эффективность за счет координации пополнения различных товарных позиций и снижения совокупных логистических издержек; в условиях случайного спроса возникает необходимость перехода к стохастическим системам управления. Модель $(s,Q)$ с фиксированным размером заказа обеспечивает простоту и устойчивость управления, тогда как модель $(s,S)$ с переменным объемом пополнения позволяет достичь более высокой экономической эффективности за счет адаптации к колебаниям спроса.

Перспективным направлением для дальнейших исследований является развитие комбинированных моделей управления, адаптирующихся к изменению характера спроса, а также учет кросс-функциональных ограничений цепочек поставок.

**Литература**

1. *Калинин Н. М.* Модели управления многопродуктовыми запасами при переменном спросе / Н. М. Калинин, Е. Н. Хоботов // Институт системного анализа РАН. – 2011. – № 4. – С. 1–10.

2. *Silver E. A.* Inventory and Production Management in Supply Chains / E. A. Silver, D. F. Pyke, D. J. Thomas. – Boca Raton : CRC Press, 2017. – 674 p.

УДК 004.942, 52-17

# АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ *N*-ТЕЛ

**И. А. Горте, М. А. Бутенко, Н. М. Кузьмин**

*Волгоградский государственный университет*

**Аннотация.** В работе представлены результаты анализа данных численного моделирования динамики *N*-тел во внешнем гравитационном потенциале темного гало.Проведено более сотни численных экспериментовс использованием реализации алгоритма TREECode, распараллеленной с помощью технологии OpenMP, в которых варьировались масса и шкала темного гало.Анализ результатов позволил выявить условия формирования долгоживущих бароподобных структур для галактик поздних типов по классификации Хаббла, а также изучить влияние начальных условий на некоторые особенности эволюции спиральной структуры и диска в целом. Было показано, что устойчивые бароподобные структуры формируются при малых массах темного гало и больших значениях его шкалы, а при низких значениях дисперсий скоростей звездного диска происходит разогрев диска.

**Ключевые слова:** численное моделирование, динамика *N*-тел, дисковые галактики, галактический бар, темное гало, бароподобная структура, обработка результатов численного моделирования, шкала темного гало, масса темного гало, фурье-анализ.

## Введение

Численное моделирование является одним из основных методов исследования динамики звездных систем, поскольку аналитические решения недостижимы из-за нелинейности и многомерности систем [1, 2]. Моделирование $N$-тел позволяет изучать эволюцию гравитирующих систем, таких как галактики, и исследовать формирование различных структур — баров, спиральных рукавов, асимметрий [3, 4].

Нами были проведены серии численных экспериментов по моделированию звездной компоненты дисковых галактик. Моделировались галактики поздних типов, в которых отсутствует балдж, азвезды вращаются во внешнем потенциале темного гало. Главным параметром, позволяющим варьировать форму кривой вращения диска, является шкала гало $a_h$. Более подробно с математическим описанием моделей, подобных представленным здесь, можно ознакомиться в работе [2].

При численном моделировании важной задачей является эффективная обработка и визуализация результатов, которые представляют собой большие объемы данных о координатах и скоростях частиц. Существующие пакеты визуализации не всегда удовлетворяют специфическим требованиям анализа результатов $N$-body моделирования, что обусловило необходимость разработки для этого специализированного инструмента.

Припроведениианализа результатов большого количества численных экспериментов были выявлены некоторые закономерности для начальных условий для эволюции звездного диска, при которых формируется долгоживущий бар и спиральная структура. Такое массовое моделирование может быть полезно для получения набора данных для обучения нейросетевых моделей, которые могут помочь в поиске наблюдаемых объектов, эволюция которых соответствует нашим численным моделям.

## 1. Методы и алгоритмы

### *1.1. Модель N-тел и начальные условия*

Для моделирования звездной компоненты галактик используется система $N$-тел, динамика которой описывается вторым законом Ньютона:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, i\neq j}^{N} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{F}_{si},$$

где $\mathbf{f}_{ij}$ — сила взаимодействия между частицами, $\mathbf{F}_{si}$ — внешняя сила, обусловленная потенциалом гало, балджа и диска.

Для сглаживания потенциала на малых расстояниях используется модель Пламмера с радиусом обрезания $r_c$:

$$\Psi_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{\sqrt{r_{ij}^2 + r_c^2}},$$

где $r_{ij}$ — расстояние между частицами.

Начальные условия задаются в виде экспоненциального диска:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \exp(-r / L_d),$$

где $\sigma_0$ — центральная поверхностная плотность, $L_d$ — радиальная шкала диска.

На рис. 1 приведена схема строения дисковой галактики, слева — вид с ребра, справа — плашмя.

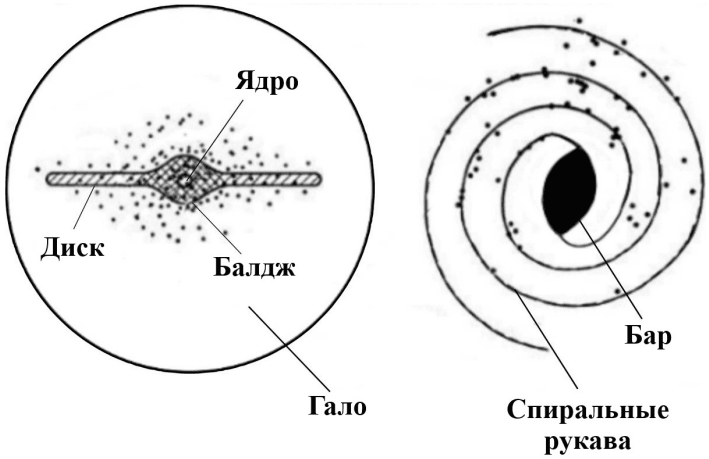



*Рис. 1. Строение дисковой галактики*

### *1.2. Алгоритм проведения численного эксперимента для моделирования динамики N-тел*

Пакет программ, который был использован для численных экспериментов по моделированию динамики $N$-тел и анализа их результатов состоит из четырех основных модулей, представленных на рис. 2. Модуль инициализации позволяет создать начальное состояние системы с равновесным диском, при этом не учитывается равновесие системы вдоль вертикальной координаты. Для запуска основного цикла интегрирования по времени с использованием метода TREECode. необходимо сгенерировать систему частиц с необходимыми значениями координат и скоростей с помощью модуля IniState.

Каждое состояние динамической системы в заданный момент расчетного временит, полученное путем работы модуля TREECode, поступает в модуль обработки результатов, где происходит расчет всех необходимых для дальнейшего анализа характеристик либо в ячей-

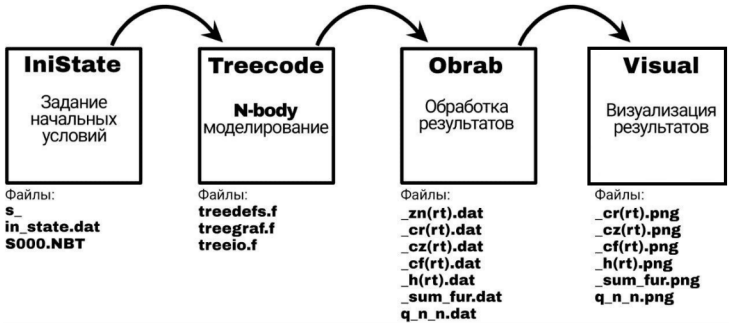



*Рис. 2. Алгоритм проведения численного эксперимента*

ке цилиндрической сетки, либо в кольце; также выполняется Фурье-анализ. Модуль визуализации позволяет в пакетном режиме строить графики распределения параметров, которые необходимы для анализа. Для визуализации реализовано специализированное программное обеспечение на языке Python, интерфейс которого реализован с использованием библиотеки Tkinter, а для построения графиков и настройки свойств их отображения применялась библиотека Matplotlib. Программа предоставляет возможности пакетной обработки функций двух переменных, построения временных рядов параметров на различных радиусах и визуализации фурье-амплитуд.

### *1.3. Обработка результатов моделирования*

Результаты моделирования представляют собой наборы трех координат и трех компонент скоростей частиц в декартовой системе координат. Для дальнейшего анализа данные переводятся в цилиндрическую систему координат $(r, \varphi, z)$. Для каждой частицы нужно определить индексы ячейки цилиндрической сетки, в которой она находится, в каждый момент времени $t_n$ (см. рис. 3).

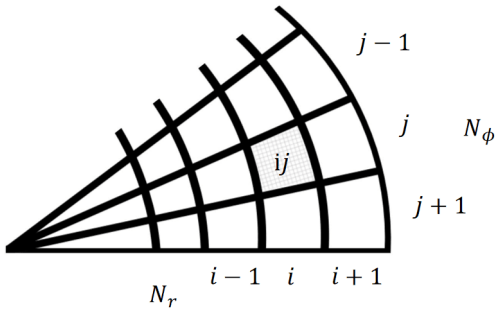



*Рис. 3. Фрагмент цилиндрической сетки, использованной для расчета усредненных характеристик*

Все необходимые для анализа характеристики частиц, такие как дисперсии скоростей и полутолщина диска, усредняются в ячейках цилиндрической сетки.

Затем, когда мы определили, какой ячейке принадлежит частица и количество частиц в каждой ячейке $N_{ijk}$, можно найти усредненные характеристики в центре анализируемой ячейки. Значения дисперсий скоростей $c_\varphi$, $c_r$ и $c_z$ рассчитываются согласно выражениям:

$$\left(c_\varphi\right)_{ij}^n = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N_{ij}} \left[ v_p - \left(V_\varphi\right)_{ij}^n \right]^2}{N_{ij}}}, \quad \left(c_r\right)_{ij}^n = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N_{ij}} \left[ v_p - \left(V_r\right)_{ij}^n \right]^2}{N_{ij}}}, \quad \left(c_z\right)_{ij}^n = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N_{ij}} \left[ v_p - \left(V_z\right)_{ij}^n \right]^2}{N_{ij}}}.$$

Для оценки толщины диска $h$ для каждой $ij$-й ячейки воспользуемся выражением:

$$h_{ij}^{n} = 1.102658\sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N_{ij}}\left[z_p - \left(Z_0\right)_{ij}^{n}\right]^2}{N_{ij}}}.$$

## 2. Анализ результатов численного моделирования динамики N-тел

### *2.1. Постановка численного эксперимента динамики N гравитирующих тел*

Было проведено более сотни численных экспериментов, моделирующих динамику $N$-тел, вращающихся во внешнем гравитационном потенциале темного гало. В моделях рассмотрено четыре различных значения массы темного гало $M_h$ и по четыре значения шкалы гало $a_h$ для каждой массы. Линейная шкала квазиизотермической модели темного гало $M_h$ в наших экспериментах является основным параметром, определяющим форму кривой вращения галактического диска. Балдж в наших моделях не учитывается, что соответствует галактикам поздних типов. В проведенных экспериментах были рассмотрены следующие значения параметра $M_h$: 0.5, 1.0, 1.5 и 2.0. Для шкалы $M_h$ для каждого из значений массы темного гало были использованы значения 0.15, 0.25, 0.35 и 0.45.

Параметры базовой модели для каждого из экспериментов включают в себя $L_{cr}$ и $L_{cz}$ — шкалы для законов распределения дисперсий, значения обоих параметров были равны 1.4. В табл. 1 приведены соответствующие различным экспериментам значения характеристик дисперсий радиальных $c_{r_0}$ и вертикальных скоростей $c_{z_0}$ и толщины диска $h_0$.

### *2.2. Результаты численных экспериментов, моделирующих динамику N-тел при различных параметрах темного гало*

Анализ результатов позволил выделить четыре основных сценария. Приведем примеры каждого и опишем по порядку.

При малых значениях $M_h$ и больших $a_h$, а также больших значениях дисперсий скоростей и толщины диска формируется долгоживущая бароподобная структура. На рис. 4 можно видеть доминирование второй Фурье-моды,которое сохраняется на протяжении всего времени моделирования.Вторая мода показывает наличие бара или двухрукавной спирали. По распределению поверхностной плотности на рис. 5, начиная со времени $t = 6$, что соответствует двум периодам вращения нашего диска, наблюдается ярко выраженный бар.Данный расчет соответствует параметрам эксперимента 007 из табл. 1 и $M_h = 0.5,\ a_h = 0.45$.

Таблица 1

*Диапазон начальных значений дисперсий скоростей и толщины диска для каждого значения из варьируемых и $M_h$ и $a_h$*

| Номер эксперимента | $c_{r_0}$ | $c_{z_0}$ | $h_0$ |
|---|---|---|---|
| 001 | 0.25 | 0.125 | 0.01 |
| 002 | 0.30 | 0.150 | 0.011 |
| 003 | 0.40 | 0.175 | 0.0125 |
| 004 | 0.50 | 0.200 | 0.015 |
| 005 | 0.60 | 0.225 | 0.0175 |
| 006 | 0.70 | 0.250 | 0.02 |
| 007 | 0.80 | 0.300 | 0.0225 |
| 008 | 0.90 | 0.350 | 0.025 |

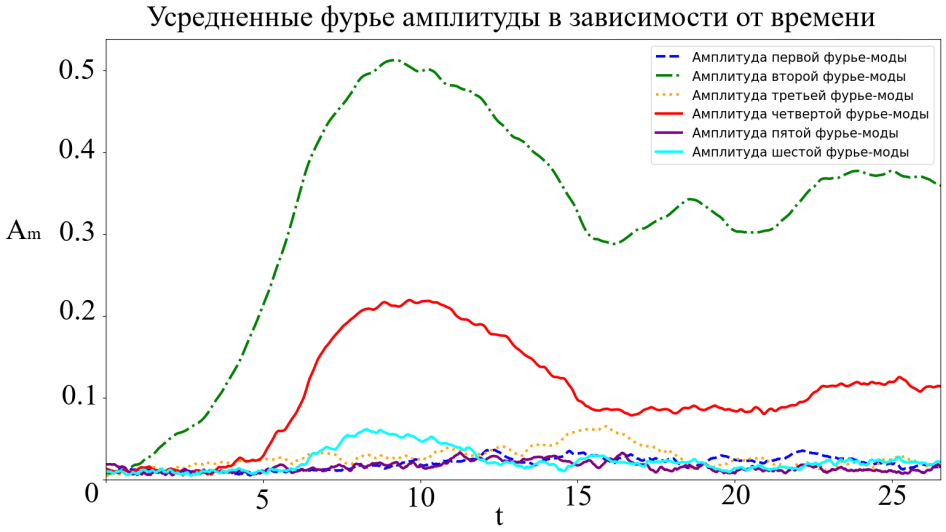



*Рис. 4. Зависимости усредненных фурье-амплитуд от времени для эксперимента 007, $M_h = 0.5$, $M_h = 0.45$*

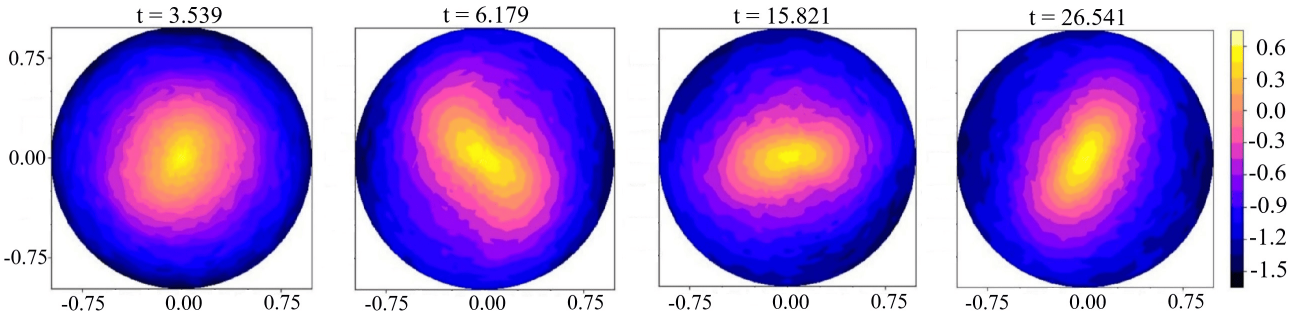



*Рис. 5. Распределение поверхностной плотности в различные моменты расчетного времени для эксперимента 007, $M_h = 0.5$, $M_h = 0.45$*

Второй набор расчетов, результаты которых можно выделить, также приводит к формированию бароподобных структур. В них происходит перераспределение массы в диске, меняется его центр масс, после чего наш анализ, основанный на усреднении по цилиндрической системе координат, становится малоэффективным. На рис. 6 видно абсолютное доминирование первой моды, начиная приблизительно с пятого периода вращения диска, что указывает на нарушение симметрии в системе. Амплитуда первой моды показывает, что эта асимметрия велика,

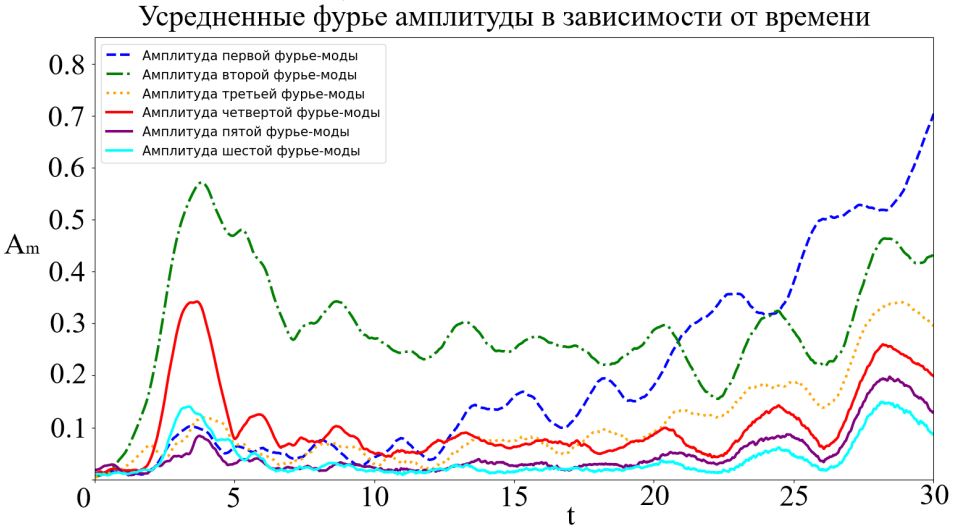



*Рис. 6. Зависимости усредненных фурье-амплитуд от времени для эксперимента 005, $M_h = 0.5$, $a_h = 0.35$*

также наблюдается сильный разогрев диска. На рис. 7 видно, что центральная плотная и вытянутая структура сместилась относительно центра диска. Представленный на рис. 7 результат соответствует дисперсиям скоростей эксперимента 005 для $M_h = 0.5,\ a_h = 0.35.$

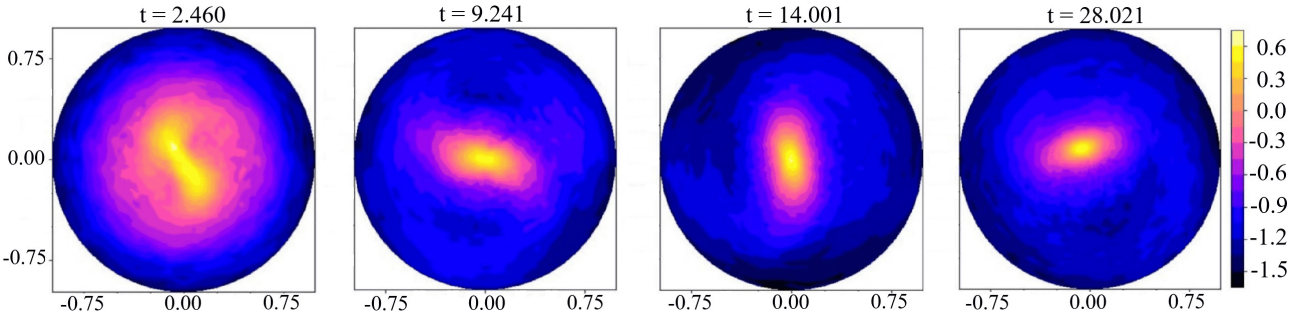



*Рис. 7. Распределение поверхностной плотности в различные моменты расчетного времени для эксперимента 005, $M_h = 0.5,\ a_h = 0.35$*

Интересными с точки зрения дальнейшего исследования являются наборы параметров, при которых формируется трехрукавные спиральные структуры. В наших моделях они существуют не очень долго и эволюционируют в бароподобную структуру, также немного смещенную относительно центра. В данных расчетах сначала некоторое время доминировала третья фурье-мода (рис. 8), а затем доминирующей становится вторая мода, которую дублирует, но с меньшими значениями, четвертая мода. На рис. 9 представлено распределение поверхностной плотности в различные моменты расчетного времени для эксперимента005, соответствующего значениям дисперсий в соответствии с табл. 1, которым соответствуют значения параметров гало $M_h = 1.0,\ a_h = 0.15.$ Это яркий пример начальных условий, при которых формируется такая редкая в наблюдениях трехрукавная спиральная структура.

Выделим группу моделей, в которых довольно быстро формируется бароподобная структура, но из-за сильного разогрева неравновесного в начальный момент времени диска бар также быстро разрушается. Подобное можно наблюдать при малых значениях дисперсий скоростей и толщины диска.После кратковременного всплеска второй моды (рис. 10), уже на первом же периоде вращения, диск сильно разогревается, и структура разрушается, далее доминирует первая мода. На рис. 11 (для эксперимента004 $(M_h = 0.5,\ a_h = 0.45)$) можно наблюдать, что уже во втором периоде $(t = 5)$ вращения началось перераспределение вещества и плотная структура сместилась относительно центра диска.

*Рис. 8. Зависимости усредненных фурье-амплитуд от времени для эксперимента 005, $M_h = 1.0,\ a_h = 0.15$*

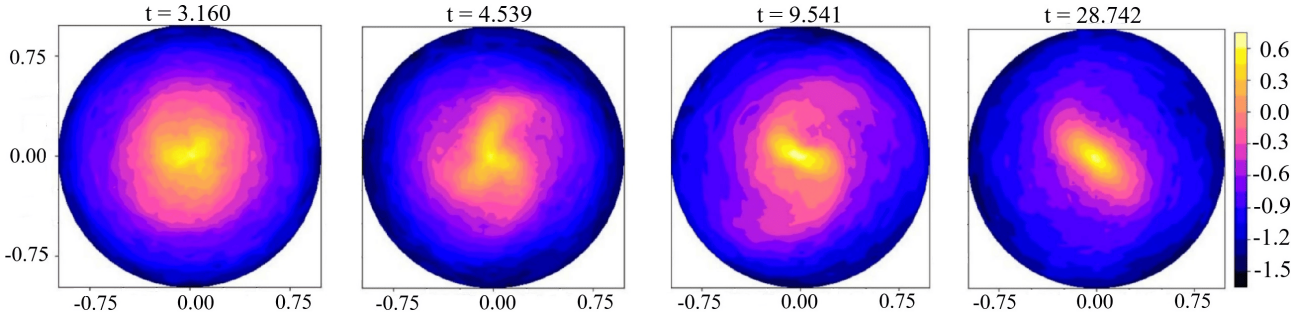



*Рис. 9. Распределение поверхностной плотности в различные моменты расчетного времени для эксперимента 005, $M_h$ =1.0, $a_h$ =0.15*

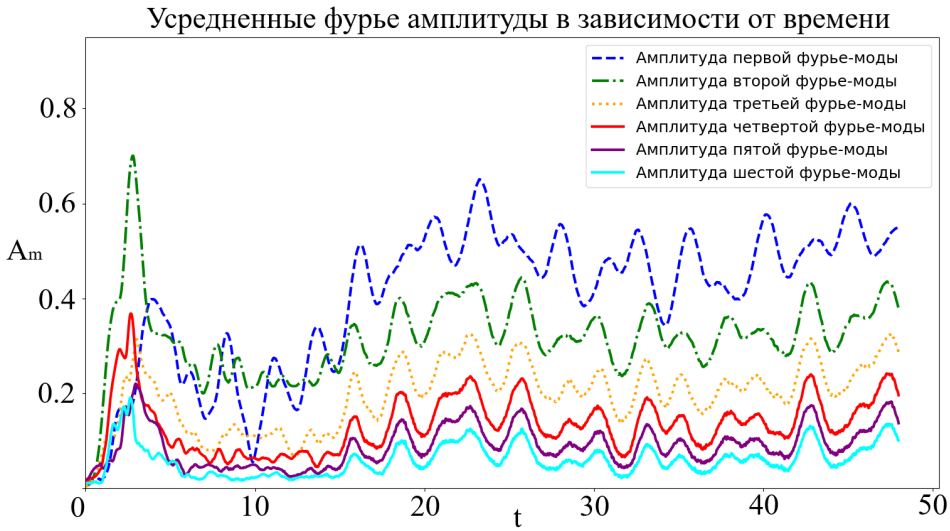



*Рис. 10. Зависимости усредненных фурье-амплитуд от времени для эксперимента 004, $M_h = 0.5$, $a_h = 0.45$*

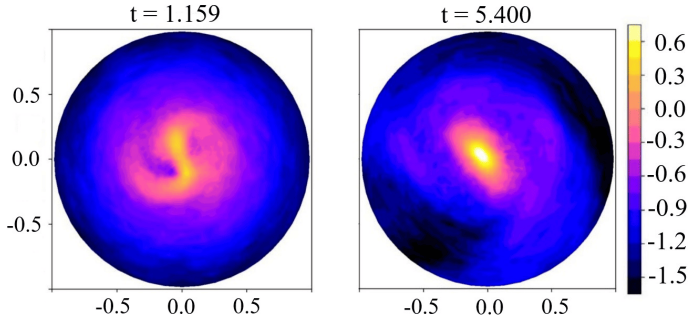



*Рис. 11. Распределение поверхностной плотности в различные моменты расчетного времени для эксперимента 004, $M_h = 0.5$, $a_h = 0.45$*

## Заключение

Результаты проведенных массовыхрасчетов помогли выявить условия, при которых могут быть сформированы бары в наблюдаемых галактиках поздних типов. Была составлена сводная таблица, включающая в себя все проведенные эксперименты с указанием их параметров. Для начальных условий, позволяющих в динамике получить бары и трехрукавные структуры, будут построены модели с большим количеством частиц, а также для них будет расширен диапазон варьируемых значений параметров гало. В работе приведено описание основных выявленных типов результатов, полученных в рамках указанных диапазонов параметров моделей.

**Литература**

1. *Khoperskov A. V.* Minimum Velocity Dispersion in Stable Stellar Disks. Numerical Simulations / A. V. Zasov, A. V. Khoperskov, N. V. Tyurina // Astronomy Reports. – 2003. – Vol. 47. – P. 357–376.

2. *Бутенко М. А.* Исследование структуры и динамики дисковых галактик: вереницы и механизмы формирования спиралей : дис. … канд. физ.-мат. наук :01.03.02 / Бутенко Мария Анатольевна ; науч. рук. А. В. Хоперсков ; ВолГУ. – Волгоград, 2019. – 229 с.

3. *Athanassoula E.* Optimal softening for force calculations in collisionless N-body simulations / E. Athanassoula // Monthly Notices Royal Astronomical Society. – 2001. – Vol. 314. – P. 475–488.

4. *Navarro J. F.* A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering / J. F. Navarro, C. S. Frenk, S. D. M. White // The Astrophysical Journal. – 1997. – Vol. 490. – P. 493–508.

УДК 519.6

# ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ КАНАЛОВ В ВАКУУМ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЕГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

**В. В. Гришин**

*Северный Арктический Федеральный университет*

**Аннотация.** В статье рассматриваются физические основы, математические модели и современные методы вычислительного моделирования истечения газа из каналов в вакуум. Описано влияние числа Кнудсена на режимы течения, охарактеризованы сложности, связанные с граничными эффектами, различными свойствами материалов, неравновесной динамикой и многомасштабностью моделей процессов. Представлены практические приложения, современные инженерные решения и перспективные направления развития вакуумных технологий.

**Ключевые слова:** численное моделирование, разреженный газ, вакуум, число Кнудсена, уравнение Больцмана, DSMC, переходный режим, граничные условия.

## Введение

Истечение газа из микроканалов и технологических полостей в вакуум является важным процессом в таких отраслях, как аэрокосмическая промышленность и микроэлектроника. В зависимости от числа Кнудсена (Kn), поведение газа может варьироваться от континуального течения до свободного молекулярного течения, что требует различных подходов к моделированию.

Достижения в области вычислительных методов, таких как прямое моделирование Монте-Карло, повысили точность прогнозирования газовых потоков, но такие проблемы, как граничные эффекты и контроль дегазации, остаются нерешенными. Понимание этих процессов необходимо для оптимизации вакуумных систем и повышения эффективности современных технологий.

## 1. Режимы течения газа

Число Кнудсена отражает поведение газа при истечении в канале:

$$Kn = \frac{\lambda}{L},$$

где $\lambda$ — средний свободный пробег молекул, а $L$ — диаметр канала. Значения $Kn$ позволяют разделить течение на несколько режимов [1, 2], которые приведены в табл. 1. В режиме континуального течения $(Kn < 0.01)$ преобладают молекулярные столкновения, и уравнения Навье — Стокса точно описывают течение [3]. С увеличением числа Кнудсена в течении возникают скольжения $(0.01 < Kn < 0.1)$, а затем оно принимает переходный характер $(0.1 < Kn < 10)$, где существенными становятся как молекулярные столкновения, так и взаимодействие со стенками канала, что требует более сложных подходов к моделированию [4]. Когда $Kn > 10$, поток переходит в режим свободных молекул, где молекулы взаимодействуют в основном со стенками, что делает статистические методы, такие как прямое моделирование Монте-Карло (DSMC), необходимыми для точного моделирования [5, 6].

## 2. Методы моделирования разреженных газовых потоков

Для описания поведения газа в этих режимах используются различные математические модели (табл. 2). Уравнения Навье — Стокса эффективно моделируют континуальное тече-

Таблица 1

*Режимы течения газа в зависимости от числа Кнудсена*

| **Режим** | **Диапазон значений $Kn$** | **Основные характеристики** |
|---|---|---|
| Континуальный | < 0.01 | Преобладают столкновения молекул друг с другом |
| Скользящий | 0.01–0.1 | Возникают явления скольжения молекул по стенке |
| Переходный | 0.1–10 | Сравнимо количество столкновений молекул друг с другом и со стенкой |
| Свободномолекулярный режим | > 10 | Молекулы почти не сталкиваются друг с другом |

Таблица 2

*Методы моделирования газовых потоков*

| **Метод** | **Применимость** | **Преимущества** | **Недостатки** |
|---|---|---|---|
| Уравнения Навье — Стокса | $Kn < 0.1$ | Скорость, простота реализации | Неточно при $Kn > 0.1$ |
| Уравнение Больцмана | $Kn < 1$ | Очень высокая точность | Вычислительно дорого |
| BGK-модель | $0.1 < Kn < 10$ | Скорость | Приблизительная точность |
| DSMC | $Kn > 10$ | Подходит для сложных стеночных эффектов | Требует больших вычислительных ресурсов |
| Гибридные схемы | Все значения $Kn$ | Точность, скорость | Сложность реализации |

ние, а уравнение Больцмана и приближённые кинетические модели (BGK) описывают газовую динамику в переходном режиме, учитывая статистическое распределение молекулярных скоростей [7, 8]. В случае высокого вакуума или разреженного газового потока метод прямого численного моделирования Монте-Карло (DSMC) моделирует поведение газа, отслеживая движение и столкновения отдельных частиц [9].

### 3. Трудности моделирования газовых потоков в вакуум

Моделирование потока газа из каналов в вакуум сопряжено с рядом трудностей, обусловленных сложностью молекулярных взаимодействий и граничных эффектов. Одна из основных трудностей возникает из-за эффектов молекулярных столкновений, когда частота и характер столкновений между молекулами газа и стенками канала различаются в разных режимах течения.

В режиме свободных молекул доминируют взаимодействия со стенками, в то время как в переходном режиме на течение влияют как молекулярные столкновения, так и эффекты стенок, что затрудняет разработку единой модели, точно отражающей такое поведение.

Граничные условия играют решающую роль в определении поведения газового потока в вакуумных каналах. Молекулы могут подвергаться диффузному отражению, когда они беспорядочно рассеиваются при столкновении со стенками, или зеркальному отражению, когда они отражаются без потери энергии, что характерно для полированных поверхностей. На практике происходит комбинация этих взаимодействий, часто описываемая смешанной моделью отражения с использованием коэффициентов аккомодации.

Кроме того, свойства материала и состояние поверхности играют важную роль в определении характеристик взаимодействия газа со стенкой. Такие факторы, как шероховатость по-

верхности, загрязнение и температура, могут существенно влиять на поведение отражения, что приводит к отклонениям от идеальных моделей. Без точных данных о свойствах поверхности становится сложно прогнозировать и контролировать поведение газового потока в вакуумных системах.

Слой Кнудсена и пограничные явления еще больше усложняют работу по моделированию. Вблизи твердых поверхностей образуется слой Кнудсена, где поведение газа переходит от континуального к молекулярному течению, что затрудняет применение стандартных граничных условий [10]. Правильный учет этого слоя очень важен для обеспечения точности моделирования, особенно в приложениях, где требуется точный контроль потока газа.

Другой серьезной проблемой является неравновесная динамика, возникающая в переходных и молекулярных режимах течения. В отличие от континуального течения, где действуют предположения о термодинамическом равновесии, молекулы газа в вакууме часто демонстрируют крайне неравновесное поведение [10]. Точное моделирование такой динамики требует вычислительно интенсивных подходов, таких как прямое моделирование Монте-Карло (DSMC), которое может быть вычислительно дорогим, особенно в сложных геометриях [11].

Наконец, необходимость многомасштабного моделирования еще больше усложняет процесс. Поскольку течение газа в вакуумных системах часто включает в себя явления, происходящие в нескольких масштабах длины и времени, от молекулярных взаимодействий до макроскопических моделей течения, интеграция моделей, способных преодолеть эти масштабы, остается постоянной задачей в вычислительной гидродинамике.

## 4. Практические применения

Понимание процесса истечения газа из каналов в вакуум имеет важное практическое применение в различных отраслях промышленности. В аэрокосмических и космических двигательных установках точное моделирование газового потока необходимо для проектирования микропульсационных систем и двигателей космических аппаратов, где управление выбросом газа в вакууме обеспечивает эффективное маневрирование и экономию топлива. Аналогичным образом, в полупроводниковой и микроэлектронной промышленности вакуумная среда имеет решающее значение для таких процессов, как осаждение тонких пленок и плазменное травление, где минимизация загрязнений от дегазации повышает качество и надежность продукции [12].

В научных исследованиях и высоковакуумных системах, таких как ускорители частиц и камеры для моделирования космического пространства, поддержание условий сверхвысокого вакуума требует точного контроля потока газа и эффективного управления дегазацией. Кроме того, в медицине и биотехнологиях вакуумные системы используются для таких процессов, как стерилизация и микрофлюидный контроль, где необходимо поддержание чистоты и контролируемости среды.

Для решения этих задач инженерные решения включают использование методов кондиционирования поверхности для минимизации дегазации, оптимизацию геометрии микроканалов для уменьшения возмущений потока и нанесение современных покрытий для улучшения свойств взаимодействия газа со стенками [6]. Вычислительные модели, такие как DSMC и гибридные методы, предоставляют мощные инструменты для проектирования и оптимизации этих систем, обеспечивая большую эффективность и производительность в реальных приложениях.

## 5. Современные инженерные решения и направления исследований

Будущие исследования течения газа из каналов в вакуум направлены на повышение точности моделирования, разработку инновационных материалов и повышение производительно-

сти системы. Передовые методы моделирования, такие как гибридные подходы, сочетающие прямое моделирование Монте-Карло (DSMC) и континуальные модели, направлены на повышение эффективности вычислений при сохранении точности в различных режимах течения [13]. Кроме того, интеграция машинного обучения и прогностических моделей на основе искусственного интеллекта открывает перспективы для ускорения моделирования и оптимизации конструкции систем [14].

В области материаловедения разрабатываются новые поверхностные покрытия и материалы со сверхнизким газовыделением для минимизации загрязнений и повышения долговечности вакуумных систем. Эти материалы особенно полезны в таких областях, как производство полупроводников и двигательных установок космических аппаратов, где поддержание чистоты вакуумной среды имеет решающее значение.

Кроме того, развивающиеся технологии в области микрофлюидики и наноинженерии стимулируют разработку микроканалов, позволяющих точно контролировать поток газа в вакуумной среде [15]. Эти достижения могут найти применение в лабораторных устройствах на кристалле, космических исследованиях и высокоточных экспериментальных установках, прокладывая путь к созданию более эффективных и надежных вакуумных технологий.

## Заключение

Исследование потока газа из каналов в вакуум необходимо для повышения производительности высокоточных систем в различных отраслях промышленности. Понимание перехода между различными режимами течения, точное моделирование молекулярных взаимодействий и учет граничных эффектов являются ключевыми для оптимизации вакуумных технологий. Хотя такие вычислительные методы, как прямое моделирование Монте-Карло (DSMC), значительно расширили наши возможности по прогнозированию поведения газов в вакуумных средах, проблемы, связанные с неравновесной динамикой, поверхностными взаимодействиями и многомасштабным моделированием, остаются.

Практическое применение в аэрокосмической отрасли, производстве полупроводников и научных исследованиях продолжает стимулировать разработку инновационных решений, включая методы кондиционирования поверхности, усовершенствованные покрытия и оптимизированные конструкции микроканалов. Появляющиеся технологии, такие как моделирование с использованием искусственного интеллекта и материалы нового поколения, открывают захватывающие возможности для дальнейшего повышения эффективности и надежности вакуумных систем. Решая эти задачи и используя новые технологии, исследователи и инженеры могут проложить путь для будущих инноваций.

## Литература

1. *Guo Z.* Discrete unified gas kinetic scheme for all Knudsen number flows. II. Thermal compressible case / Z. Guo, R. Wang, K. Xu // Physical Review. – 2015. – Vol. 91. – № 3. – 033313.

2. *De Izarra L.* High-order lattice Boltzmann models for gas flow for a wide range of Knudsen numbers / L. De Izarra, J. L. Rouet, B. Izrar // Physical Review E. – 2011. – Vol. 84. – № 6. – 066705.

3. *Drazin P. G.* The Navier-Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions : London Mathematical Society Lecture Note Series / P. G. Drazin, N. Riley. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – 196 p. – ISBN 9780521681629

4. *Dongari N.* Analytical solution of gaseous slip flow in long microchannels / N. Dongari, A. Agrawal, A. Agrawal // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2007. – Vol. 50. – № 17-18. – P. 3411–3421.

5. *Cai C.* Theoretical and Numerical Study of Free Molecular-Flow Problems / C. Cai, I. D. Boyd // Journal of Spacecraft and Rockets – 2012. – Vol. 44. – № 3. – P. 619–624.

6. *Rubinstein R. Y.* Simulation and the Monte Carlo Method: Second Edition / R. Y. Rubinstein, D. P. Kroese. – Wiley Blackwell, 2007. – 355 p. – ISBN 9780470177945

7. *Graur I. A.* Numerical modelling of rarefied gas flow through a slit at arbitrary pressure ratio based on the kinetic equation / I. A. Graur, A. P. Polikarpov, F. Sharipov // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. – 2012. – Vol. 63. – № 3. – P. 503–520.

8. Experimental and numerical modeling of rarefied gas flows through orifices and short tubes / S. F. Gimelshein, G. N. Markelov, T. C. Lilly [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2005. – Vol. 762. – P. 437–443.

9. *Farbar E.* Subsonic flow boundary conditions for the direct simulation Monte Carlo method / E. Farbar, I. D. Boyd // Computers and Fluids. – 2014. – Vol. 102. – P. 99–110.

10. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа (кинетическая теория) / М. Н. Коган. – Москва : Наука, 1967. – 440 с.

11. *Никонов В. В.* Применение метода прямого моделирования Монте-Карло к задаче течения разряженных газов / Никонов. В. В. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2015. – Vol. 17. – № 6-2. – P. 547–550.

12. *Kroese D. P.* Why the Monte Carlo method is so important today / D. P. Kroese, T. Brereton, T. Taimre, Z. I. Botev // Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics. – 2014. – Vol. 6. – № 6. – P. 386–392.

13. *Boyd J.* Chebyshev and Fourier spectral methods / J. Boyd. – New York : DOVER Publications, Inc., 2001. – 594 p.

14. Pressure prediction under the condition of vacuum gauge failure in ultra high vacuum systems using regression model / N. Pavlushin, J. Wang, F. Liu, M. Zhou // Vacuum. – 2025. – Vol. 242. – 114769

15. *Ho C. M.* Micro-electro-mechanical-systems (MEMS) and fluid flows / C. M. Ho, Y. C. Tai // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1998. – Vol. 30. – 1998. – P. 579–612.

УДК 004.942

# ИНТЕГРАЦИЯ ДИФФУЗИИ В АЛГОРИТМ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖИДКОФАЗНЫХ ГОМОГЕННЫХ РЕАКЦИЙ В МИКРОРЕАКТОРАХ

**Н. А. Жулин, Е. С. Боровинская**

*Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)*

**Аннотация.** В микрореакторах из-за малых размеров и особой геометрии каналов важным для описания кинетики процесса становится учет диффузии. Стандартные методы кинетического моделирования не учитывают влияние диффузии. В данной работе представлен расширенный кинетический метод Монте-Карло, который явно интегрирует диффузионные эффекты в стохастическое моделирование жидкофазных реакций. Центральная идея подхода заключается в динамическом расчете эффективных констант скорости на каждом шаге моделирования на основе числа Дамкелера второго рода, которое позволяет сравнивать скорость химической реакции со скоростью переноса вещества (диффузией).

**Ключевые слова:** математическое моделирование, кинетический метод Монте-Карло, гомогенные реакции, диффузия, химико-технологические процессы, моделирование кинетики химических реакций, микрореакторы.

## Введение

Современная химическая технология всё чаще обращается к использованию микрореакторов для проведения жидкофазных процессов. Их ключевое преимущество — высокая эффективность массо- и теплообмена — обусловлена малыми размерами и строго определённой геометрией каналов. Однако переход к микромасштабу принципиально меняет физическую картину протекания реакций: на первый план выходят эффекты, которыми в макромире часто пренебрегают. В частности, соотношение характерных времён диффузии и химической реакции становится определяющим фактором кинетики всего процесса [1–3].

В классических моделях химической кинетики, основанных на решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений, предполагается, что реакционная смесь идеально перемешана. Однако это допущение часто не выполняется в микрореакторах, где движение реагентов лимитируется диффузией, особенно в условиях ламинарного течения или повышенной вязкости. В результате реальная скорость процесса может существенно отклоняться от предсказанной, а эффективные константы скорости — отличаться от их истинных значений. Это делает актуальной задачу разработки и применения более адекватных методов математического моделирования, которые явно учитывают влияние переноса вещества на химическое превращение.

Таким методом является кинетический метод Монте-Карло (КММК), который позволяет напрямую моделировать стохастическую динамику отдельных молекул в пространстве и времени. Его ключевое преимущество — возможность единообразно описывать как химические реакции, так и процессы диффузионного переноса. Для моделирования в микрореакторах стандартные алгоритмы КММК, разработанные для неограниченных объёмов, требуют модификации. Необходимо явно учитывать непроницаемые границы, которые изменяют характер движения молекул, отражая их от стенок, что приводит к возникновению пространственной неоднородности концентраций и влияет на вероятность встречи реагентов [4, 5].

В данной работе представлен комплексный подход к моделированию жидкофазных гомогенных реакций в микрореакторах с использованием модифицированного кинетико-диффу-

зионного метода Монте-Карло (КДМК) [6]. Основное внимание уделено разработке алгоритма, который согласованно учитывает дискретный характер диффузии молекул в ограниченном объёме и их стохастические химические превращения. Предложенная модель позволяет исследовать переход между режимами контроля процесса: от кинетического (когда скорость лимитируется самой реакцией) к диффузионному (когда скорость лимитируется переносом вещества).

## 1. Способ учета коэффициента диффузии в моделировании жидкофазной гомогенной реакции кинетическим методом Монте-Карло

Переход от макро- к микромасштабу принципиально изменяет соотношение между скоростями химического превращения и массопереноса. В микрореакторах процессы диффузионного переноса начинают играть определяющую роль в общей кинетике процесса, что обусловлено существенным уменьшением характерных размеров системы и изменением гидродинамических условий.

Физическая сущность проблемы заключается в конкуренции между временными масштабами диффузионного перемещения молекул и их химического взаимодействия. Если время, необходимое для встречи реагентов в результате броуновского движения, превышает время их химического превращения, процесс переходит в режим диффузионного контроля. В противоположной ситуации, когда диффузия происходит значительно быстрее реакции, процесс лимитируется кинетикой [7].

Особую сложность представляет моделирование быстрых жидкофазных реакций, когда даже в микрореакторах может наблюдаться диффузионное ограничение. Для таких систем классические модели формальной кинетики становятся неприменимыми, поскольку предсказывают завышенные скорости превращения [7].

В представленной работе проблема решается за счет интеграции в кинетическую модель Монте-Карло явного учета диффузионных ограничений через модификацию констант скорости. Такой подход позволяет воспроизводить реальное поведение реакционной системы во всем диапазоне возможных режимов — от кинетического до диффузионно-контролируемого [6].

Для количественной оценки вклада диффузии в общую скорость процесса в работе используется критерий подобия — число Дамкелера второго рода ($DaII$) [8, 9]. Оно представляет собой отношение характерного времени диффузии $\tau_{diff}$ к характерному времени химической реакции $\tau_{react}$:

$$DaII = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{react}}. \tag{1}$$

Характерное время диффузии

$$\tau_{diff} = \frac{L^2}{D_{avg}}, \tag{2}$$

оценивается как время, необходимое молекуле для преодоления характерного размера микрореактора $L$ (например, ширины канала) со средним коэффициентом диффузии $D_{avg}$. Время реакции обратно пропорционально скорости химического превращения и в первом приближении может быть оценено как

$$\tau_{react} = \frac{1}{k \cdot C_{\min}}, \tag{3}$$

где $C_{\min}$ — концентрация лимитирующего реагента, $k$ — константа скорости реакции.

В зависимости от величины числа $DaII$ процесс может находиться в одном из трех режимов:

• **Диффузионное ограничение (*DaII* ≫ 1):** Скорость процесса определяется медленным переносом молекул. Химическая реакция протекает практически мгновенно после встречи реагентов.

• **Кинетическое ограничение (*DaII* ≪ 1):** Диффузия протекает значительно быстрее реакции. Скорость процесса лимитируется вероятностью самого элементарного акта.

• **Смешанный режим (*DaII* ≈ 1):** Оба процесса — и перенос, и превращение — вносят сопоставимый вклад в общую скорость.

Для согласованного учета обоих механизмов в рамках кинетической модели вводится понятие эффективной константы скорости $k_{eff}$. Исходная константа скорости $k$, справедливая для условий идеального перемешивания, корректируется с помощью безразмерного фактора диффузионного торможения $\eta$, рассчитываемого по формуле:

$$\eta = \frac{1}{1 + DaII}. \tag{4}$$

Таким образом

$$k_{eff} = k \cdot \eta. \tag{5}$$

Данный подход обладает следующими преимуществами:

• **Физическая обоснованность.** При $DaII \to 0$ (быстрая диффузия) $\eta \to 1$ и $k_{eff} \to k$, что соответствует кинетическому режиму. При $DaII \to \infty$ (медленная диффузия) $\eta \to 0$, что полностью подавляет реакцию в отсутствие реагентов $k_{eff} \to 0$.

• **Автоматическое переключение режимов.** Модель динамически адаптируется к изменяющимся условиям (например, к падению концентраций в ходе процесса), плавно переходя от одного лимитирующего режима к другому.

• **Вычислительная эффективность.** Интеграция данного расчета в каждый шаг стохастического алгоритма не приводит к значительному росту вычислительной нагрузки, но кардинально повышает адекватность модели.

На каждом шаге моделирования для каждой стадии реакции производится расчет $k_{eff}$, который затем используется для определения вероятности данного элементарного события, обеспечивая корректное воспроизведение как чисто кинетических, так и диффузионно-лимитированных процессов.

## 2. Алгоритм кинетико-диффузионного метода Монте-Карло (КДМК)

Предложенный модифицированный алгоритм КДМК реализует последовательность стохастических событий двух типов: диффузионные прыжки молекул и химические реакции. Общая схема алгоритма на одном временном шаге $\Delta t$ может быть представлена следующим образом:

1. Инициализация системы. В заданном объеме микрореактора (моделируемом, например, как двумерная или трехмерная решетка с непроницаемыми границами) случайным образом размещаются молекулы реагентов в соответствии с их начальными концентрациями. Задается коэффициент диффузии $D$ для каждого типа молекул (или усредненный $D_{avg}$), характерный размер системы $L$ и истинные константы скорости $k$ для всех реакций.

2. Диффузионный шаг. Для каждой молекулы в системе моделируется случайное перемещение в пространстве. Вероятность направления перемещения является равномерной, а длина прыжка $\delta$ определяется соотношением Эйнштейна — Смолуховского для дискретной модели. При столкновении с границей микрореактора молекула отражается, что моделирует непроницаемость стенок.

3. Расчет эффективных констант скорости. Для каждой возможной реакции в системе на текущем шаге производится пересчет константы скорости. На основе текущих концентраций

реагентов и геометрии системы вычисляются характерное время диффузии $\tau_{diff}$ и характерное время реакции $\tau_{react}$ по формулам (2) и (3). Затем определяется число Дамкелера $DaII$ по формуле (1) и фактор торможения $\eta$ по формуле (4). После этого рассчитывается эффективная константа скорости $k_{eff}$ (формула 5).

4. Реакционный шаг. Вероятность протекания каждой химической реакции за время $\Delta t$ определяется на основе $k_{eff}$ и текущих концентраций реагентов. Используется метод вероятностного испытания: для каждой потенциальной пары реагентов, находящихся в пределах заданного «реакционного радиуса», генерируется случайное число и сравнивается с вероятностью реакции, пропорциональной произведению эффективной константы скорости и $\Delta t$. Если испытание успешно, молекулы реагентов удаляются, а продукты реакции добавляются в систему в соответствующей позиции (например, в средней точке между реагентами).

5. Обновление времени и состояния системы. Время системы увеличивается на шаг $\Delta t$. Шаги 2–4 повторяются до достижения заданного времени моделирования.

**Вычислительная реализация и оптимизация.** Поскольку прямое моделирование траекторий всех молекул в большом объеме может быть чрезвычайно ресурсоемким, для практической реализации алгоритма могут быть применены методы оптимизации:

• *Использование клеточных списков (cell lists).* Пространство микрореактора разбивается на ячейки, размер которых немного превышает максимальный реакционный радиус. Это позволяет на каждом шаге проверять возможность реакции не между всеми молекулами системы, а только между молекулами в соседних ячейках, что радикально снижает вычислительную сложность.

• *Адаптивный временной шаг.* Величина $\Delta t$ выбирается таким образом, чтобы выполнялись критерии устойчивости: вероятность диффузионного прыжка за шаг и вероятность реакции для любой пары молекул должны быть много меньше единицы. Это гарантирует адекватность стохастической аппроксимации.

• *Векторизация вычислений.* Операции, выполняемые над множеством молекул (например, диффузионные перемещения), программно реализуются с использованием векторных операций, что значительно ускоряет расчеты на современных процессорах.

## Заключение

Разработанный кинетико-диффузионный метод Монте-Карло представляет собой эффективный инструмент для моделирования жидкофазных гомогенных реакций в микрореакторах. Ключевым преимуществом метода является явный учет пространственной неоднородности и диффузионных ограничений через динамический пересчет эффективных констант скорости на основе числа Дамкелера второго рода.

Представленный алгоритм позволяет исследовать процессы в широком диапазоне условий — от кинетического до диффузионного контроля, что невозможно в рамках классических моделей формальной кинетики. Верификация на тестовой реакции подтвердила высокую адекватность и точность метода.

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением модели для учета дополнительных факторов, таких как течение жидкости, гетерогенные реакции на стенках микрореактора, а также моделирование систем с более сложной, нелинейной кинетикой.

## Литература

1. *Borovinskaya E.* Microreactors as the new way of intensification of heterogeneous processes / E. S. Borovinskaya, V. P. Reshetilovskii // Russian Journal of Applied Chemistry. – 2011. – Vol. 84, № 6. – P. 1094–1104.

2. *Боровинская Е. С.* Микроструктурные реакторы – концепции, развитие и применение / Е. С. Боровинская, В. П. Решетиловский // Химическая промышленность. – 2008. – № 5. – С. 217–248.

3. *Боровинская Е. С.* Микрореакторы – новый путь интенсификации гетерогенных процессов / Е. С. Боровинская, В. П. Решетиловский// Химическая промышленность. – 2011. – № 2. – С. 78–84.

4. *Voter A.* Introduction to the Kinetic Monte Carlo Method / A. Voter // NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. – 2007. – Vol. 235. URL: https://www.fml.t.u-tokyo.ac.jp/~izumi/CMS/MC/Introduction_kMC.pdf (дата обращения: 26.11.2025).

5. *Колесников С. В.* Кинетический метод Монте-Карло: Математические основы и приложения к физике низкоразмерных наноструктур, «Математическое моделирование» / С. В. Колесников, А. М. Салецкий, С. А. Докукин, А. Л. Клавсюк // Математическое моделиров. – 2018. – № 2. – С. 48–80.

6. *Steel T.* Fluid boundary conditions in kinetic diffusion Monte Carlo / T. Steel, V. Maes, G. Samaey // Cornell University: Arxiv. – 2025. – URL: https://arxiv.org/pdf/2509.03942 (дата обращения: 26.11.2025).

7. *Johnson M.* Diffusion Limited Kinetics In Reactive Systems / M. S. Johnson, J. N. Mueller, C. Daniels, H. N. Najm, J. Zador // The journal of physical chemistry. A. – 2024. – Vol. 128, № 18. – P. 3685–3702.

8. *Daele T.* Model-based analysis of mass transfer limitations in microreactors / T. Van Daelea, D. F. del Pozoa, D. Van Hauwermeirena, K. V. Gernaeyb, I. Nopensa // Implementation of Microreactor Technology in Biotechnology. – 2015. – URL: https://biblio.ugent.be/publication/6829875 (дата обращения: 26.11.2025).

9. *Riley M.* Monte Carlo Simulation of Diffusion and Reaction in Two-Dimensional Cell Structures / M. R. Riley, H. M. Buettner, F. J. Muzzio, S. C. Reyes // Biophysical Journal – 1995. – URL: https://www.cell.com/biophysj/pdf/S0006-3495(95)80349-8.pdf. (дата обращения: 26.11.2025).

УДК 004.942

# ВВОДИТ ЛИ В ЗАБЛУЖДЕНИЕ ОЦЕНКА, ОСНОВАННАЯ НА ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ? ПОДХОД К ВАЛИДАЦИИ МОДЕЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЙЕСОВСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ОШИБОК

**А. А. Захарова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Исследователи долгое время рассматривали точность модели как основной показатель для оценки эффективности алгоритмов классификации. Нынешний подход к оценке, основанный исключительно на точности модели, часто приводит к неправильной оценке классификаторов, независимо от разделимости и сложности набора данных. Это ограничение подчеркивает необходимость в новом и более понятном методе. Утверждается, что оценка, основанная на точности, может вводить в заблуждение даже при рассмотрении показателей разделимости и сложности данных. В данной статье сравнивается частота ошибок хорошо известных классификаторов на основе набора данных, сгенерированных по Гауссу, и показывается, что наблюдаемые ошибки многих алгоритмов ниже, чем у теоретически оптимального классификатора, что приводит к завышению их производительности. Модель считается недействительной, если ее частота ошибок ниже оптимальной ошибки классификатора, известной как байесовский коэффициент ошибок. Для выявления таких недопустимых моделей вводится процедура и предлагается алгоритм проверки модели на основе байесовского коэффициента ошибок.
**Ключевые слова:** классификация, оценка, валидация, частота ошибок по Байесу, дискриминантный анализ, измерение сложности.

## Введение

Оценка модели — это процесс поиска оптимального классификатора для прогнозирования. Как оцениваются и сравниваются модели классификации? Исследователи обычно решают этот вопрос, сравнивая точность различных алгоритмов [12]. Хотя точность прогнозирования классификаторов отражает эффективность алгоритмов, справедливая оценка также требует учета сложности задачи классификации. В качестве оператора классификатор принимает вектор переменных (признаков) и выдает на выходе решение, которое определяет его метку. Эффективность алгоритмов при решении задач классификации определяется их частотой ошибок. Более того, на производительность классификатора влияют как эффективность алгоритмов, так и сложность (или разделяемость) набора данных [7].

Понятие сложности в задачах классификации введено в работе при анализе трудностей задач классификации [8]. Предлагаемая мера, описывающая сложность задач бинарной классификации основана на геометрической сложности границ классов. Она разделила предложенные меры на три основные группы: меры перекрытия объектов, разделяемость классов и меры плотности (топологии и геометрии). После этого показатель сложности переопределяется на шесть характеризуемых показателей: основанный на признаках, линейность, соседство, сеть, размерность и классовый дисбаланс [10].

Большинство исследователей игнорируют показатели сложности, чтобы упростить процесс оценки, и сосредотачиваются только на некоторых элементах в соответствии с матрицей путаницы [1]. Четырьмя основными критериями, часто используемыми при оценке, являются точность, деликатность, прецизионность и специфичность; однако могут использоваться и другие [2].

На некоторых языках программирования было разработано несколько библиотек и пакетов для вычисления этих показателей. Одним из разработанных пакетов для оценки моде-

лей является HungaBunga [15]. Этот пакет использует метод для ранжирования всех моделей scikit-learn по точности, настраивая все возможные гиперпараметры в процессах.

Некоторые исследователи утверждают, что такой подход к оценке может привести к принятию неправильных решений, если не учитывать характеристики разделения данных. Они иллюстрируют эту озабоченность парадоксальным примером, когда классификатор достигает наивысшей точности в одном наборе данных, но плохо работает в другом. Они утверждают, что показатели сложности, такие как разделяемость, являются неотъемлемыми характеристиками набора данных [5]. Следовательно, они классифицировали задачи в зависимости от сложности каждой из них, где набор данных и предлагаемые меры для оценки, ориентировались на конкретные примеры. Однако вычислительная сложность, связанная с оценкой сложности классификации, ограничивает ее применимость лишь несколькими наборами данных.

В этой работе показывается, что использование только критерия точности может ввести в заблуждение при оценке алгоритмов, даже если учитывать показатели сложности данных. Модель определяется как недопустимая, если ее частота ошибок ниже, чем байесовский коэффициент ошибок ($BER$), или если ее точность превышает Золотую точность (GSA = 1 – $BER$). Далее предлагается алгоритм валидации модели, который использует $BER$ для оценки эффективности и надежности классификационных моделей.

## 1. Частота байесовских ошибок

Эффективность наилучшего классификатора определяется как GSA. Чтобы оценка считалась достоверной, частота ошибок классификаторов должна быть больше или равна $BER$. Однако на практике частота ошибок некоторых классификаторов может быть ниже $BER$, что теоретически невозможно и, следовательно, нежелательно. Известно, что ошибка байесовского классификатора равна $BER$ и может быть вычислена по Гауссу.

### *1.1. Байесовский классификатор*

Задача классификации включает в себя $X = (X_1, \ldots, X_d)^{\mathrm{T}}$ в качестве вектора признаков в $d$-мерном пространстве $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, который помечен бинарной случайной величиной $Y$. Бинарный классификатор — это функция $h : \mathcal{X} \to Y \in \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Ошибка классификации ($CE$) возникает, когда наблюдение $X$, т. е. $x$, неправильно отнесено к его истинному классу $CE_h = \Pr(h(X) \neq Y)$ [9]. В соответствии с теоремой Байеса:

$$\Pr(Y = y, X = x) = \frac{\Pr(Y - y) f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}, \tag{1}$$

где $f_{X,Y}(x, y)$ то класс-условных распределений $\Pr(Y = 0) = \pi_0$ и $\Pr(Y = 1) = \pi_1 = 1 - \pi_0$, которые являются априорными вероятностями меток [4], и мы имеем:

$$\Pr\left(Y = 0, x\right) > \Pr\left(Y = 1, x\right) \leftrightarrow \pi_0 f\left(x, Y = 0\right) > \pi_1 f\left(x, Y = 1\right). \tag{2}$$

Основываясь на логической стратегии классификации, мы относим наблюдение $x$ к первому классу с большей апостериорной вероятностью, и, используя (1) и (2), байесовский классификатор $h_B$ определяется следующим образом:

$$h_B = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \ \pi_0 f_{X,Y}\left(x, Y = 0\right) \geq \pi_1 f_{X,Y}\left(x, Y = 1\right) \\ 1, \ \textit{в других случаях} \end{cases}. \tag{3}$$

**Лемма 1.** *Байесовский классификатор (3) является оптимальным. В частности, для любого другого правила классификации $h$, ошибка классификации байесовского классификатора удовлетворяет условию $CE_{h_B} \leq CE_h$.*

### *1.2. Дискриминантная функция*

Согласно (1), дискриминантная функция определяется как

$$d_y(x) = \log_{f_{X,Y}}(x, y) + \log \Pr(Y = y), \tag{4}$$

и квадратичный дискриминант $g$ определяется как

$$g(x) = x^{\mathsf{T}} A x + a^{\mathsf{T}} x + c, \tag{5}$$

где $A$ — матрица размером $d \times d$, $a$ — вектор-столбец длиной $d$, а $c$ — константа [3].

**Гауссовские классификаторы:** Пусть условная плотность классов будет гауссовой следующим образом:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \left|\Sigma_y\right|^{\frac{1}{2}}} \exp\left( -\frac{1}{2}\left(x - \mu_y\right)^{\mathsf{T}} \Sigma_y^{-1} \left(x - \mu_y\right)\right), \tag{6}$$

где $\Sigma_y$ и $\mu_y$ — ковариационная матрица и средний вектор соответственно [11]. Заменяя (6) на (4) и упрощая, получаем

$$d_y(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \mu_y\right)^{\mathsf{T}} \Sigma_y^{-1} \left(x - \mu_y\right) - \frac{1}{2}\log\left|\Sigma_y\right| + \log \Pr(Y = y),$$

Предположим, что параметры гауссовского распределения в (6) известны. Используя (5), байесовский классификатор в (3) сводится к следующему:

$$g_B(x) = x^{\mathsf{T}} A_B x + a_B{}^{\mathsf{T}} x + c_B, \tag{7}$$

где

$$A_B = -\frac{1}{2}(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_0^{-1}),\ a_B = \Sigma_1^{-1}\mu_1 - \Sigma_0^{-1}\mu_0$$

и

$$c_B = -\frac{1}{2}\left(\mu_1^T \Sigma_1^{-1} \mu_1 - \mu_0^T \Sigma_0^{-1} \mu_0\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\left|\Sigma_0\right|}{\left|\Sigma_1\right|}\right) + \log\left(\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\right).$$

Дискриминантная функция (7) известна как квадратичный дискриминантный анализ (QDA) [6].

**Лемма 2.** *Пусть данные имеют многомерное гауссовское распределение с известными параметрами. Ошибка QDA в (7) равна BER для гауссовских моделей.*

**Доказательство.** Согласно лемме 1, имеем $Pr(h_B(X) \neq Y) = \mathrm{BER}$, и доказательство завершено.

**Пример 1 (двумерное гауссовское распределение).** Предположим, что функция плотности распределения (6) имеет следующие параметры:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix},\ \mu_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix},\quad \text{и}\quad \Sigma_0 = \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим $\pi_0 = \pi_1$ и область $R$ следующим образом:

$$R = x \mid \pi_0 f_{X|Y}(x \mid Y = 0) \geq \pi_1 f_{X|Y}(x \mid Y = 1), \tag{8}$$

затем

$$BER = \Pr\left(h_B(X) \neq Y\right) = \int_{R^c} \pi_0 f_{X|Y}(x \mid Y = 0) dx + \int_R \pi_1 f_{X|Y}(x \mid Y = 1)\, dx = 0.414131.$$

**Пример 2.** Параметры местоположения в примере 1 были смещены следующим образом:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\ \text{и}\ \mu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

и, таким образом, $BER$ снижается до 0,139038.

Классификатор (7) достигает $BER$. Он определяется как наилучшая теоретическая модель (BTM), классифицирующая данные, полученные с помощью гауссовской модели. В общем слу-

чае, когда распределение классов является гауссовским с известными параметрами, ошибка QDA равна BER (лемма 2).

**Пример 3.** Пусть $f((x \mid y)_{y=0.1} = y) \sim Cauchy(\theta_y, \varsigma_y)$ будет функцией условной плотности распределения класса следующим образом:

$$f(x \mid y = y) = \frac{\Gamma[\frac{1+k}{2}]}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{k}{2}}\left|\varsigma_y\right|^{\frac{1}{2}}\left[1+\left(x-\theta_y\right)^T \varsigma_y^{-1}\left(x-\theta_y\right)\right]^{\frac{1+k}{2}}},$$

где $\theta_y$ — вектор местоположения, $\varsigma_y$ — положительно определённая матрица дисперсии размером $k \times k$, а $\pi = 3.14$ — константа. Предположим, что $k = 2$,

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \theta_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad \varsigma_0 = \varsigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix},$$

затем, рассматривая $R$ в (8)

$$BER = \Pr\left(h_B\left(X\right) \neq Y\right) = \int_{R^c} \pi_0 f_{X|Y}\left(x \mid Y = 0\right)dx + \int_R \pi_1 f_{X|Y}\left(x \mid Y = 1\right)dx = 0.465609.$$

## 2. Почему оценка, основанная только на точности, может вводить в заблуждение?

Оценка не вводит в заблуждение, если точность классификаторов меньше точности BTM. Чтобы показать, что оценка классификаторов вводит в заблуждение, генерируются наборы данных из гауссовой модели в примере 1 с той же сложностью (плотность, разделимость и сбалансированные веса). На рис. 1 показан контур и точечная диаграмма модели и выборки данных.

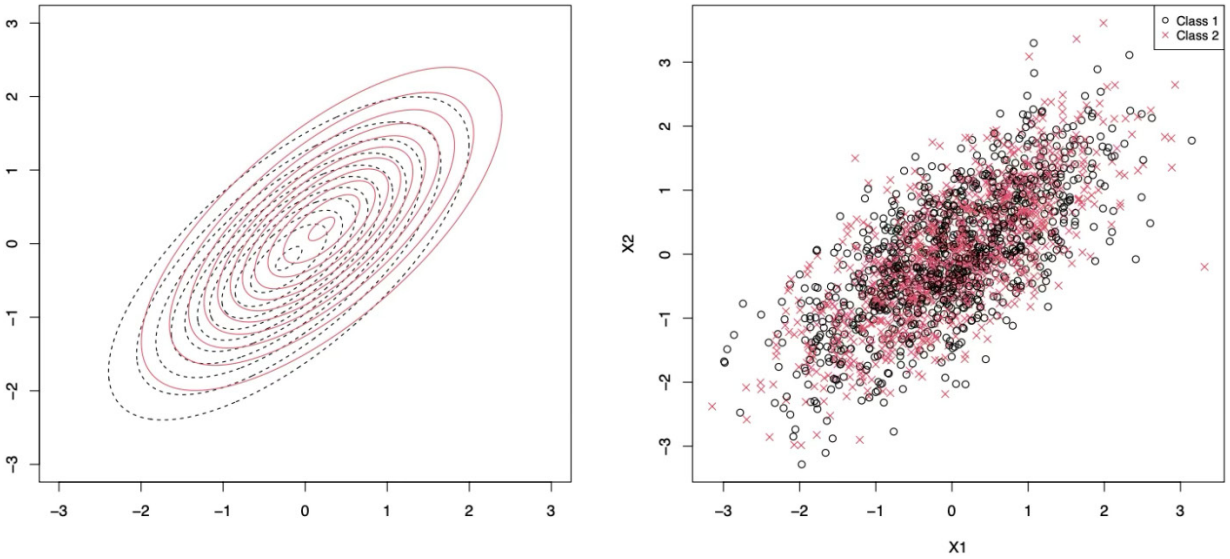



*Рис. 1. График слева — контурные диаграммы двумерных гауссовых распределений, графике справа — точечная диаграмма сгенерированных данных в примере 1*

Для анализа производительности классификаторов рассматриваются QDA, $k$-ближайших соседей (kNN), логистическая регрессия (LR), метод опорных векторов для классификации (SVC), Байесовский метод Гаусса (GNB), линейные классификаторы со стохастическим градиентным спуском (SGD), дерево решений (DT), случайный лес (RF), Повышение градиента (GB), Повышение Ada (AB), многослойный персептрон (MLP), алгоритмы из Scikit-learn [14] и параметры. Они взяты в качестве значения по умолчанию. Точность для задач классификации вычисляется с использованием 10-кратной перекрестной проверки. Классификатор из числа

этих 11 алгоритмов, который демонстрирует минимальную ошибку в наборе данных, определяется как наилучший эмпирический метод (BEM).

На рис. 2 и рис. 3 сравнивается эффективность алгоритмов классификации с BTM, представленных сплошной синей линией, и BER, обозначенной синей пунктирной линией. По мере увеличения объема выборки частота ошибок BEM, обозначенная красной линией, стремится к BTM. В большинстве случаев погрешность BEM ниже, чем у BTM и BER. Однако эти сценарии приводят к потенциально ошибочным оценкам производительности классификатора. Классификатор часто выбирается как лучший, потому что его погрешность наименьшая. Если ошибка меньше BER, то такой результат теоретически невозможен. Это несоответствие свидетельствует о неправильной оценке эффективности классификатора и требует тщательного анализа показателей и методологий оценки.

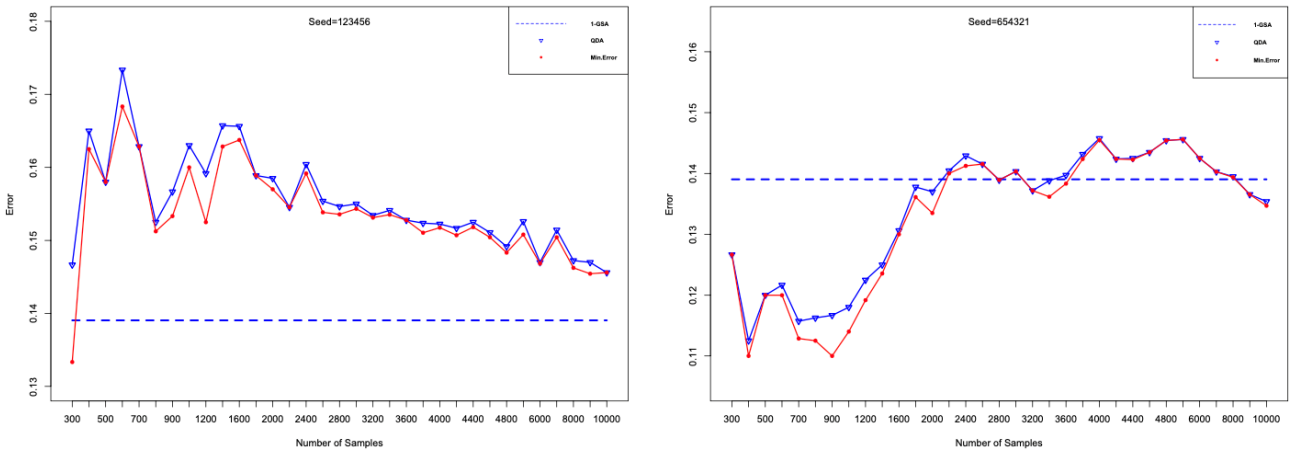
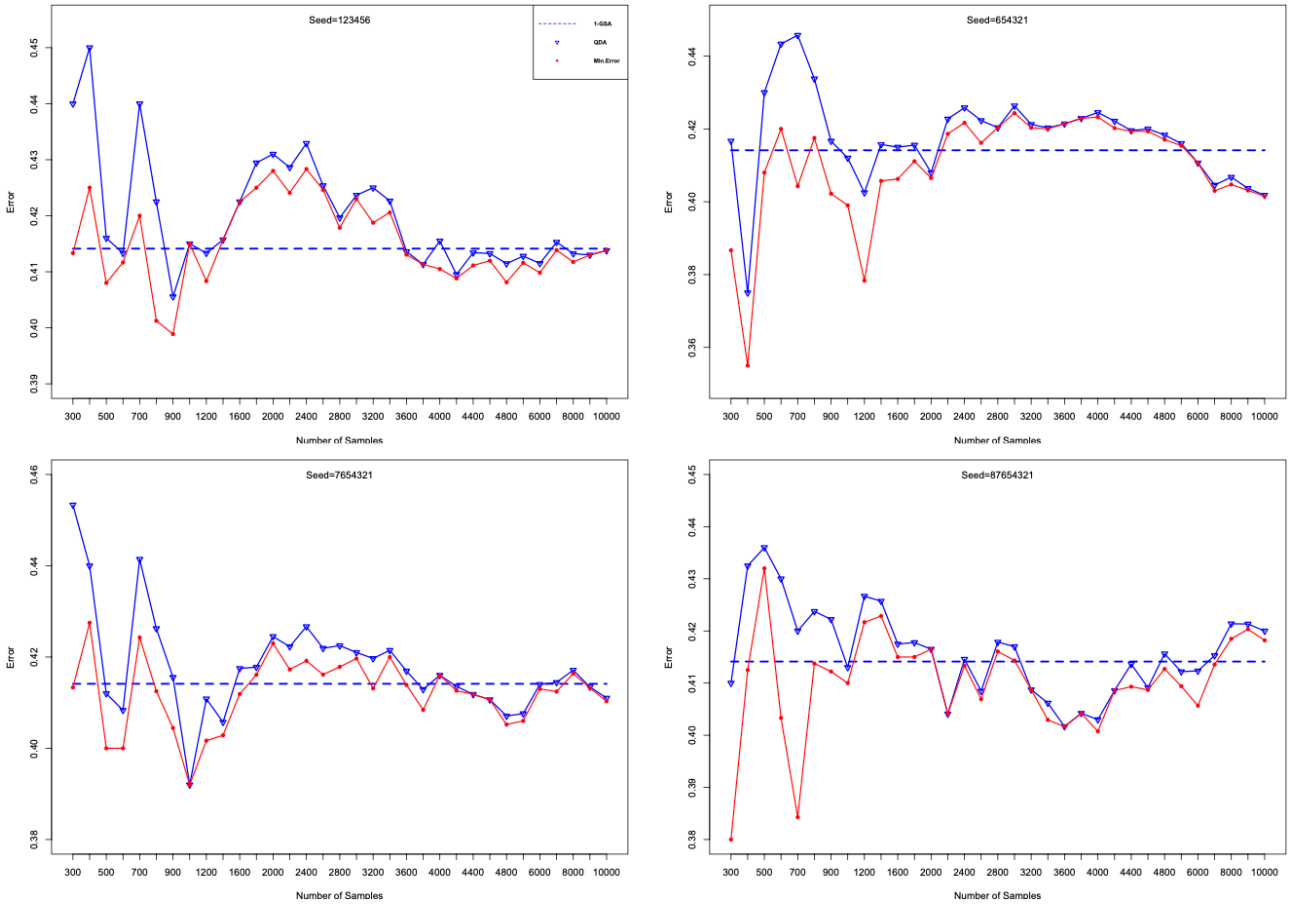



*Рис. 2. Сравнение ошибок классификации*



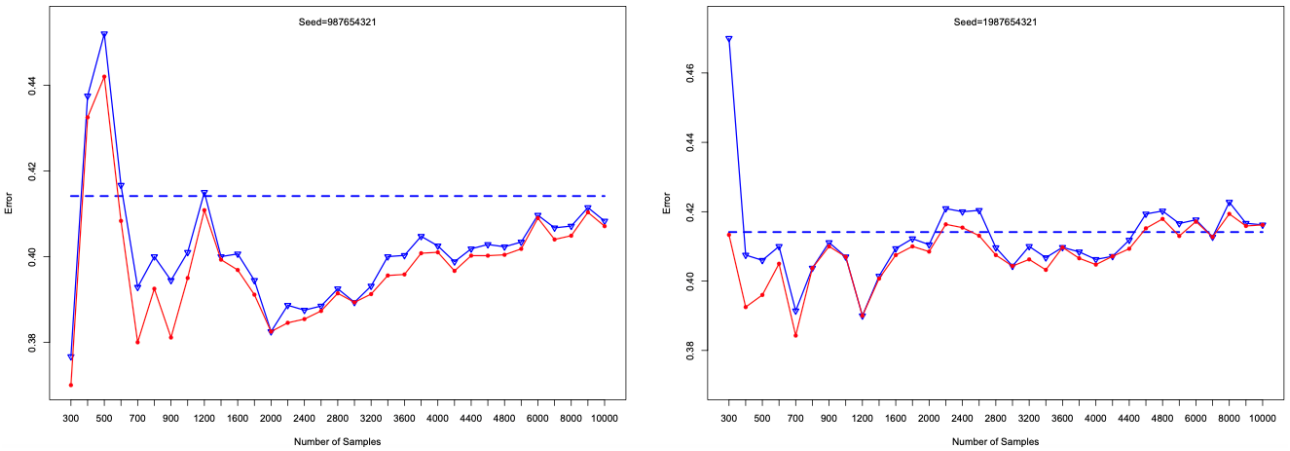



*Рис. 3. Сравнение ошибок классификации*

Далее суммируются результаты, представленные на рис. 3 в табл. 1, где коэффициент полезного действия равен 0,139038. В выборках, превышающих 300, все алгоритмы верны (точность классификаторов не менее BER); однако результаты вводят в заблуждение при оценке всех наборов данных, кроме 500 и 10000.

Сосредоточив внимание на рис. 4 (верхний левый график, $N$ =300), в подробном описании верхнего левого графика на рис. 2, можно увидеть, что ошибка алгоритма MLP равна BEM и меньше ошибки BTM, которая приводит к ошибкам принятия решений. На верхнем правом графике (N=500) ошибка алгоритма SVC равна BEM и меньше BER, что означает, что допускается ошибка при принятии решения (вводящая в заблуждение) и имеется неверная модель. Результаты обобщены в табл. 2. Однако при увеличении размера выборки ошибка BEM стремится к ошибке BTM.

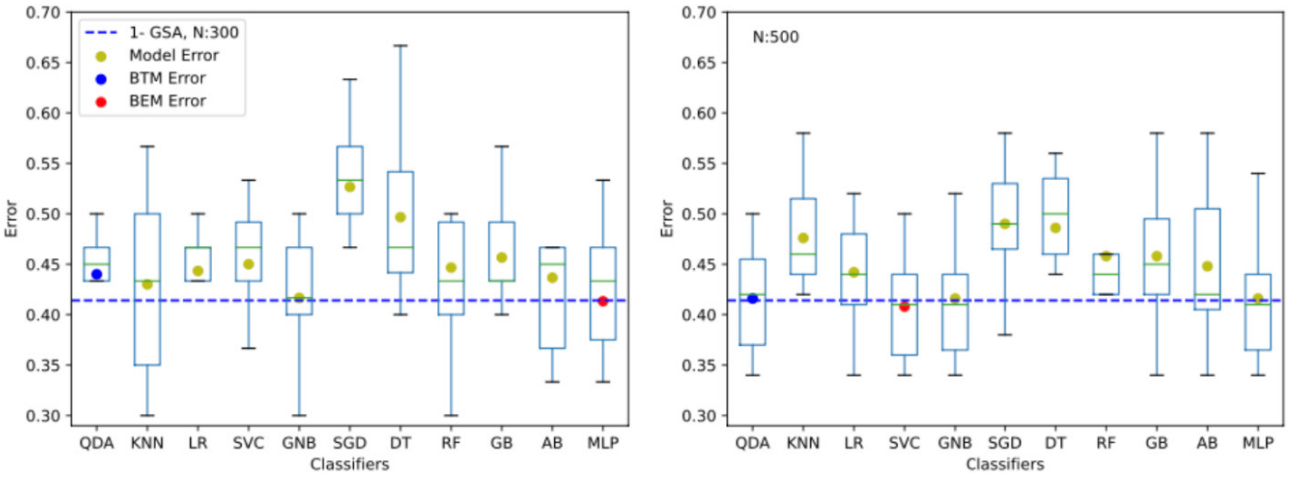



*Рис. 4. Производительность классификаторов, основанных на различных выборках*

На рис. 5 показана производительность классификатора в наборе данных, сгенерированном на основе двумерного распределения Коши с параметрами, приведенными в примере 3. MLP и GB являются недопустимыми моделями и потенциально могут вводить в заблуждение.

Таблица 1 представляет собой краткое изложение результатов левого графика рис. 3. Вводящие в заблуждение случаи и неверные модели выделены красным цветом для каждого набора данных.

Таблица 2. представляет собой краткое изложение результатов, которое показано на графике рис. 4. Случаи и модели, которые не соответствуют критериям валидации, выделены красным цветом

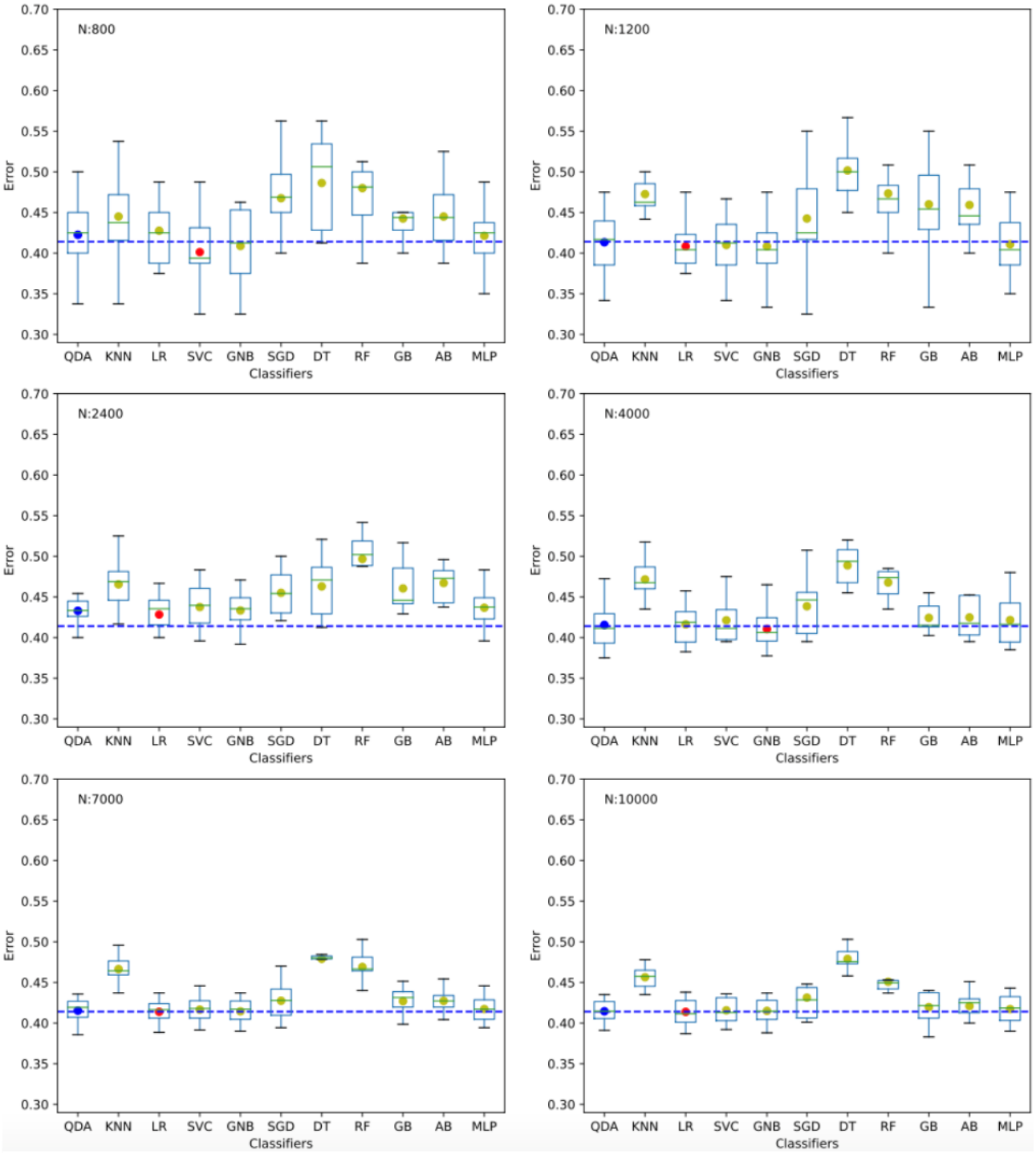



*Рис. 5. Производительность классификаторов, основанных на различных выборках*

Таблица 1

| **Размер выборки** | **Наилучший эмпирический метод** | **BER** | **Действительность** | **Лучший теоретический метод** | **Вводящий в заблуждение** |
|---|---|---|---|---|---|
| 300 | MLP | Да | Нет | Да | Да |
| 500 | QDA | Нет | Да | Нет | Нет |
| 800 | LR | Нет | Да | Да | Да |
| 1200 | SVC | Нет | Да | Да | Да |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2400 | LR | Нет | Да | Да | Да |
| 4000 | SVC | Нет | Да | Да | Да |
| 7000 | MLP | Нет | Да | Да | Да |
| 10000 | QDA | Нет | Да | Нет | Да |

Таблица 2

| **Размер выборки** | **Наилучший эмпирический метод** | **BER** | **Действительность** | **Лучший теоретический метод** | **Вводящий в заблуждение** |
|---|---|---|---|---|---|
| 300 | MLP | Да | Нет | Да | Да |
| 500 | QDA | Да | Нет | Да | Да |
| 800 | LR | Да | Нет | Да | Да |
| 1200 | SVC | Да | Нет | Да | Да |
| 2400 | LR | Нет | Да | Да | Да |
| 4000 | SVC | Да | Нет | Да | Да |
| 7000 | MLP | Да | Нет | Да | Да |
| 10000 | QDA | Да | Нет | Да | Да |

### 3. Валидация модели

Достоверность моделей определяется путем их сравнения с BER. Модели с ошибками, меньшими, чем BER, считаются недействительными. Расчетное значение BER (B$\hat{E}$R) равно 0,00±0,01 для набора данных Iris, так что все алгоритмы будут действительны. Процесс валидации осуществляется с помощью алгоритма 1.

**Алгоритм 1. Модель валидации.**

1. Вычислите B$\hat{E}$R для заданного набора данных.
2. Вычислите ошибку классификации классификатора-кандидата.
3. Если ошибка классификации на шаге 2 меньше B$\hat{E}$R, классификация является недействительной.
4. Повторите шаг 2, чтобы найти список допустимых моделей.
5. Выберите классификатор с минимальной ошибкой классификации на шаге 4.

**Замечание**. Чтобы точно оценить BER и его погрешность, можно использовать передовую методологию, разработанную Noshad и соавторами [13].

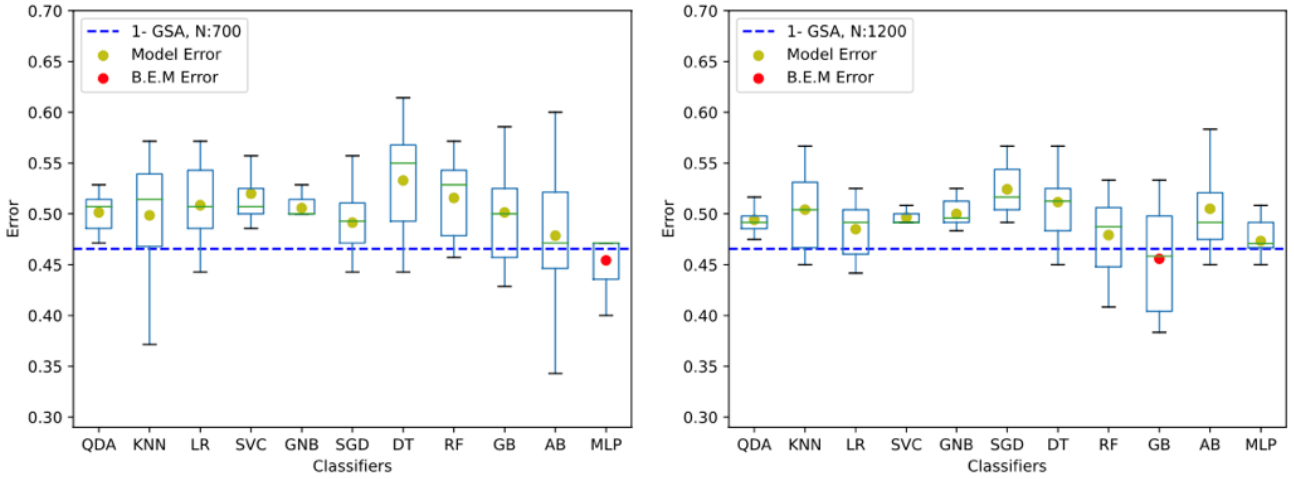



*Рис. 6. Оценка эффективности классификаторов на основе сгенерированных данных из двумерного распределения Коши (пример 3)*

## Заключение

В этой статье было показано, что при рассмотрении одних и тех же показателей сложности набора данных критерий точности, полученный из матрицы путаницы для оценки классификаторов, вводит в заблуждение. В небольших выборках оценка моделей приводит к завышению оценок. Ошибочность этого подхода в больших выборках все еще сохраняется; однако его преимущество заключается в том, что погрешность BEM стремится к погрешности BTM. Другим неприемлемым наблюдением является то, что точность алгоритмов классификации парадоксальным образом меньше BER, что теоретически невозможно и приводит к неверной оценке. Чтобы решить эту проблему, необходимо сравнить погрешность алгоритмов с BER. Однако вычислить это значение в случаях с большой размерностью невозможно. Поэтому я предлагаю, чтобы оценка и валидация алгоритмов классификации включали сравнение с BER для обеспечения точных результатов, не вводящих в заблуждение.

## Литература


1. *Alpaydin E.* Introduction to Machine Learning, Adaptive Computation and Machine Learning, MIT Press, Third Edition, 2014.

2. *Bishop C. M.* Pattern Recognition and Machine Learning, Volume 4 of Information Science and Statistics, Springer, 2006.

3. *Dalton L., Dougherty E.* Optimal Bayesian Classification, Press Monograph Series, SPIE Press, 2020.

4. *Duda R., Hart P., Stork D.* Pattern Classification, Wiley, 2012.

5. *Fernandez A., Garcia S., Galar M., Prati R. C., Krawczyk B., Herrera F.* Data Intrinsic Characteristics. – Springer, 2018. – P. 253–277.

6. *Fukunaga K.* Introduction to Statistical Pattern Recognition, Chapter 10, Academic Press, 1990.

7. *Guan S., Loew M. H.* A novel intrinsic measure of data separability. – 2022. – 52. – P. 17734–17750.

8. *Ho T. K., Basu M.* Complexity measures of supervised classification problems // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – 2002. – 24. – P. 289–300.

9. *Izenman A.* Modern Multivariate Statistical Techniques: Regression, Classification, and Manifold Learning, Springer Texts in Statistics. Springer, 2009.

10. *Lorena A. C., Garcia L. P. F., Lehmann J., Souto M. C. P., Ho T. K.* How complex is your classification problem? A survey on measuring classification complexity // ACM Comput. Surv. – 2019. – 52. – P. 1–34.

11. *McLachlan G. J.* Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition, Wiley, 2004.

12. *Murphy K.* Probabilistic Machine Learning: An Introduction, Adaptive Computation and Machine Learning series, MIT Press, 2022.

13. *Noshad M., Xu L., Hero A.* Learning to benchmark: Determining best achievable misclassification error from training data, 2019.

14. *Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R., Dubourg V., Vanderplas J., Passos A., Cournapeau D., Brucher M., Perrot M., Duchesnay E.* Scikit-learn: Machine learning in Python // J. Mach. Learn. Res. – 2011. – 12. – P. 2825–2830.

15. *Peleg Y.* Hungabunga: Brute-Force all sklearn models with all possible hyperparameters, and rank using cross-validation, GitHub, Retrieved from https://github.com/ypeleg/HungaBunga, 2023.

УДК 004.05: 004.9

# ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТОЧЕК СХОДА В ЗАДАЧАХ КАЛИБРОВКИ КАМЕР ДОРОЖНОГО ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ

**А. А. Здоровцов, Р. Ю. Вишняков**

*Кубанский государственный университет*

**Аннотация.** Статья посвящена применению точек схода для калибровки монокулярных камер дорожно-транспортного видеонаблюдения. Рассматриваются существующие ручные и автоматические подходы к извлечению точек схода на изображении с камер видеонаблюдения для выполнения калибровки. В основной части статьи представлена математическая модель калибровки пинхол-камеры, основанная на трех взаимно ортогональных точках схода с учетом определенных допущений о внутренних параметрах камеры. Особое внимание уделяется ключевым критериям и ограничениям, возникающим при разработке автоматизированных алгоритмов калибровки на основе точек схода. В заключительной части статьи приводится оценка влияния точности вычисления точек схода на точность вычисления параметров.

**Ключевые слова:** точки схода, калибровка монокулярных камер, автоматизация калибровки, ограничения калибровки, системы дорожного видеонаблюдения, контроль скоростного режима, безопасность дорожного движения.

## Введение

Калибровка камер играет важную роль во многих задачах и приложениях компьютерного зрения, так как калибровка позволяет восстанавливать внешние и внутренние параметры камеры. К внутренним параметрам относится фокусное расстояние, главная (принципиальная) точка и коэффициент перекоса пикселей, а внешние параметры описывают ориентацию и положение камеры в пространстве. Перечисленные параметры имеют решающее значение, поскольку они позволяют описать преобразование, переводящее координаты точек сцены из мировой системы координат в систему координат, связанную с камерой. Это позволяет проецировать транспортные средства и другие объекты интереса, находящиеся на изображении с камеры видеонаблюдения, на плоскость дорожного покрытия, что позволяет решать множество задач в области дорожного видеонаблюдения и обеспечения безопасности дорожного движения. Задача калибровки монокулярных камер, входящих в состав стационарных комплексов дорожного видеонаблюдения, вызывает особый интерес научного сообщества.

Существует множество подходов, направленных на решение задачи калибровки монокулярных камер, однако, наиболее распространенный и популярный подход основан на использовании точек схода [1, 2]. Идея данного подхода предполагает использование перспективы изображения, при которой линии, параллельные в реальном мире, являются сходящимися на изображении. Исходя из данной особенности многие из существующих подходов стремятся к автоматизации процесса калибровки за счет ручного или автоматического извлечения параллельных в пространстве линий и соответствующих им точек схода на изображении для вычисления внешних и внутренних параметров камеры.

Несмотря на свою популярность и широкое применение, методы, использующие точки схода, имеют ряд ограничений, затрудняющих автоматизацию процесса калибровки. Целью настоящей работы является комплексное исследование калибровки монокулярных камер дорожного видеонаблюдения на основе точек схода, включающее анализ существующих методов, формализацию математической модели, оценку влияния точности вычисления точек схода на параметры калибровки и определение ключевых критериев и ограничений, существенных для автоматизации этого процесса.

## 1. Методы калибровки камер по точкам схода

Многообразие и стремительное развитие различных методов, посвященных решению задачи калибровки камер, лишь подтверждает ее актуальность и значимость в области дорожно-транспортного видеонаблюдения. Общепринятая практика калибровки заключается в сопоставлении координат точек трехмерного пространства и их проекций на плоскости изображения с камеры [3]. Однако точное измерение координат точек трехмерного пространства, находящихся в области видимости камеры дорожного видеонаблюдения, является трудоемкой задачей, поскольку может требовать остановки дорожного движения с целью проведения замеров. Соответственно многие авторы используют иную постановку задачи калибровки, которая основана на точках схода.

В работе [4] предложен один из первых методов калибровки, требующий ручного указания линий дорожной разметки, а также ввода высоты и угла наклона камеры видеонаблюдения. Известные параметры установки камеры, а также известные координаты точки схода, соответствующей пересечению линий разметки, позволили вычислить фокусное расстояние камеры и произвести калибровку. Похожим образом функционирует метод, предложенный в работе [5], однако для калибровки также производится расчет масштабного коэффициента на основе известной длины полос разметки как на изображении, так и в мировом пространстве. В работе [6] первая точка схода также вычисляется как точка пересечения линий разметки, вторая точка схода вычисляется по вертикальным столбам и пешеходам, а масштабный коэффициент вычисляется на основе известной высоты камеры или размеров объектов в области ее видимости. Существует алгоритм калибровки, также использующий пешеходов для первой точки схода, а вторая точка схода вычисляется на основе анализа пешеходных переходов типа «зебра» [7].

Многие методы осуществляют вычисление одной из точек схода на основе анализа динамики перемещения транспортных средств в кадре. Один из таких методов осуществляет вычисление одной из точек схода на основе «карты активности», предназначенной для обнаружения границ полос движения [8]. Ряд других алгоритмов основан на отслеживании характерных точек транспортных средств и определении точки схода посредством вычисления пересечения сформированных характерными точками отрезков [9, 10]. Вычисление точки схода, соответствующие прямые линии которой перпендикулярны направлению движения транспортных средств, в некоторых работах осуществляется на основе контрастных прямолинейных границ транспортных средств [8, 11] или же их государственных регистрационных знаков (ГРЗ) [9]. Примечательным образом вычисление точек схода осуществляется в работе [12]. Авторы метода, представленного в работе, используют сверточные нейронные сети для предсказания ориентации транспортного средства относительно камеры видеонаблюдения. Предсказанная ориентация описывается тремя взаимно ортогональными векторами, которые в дальнейшем используются для вычисления точек схода.

Обзор существующих методов калибровки показывает, что использование точек схода является ключевым направлением в задаче калибровки камер дорожного видеонаблюдения. Авторы многих существующих методов используют линии дорожной разметки, пешеходов, транспортные средства и другие объекты дорожной инфраструктуры для достижения максимальной автоматизации процедуры калибровки. Однако набор методов, основанных на использовании разметки, пешеходов и объектов инфраструктуры не является универсальным и существенно зависит от сценариев применения, поэтому в дальнейшем такие методы рассматриваться не будут. В свою очередь, методы, предполагающие вычисление точек схода посредством визуального анализа транспортных средств, обладают высоким потенциалом в контексте автоматизации калибровки, однако, они также не лишены ограничений и недостатков. Прежде чем приступать к их обзору, коротко рассмотрим основные принципы калибровки монокулярных камер на основе точек схода.

## 2. Калибровка пинхол-камеры по точкам схода

Проецирование точек трехмерного пространства $(x_w, y_w, z_w, 1)'$ в точки $(x_p, y_p, 1)'$ на плоскости двухмерного изображения с камеры видеонаблюдения осуществляется с помощью проекционной матрицы $\mathbf{P}$ следующим образом:

$$\lambda_p (x_p, y_p, 1)' = \mathbf{P}(x_w, y_w, z_w, 1)'.$$

Проекционную матрицу $\mathbf{P}$ можно описать с помощью матрицы внутренних параметров $\mathbf{K}_{3\times3}$ и матрицы внешних параметров, представляющих собой конкатенацию матрицы поворота $\mathbf{R}_{3\times3}$ и вектора параллельного переноса $\mathbf{T}_{3\times1}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\ \left[\mathbf{R}\ \mathbf{T}\right].$$

Матрица $\mathbf{K}$ представляет собой матрицу внутренних параметров камеры и содержит: $\alpha_u$ и $\alpha_v$ — фокусное расстояние камеры в пикселях по направлениям $u$ и $v$ соответственно; $\gamma$ — коэффициент перекоса пикселей; $(u_0, v_0)$ — главная (принципиальная) точка. Как правило, в задаче калибровки монокулярных камер дорожного видеонаблюдения используется нулевой коэффициент перекоса пикселей $\gamma = 0$, нулевое соотношение сторон $\left(\frac{\alpha_u}{\alpha_v} = 1\right)$, а в качестве главной точки используются координаты центра изображения.

Матрица поворота $\mathbf{R}$, описывающая ориентацию камеры в пространстве, вычисляется за счет трех взаимно ортогональных точек схода $U$, $V$ и $W$ соответственно. В большинстве случаев в качестве первой точки схода $U$ используется точка, соответствующие прямые линии которой лежат в плоскости дороги и сонаправлены движению транспортных средств. Прямые линии, соответствующие второй точке схода $V$, также лежат в плоскости дороги, но перпендикулярны прямым, соответствующим первой точке схода $U$. На основе двух известных точек схода вычисляется фокусное расстояние, а затем и третья точка схода $W$ [8, 10]. Для точного вычисления вектора переноса $\mathbf{T}$ обычно требуется дополнительная информация о видимой камерой области. В качестве такой информации может выступать высота установки камеры или известное расстояние между точками в плоскости дорожного покрытия [3]. Эта информация необходима для вычисления масштабного коэффициента $\lambda_p$, который позволяет преобразовать условные единицы измерения в метры. Подробное описание математической модели калибровки на основе трех взаимно ортогональных точек схода представлено в работе [2].

В результате проведения калибровки дорожное полотно может быть аппроксимировано плоскостью, а проекционная матрица $\mathbf{P}$ предоставляет возможность проецирования точек, лежащих на плоскости изображения с камеры видеонаблюдения, на плоскость дороги. Для этого строится луч, образованный оптическим центром камеры и координатами на плоскости изображения, после чего вычисляется точка пересечения построенного луча с плоскостью дороги (например, при $z = 0$). Проекция главной точки на построенную плоскость дорожного покрытия является началом трехмерных координат.

## 3. Влияние точек схода на точность калибровки

Измерение точности калибровки сводится к сравнению вычисленных и достоверно известных фактических значений параметров камеры, объектива или объектов на сцене. Для случая, представленного на рис. 1, проведем оценку влияния точек схода на точность калибровки на основе известной высоты установки камеры, а также известных расстояний между фиксированными точками на плоскости дорожного покрытия. На плоскости дорожного покрытия расположено два отрезка, сонаправленных осям $X$ и $Y$ соответственно. Первый отрезок расположен между линиями прерывистой разметки и имеет длину ~3.04 м, а второй

отрезок расположен на дорожной полосе и имеет длину ~3.75 м. Точки схода в случае представленного изображения вычислены посредством ручного указания отрезков (проекций прямых), соответствующих параллельным в пространстве линиям. Отрезки, соответствующие оси $X$, отмечены красным цветом в то время, как отрезки, соответствующие оси $Y$, отмечены зеленым цветом.

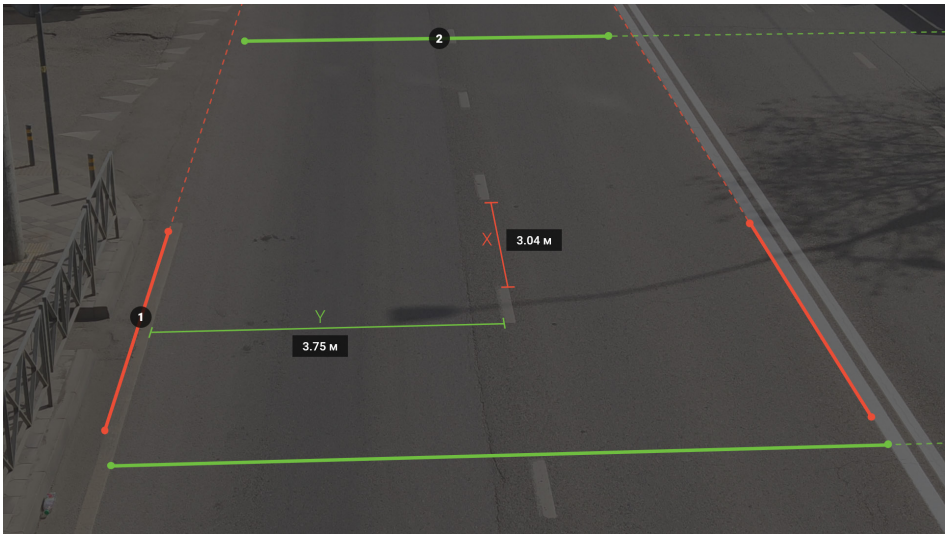



*Рис. 1. Изображение с известным фокусным расстоянием и с известной длиной отрезков на проезжей части*

Для оценки влияния точек схода на точность калибровки мы можем вносить ошибку вычислений посредством смещения отрезков, точкой пересечения которых являются эти точки схода. Каждый из этих отрезков представим в виде луча, берущим начало в любой точке, лежащей на этом отрезке, и имеющим такое же направление. В случае отрезка (1) на рис. 1 положим начало луча в крайней нижней точке. Для изменения точки схода по оси $X$ мы можем попиксельно смещать начало луча (1) по горизонтали и повторно проводить калибровку камеры. В результате подобного влияния на точку схода были сформированы графики зависимости длин отрезков от смещения луча (1) по горизонтали относительно исходного положения (рис. 2). В левой части представлены графики ошибки измерений длины отрезка по оси $X$ (красная кривая), а в правой — отрезка по оси $Y$ (зеленая кривая). По графикам видно, что при смещении луча (1), соответствующего оси $X$, ошибка измерения длины отрезка по оси $Y$ существенно превышает ошибку измерения длины отрезка по оси $X$. Следует отметить, что для корректного сравнения фактических и вычисленных расстояний, оценка масштабного коэффициента сцены была вычислена на основе известной высоты установки камеры.

Проведем аналогичную процедуру с отрезком (2), построив луч с таким же направлением и началом в крайней левой точке отрезка. Смещение начала луча (2) будем проводить по вертикальной оси. Графики зависимости длин отрезков от смещения луча по вертикали относительно исходного положения представлены на рис. 3. Графики демонстрируют противоположные предыдущему эксперименту результаты — при смещении луча (2), соответствующего оси $Y$, ошибка измерения длины отрезка по оси $X$ существенно превышает ошибку измерения длины отрезка по оси $Y$.

На графиках, представленных на рис. 2 и рис. 3, также следует обратить внимание на диапазоны попиксельных смещений. При смещении луча (1) ошибка измерения отрезка по оси $X$, равная 0.1 м, достигается при смещении от –200 px до 100 px по горизонтали, а ошибка измерения длины отрезка по оси $Y$ в этом диапазоне достигает значение, превышающее 0.5 м. В то же время, при смещении луча (2) ошибка измерения длины отрезка по оси $X$, превосхо-

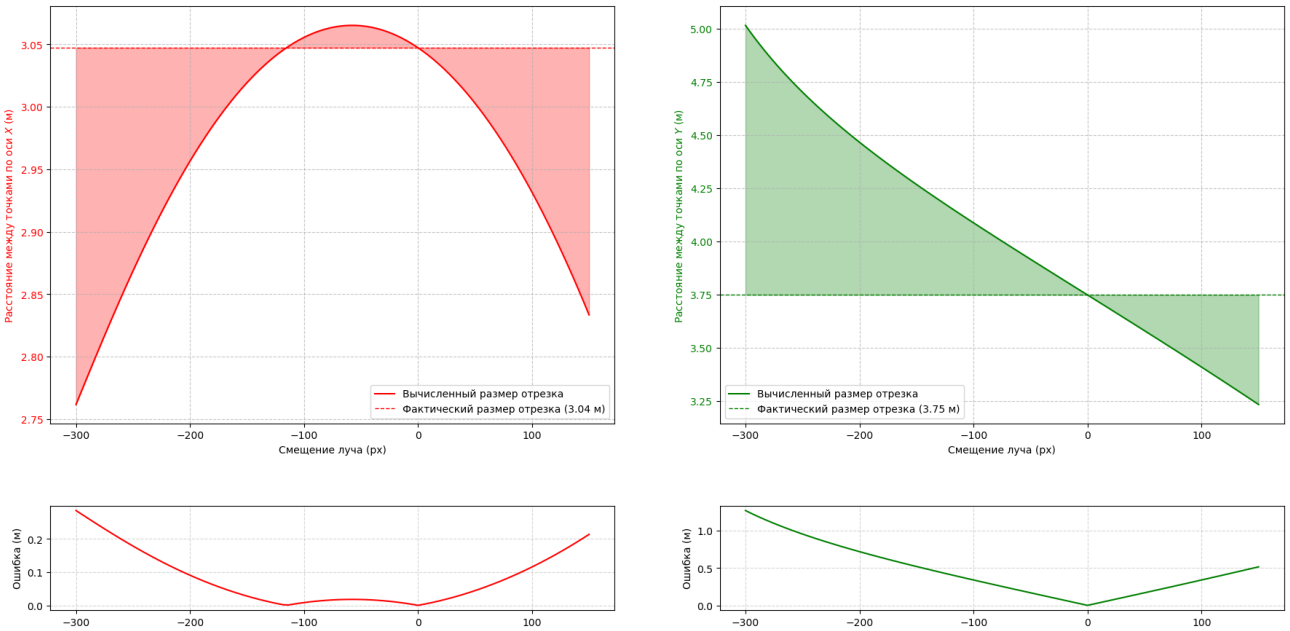



*Рис. 2. Ошибка измерения расстояния между точками при смещении проекций параллельных в пространстве линий по оси $X$*

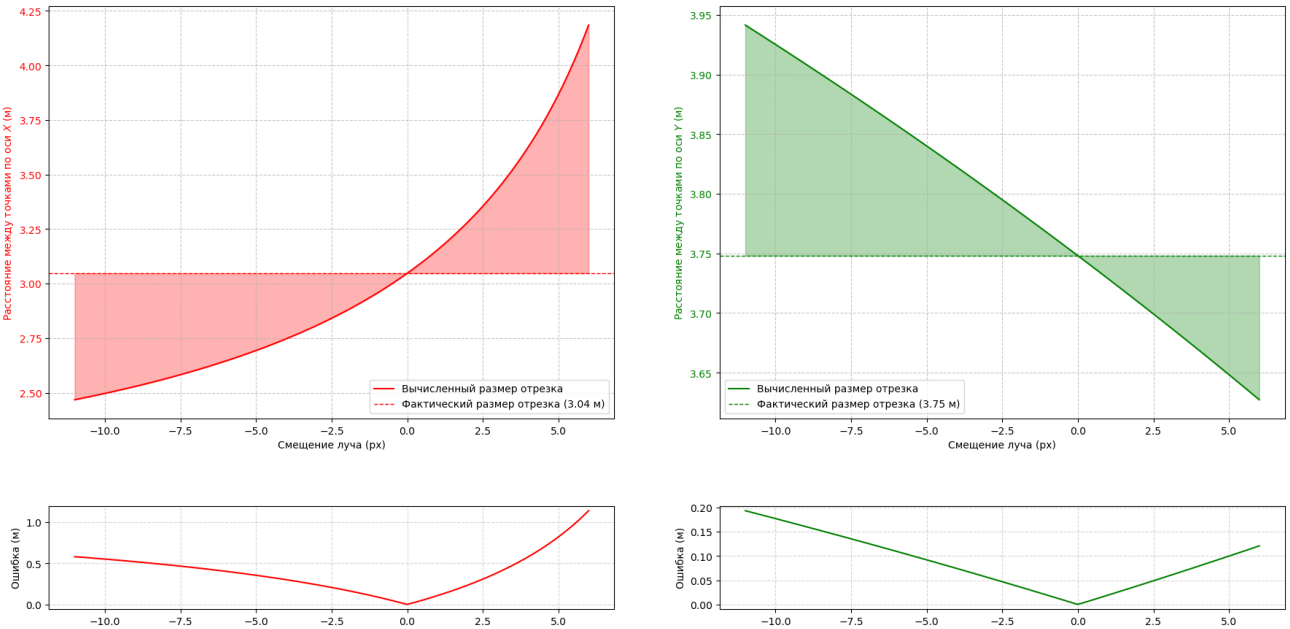



*Рис. 3. Ошибка измерения расстояния между точками при смещении проекций параллельных в пространстве линий по оси $Y$*

дящая 0.1 м, достигается при смещении луча в диапазоне от –2 px до 1 px, а в случае отрезка по оси $Y$ ошибка, составляющая 0.1 м достигается в диапазоне смещений от –5 px до 5 px. Очевидно, что точка схода, соответствующая оси $Y$, более чувствительна к изменениям направления лучей и оказывает существенно большее влияние на точность калибровки, чем точка схода, соответствующая оси $X$. Это связано с одним из приведенных ранее критериев, согласно которому точность вычисления точек схода, а, следовательно, и точность калибровки, в том числе зависит от угла между прямыми на изображении, соответствующим этим точкам схода. Угол между проекциями параллельных в пространстве прямых, представленными в виде красных отрезков на рис. 1, составляет ~49.75°, в то время как угол между проекциями в виде зеленых отрезков равен ~2.57°, т. е. они близки к параллельным.

Ось $X$ результирующей плоскости дорожного покрытия, построенной в результате калибровки камеры, имеет решающее значение в задаче измерения скорости транспортных средств. Поскольку ось $X$ соответствует направлению движения транспортного средства, измерение пройденного им расстояния в момент времени осуществляется именно по данной оси. Погрешности калибровки, возникаемые в результате ошибок вычисления точек схода, являются основной причиной погрешностей измерения скорости. Так, при движении транспортного средства с фактической скоростью 30 км/ч, при погрешности измерений расстояния между точками по оси $X$, составляющей $\Delta d = 0.1$ м, вычисленная скорость перемещения транспортного средства будет варьироваться в диапазоне от 19.2 км/ч до 40.8 км/ч, что является критической погрешностью относительно реальной скорости. Подобные ограничения требуют специфических подходов к калибровке камер дорожного видеонаблюдения, способных обеспечить высокую точность вычисления точек схода и масштабного коэффициента сцены.

## 4. Ограничения алгоритмов калибровки по точкам схода

Напомним, что точка схода (исчезающая точка) в перспективной проекции — это точка на плоскости изображения, в которой пересекаются проекции параллельных в пространстве прямых, не параллельных плоскости изображения. Следовательно, использование точек схода в задаче калибровки камер накладывает ряд критериев и ограничений, вытекающих из данного определения. Несоблюдение этих критериев и ограничений приводит к неточным вычислениям внутренних и внешних параметров камеры, что влечет значительные погрешности измерений, проводимых системой дорожного видеонаблюдения. Рассмотрим ключевые критерии и ограничения, которые необходимо учитывать при разработке автоматизированных алгоритмов калибровки монокулярных камер на основе точек схода.

Поскольку для проведения автоматической калибровки монокулярных камер дорожного видеонаблюдения требуется по крайней мере две точки схода, необходимо сформировать соответствующие им множества прямых линий на изображении. Способы формирования данных множеств могут варьироваться в зависимости от подхода к обработке и анализу видеопоследовательности с камеры видеонаблюдения и должны удовлетворять следующим критериям. Прежде всего, для корректного вычисления каждой точки схода прямые линии в пространстве, соответствующие этой точке, должны быть взаимно параллельны, в то время как их проекции на изображении должны иметь точку пересечения. Кроме того, для обеспечения корректности калибровки необходимо, чтобы прямые линии в пространстве, соответствующие разным точкам схода, были взаимно перпендикулярны.

Для удовлетворения двух обозначенных критериев формирования множеств прямых линий, соответствующих точкам схода, авторы автоматизированных методов калибровки используют визуальный анализ транспортных средств на изображении. Именно динамика перемещения и ориентация транспортных средств относительно камеры видеонаблюдения позволяют сформировать необходимый набор прямых линий для корректного вычисления точек схода. Следовательно, такой подход предполагает, что транспортные средства должны двигаться прямолинейно и не совершать перестроений, поворотов или остановок, поскольку подобные маневры способствуют формированию множества прямых линий, не соответствующих целевой точке схода и тем самым затрудняющих ее вычисление. Для минимизации незначительных шумов применяют различные методы фильтрации прямых [8], однако, регулярное маневрирование транспортных средств неизбежно накладывает ограничения на работу автоматических алгоритмов калибровки на извилистых участках дороги, перекрестках и других местах со сложной дорожной инфраструктурой.

Типы объектива, которым оснащаются камеры дорожного видеонаблюдения, также накладывают ряд ограничений на использование точек схода для калибровки. Так, например, широ-

коугольным объективам свойственно возникновение дисторсии — аберрации, искривляющей изображение по краям. Влияние дисторсии прямо пропорционально углу поля зрения, т. е. углу в пространстве, который отображается объективом на матрице (сенсоре) камеры. вследствие влияния дисторсии отрезки, формируемые путем отслеживания перемещения транспортных средств, также будут искривлены, что значительно снижает точность вычисления точек схода. Дисторсию можно устранить, проведя предварительную калибровку с целью вычисления коэффициентов дисторсии [3], либо с помощью эволюционных алгоритмов (рис. 3) [8].

Нередко монокулярные камеры дорожного видеонаблюдения установлены таким образом, чтобы контролировать небольшой и ограниченный участок дороги. Это возможно благодаря использования объективов с малым углом зрения, что обеспечивает компромисс между разрешающей способностью матрицы камеры и возможностью распознавать ГРЗ транспортных средств. В случае использования подобных объективов проекция изображения становится близка к ортогональной, т. е. такой, при которой определенный набор прямых линий на изображении, являющихся проекциями параллельных линий в пространстве, также близки к параллельным. Отсюда можем заключить, что точность вычисления точек схода зависит от угла между прямыми на изображении, соответствующим этим точкам схода. Влияние угла между прямыми на точность измерения точек схода и, соответственно, на точность калибровки камеры в целом, подробнее рассмотрено в следующем разделе.

Поскольку для автоматизации алгоритмов калибровки преимущественно используется визуальный анализ транспортных средств, качество изображения с камеры видеонаблюдения играет немаловажную роль в контексте вычисления точек схода. Низкое качество изображения, шумы, засветы и другие артефакты могут затруднять детектирование и отслеживание транспортных средств и их характерных признаков, что негативно влияет на точность вычислений точек схода и, соответственно, калибровки. К подобным ограничениям относятся и погодные условия: дождь, туман, снег и другие природные явления также служат помехой для проведения качественной калибровки.

## Заключение

Калибровка камер является одним из важнейших этапов настройки систем дорожно-транспортного видеонаблюдения и имеет решающее значение в решении задач транспортной аналитики и контроля правил дорожного движения. Автоматизированные методы калибровки, основанные на использовании точек схода, являются наиболее эффективными относительно остальных методов, так как позволяют проводить калибровку без предварительных входных параметров, а также не требуют ручной настройки системы. Подобный подход к калибровке способен минимизировать влияние человеческого фактора, упростить настройку систем видеонаблюдения и снизить эксплуатационные и пусконаладочные затраты.

Несмотря на высокий потенциал подобных методов, использование точек схода в задаче калибровки камер накладывает ряд критериев и ограничений, несоблюдение которых может снизить точность вычисления точек схода и точность калибровки, соответственно. При разработке автоматизированных методов калибровки важно: учитывать способ извлечения прямых на изображении, соответствующих параллельным в пространстве прямых; учитывать ортогональность прямых в пространстве, соответствующих разным точкам схода; учитывать особенности дорожного участка, чтобы минимизировать влияние маневрирования транспортных средств в области видимости камеры; учитывать наличие дисторсии на изображении; обеспечить компромисс между качеством изображения и способностью к детектированию транспортных средств и распознаванию их ГРЗ таким образом, чтобы угол между прямыми на изображении, соответствующими точке схода, был наибольшим; учитывать особенности погодных условий и качество изображения в целом.

Стоит также отметить, что требования, предъявляемые системой видеонаблюдения к точности калибровки, зависят от конкретных задач, решаемых данной системой. Так, например, при построении трехмерных ограничительных рамок на основе точек схода, а также при вычислении ориентации или траекторий транспортных средств, погрешности при вычислениях точек схода допустимы. В то же время задача измерения скорости транспортных средств предъявляет более строгие требования к надежности и эффективности калибровки, поскольку для точного расчета скорости необходимо обеспечить высокую точность определения точек схода и масштабного коэффициента сцены. Подобные требования к точности измерений являются барьером для широкого внедрения алгоритмов автоматической калибровки монокулярных камер, входящих в состав систем видеонаблюдения, не использующих радары и другие специализированные устройства для измерения скорости транспортных средств.

**Литература**


1. *Caprile V. Torre.* Using Vanishing Points for Camera Calibration // International Journal of Computer Vision. – March 1990. – Vol. 4, Iss. 2. – P. 127–139.

2. *Guillou D., Meneveaux E., Maisel K. Bouatouch.* Using Vanishing Points for Camera Calibration and Coarse 3D Reconstruction from a Single Image // The Visual Computer. – 2000.

3. *Zhang A.* flexible new technique for camera calibration // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2000. – Vol. 22, No 11. – P. 1330–1334.

4. *Bas K., Crisman J. D.* An easy to install camera calibration for traffic monitoring // Proceedings of Conference on Intelligent Transportation Systems. – 1997. – P. 362–366.

5. *Cathey F., Dailey D.* A novel technique to dynamically measure vehicle speed using uncalibrated roadway cameras // in Intelligent Vehicles Symposium. – 2005. – P. 777–782.

6. *You X., Zheng Y.* An accurate and practical calibration method for roadside camera using two vanishing points // Neurocomputing. – 2016.

7. *Hodlmoser M., Micusik B., Kampel M.* Camera auto-calibration using pedestrians and zebra-crossings // In Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. – 2011. – P. 1697–1704.

8. *Dubska M., Herout A., Juranek R., Sochor J.* Fully automatic roadside camera calibration for traffic surveillance. Intelligent Transportation Systems // IEEE Transactions on. – June 2015. – Vol. 16, No 3. – P. 1162–1171.

9. *Здоровцов А. А., Вишняков Р. Ю.* Разработка алгоритма автоматической калибровки камер комплекса контроля скорости с применением методов нейросетевой идентификации объектов // Прикладная математика: современные проблемы математики, информатики и моделирования: материалы IV всероссийской научно-практической конференции молодых ученых. – 2022. – С. 117–120.

10. *Здоровцов А. А.* Разработка и исследование алгоритма калибровки монокулярной камеры контроля скорости // Прикладная математика: современные проблемы математики, информатики и моделирования: материалы III всероссийской научно-практической конференции молодых ученых. – 2021. – С. 150–155.

11. *Schoepin T. N., Dailey D.* Dynamic camera calibration of roadside traffic management cameras // In IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC. – 2002. – Vol. 2002-Janua. – С. 25–30.

12. *Sochor J., Spanhel J., Herout A.* BoxCars: Improving Fine-Grained Recognition of Vehicles using 3D Bounding Boxes in Traffic Surveillance // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2018.

УДК 004.942:629.7.02

# МОДЕЛЬ ПРОВОЛОЧНОГО ПРИВОДА ИЗ МАТЕРИАЛА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ ДЛЯ РАСКРЫТИЯ КРУПНОГАБАРИТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

**В. Н. Зимин, А. О. Шахвердов**

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

**Аннотация.** Крупногабаритные конструкции должны доставляться на орбиту в транспортном плотноупакованном виде, допускающем их трансформацию из сложенного состояния в развернутое. Сама процедура развертывания конструкции происходит под воздействием силовых приводов. Для того чтобы избежать динамических нагрузок, воздействующих на элементы трансформируемой системы, необходимо применять приводы, работающие безударно и имеющие относительно небольшую массу. Представляется целесообразным использовать привод с активным элементом, выполненным из материала никелида титана с эффектом памяти формы. У этих активных элементов управляющим воздействием является температурное поле. Фазовые превращения материала никелида титана весьма чувствительны к изменению температуры, в силу чего требуется высокая точность её обеспечения.

**Ключевые слова:** температура, привод, память формы, математическая модель, электрическое сопротивление, раскрытие, космическая конструкция.

## Введение

Создание крупногабаритных космических конструкций связано с решением ряда технических проблем, обусловленных уникальностью систем, характерной особенностью которых является сочетание противоречивых требований, а именно увеличения геометрических размеров и обеспечения достаточной жесткости при минимальной возможной их массе [1]. Особый класс таких космических систем образуют трансформируемые конструкции [2–4], схема которых предполагает автоматическое изменение конфигурации. Конструкции доставляются на околоземную орбиту в сложенном плотноупакованном состоянии. При достижении необходимой орбиты осуществляется раскрытие конструкции. В области создания крупногабаритных трансформируемых космических конструкций достигнуты значительные успехи. Во многих конструкциях коэффициент трансформации (отношение объемов в раскрытом рабочем положении и плотноупакованном транспортном состоянии) повысился до 30. Дальнейшее совершенствование трансформируемых крупногабаритных космических конструкций может быть связано с оптимизацией массовых характеристик приводов, осуществляющих их раскрытие из транспортного состояния в рабочее положение на орбите. Так, применение привода с активными элементами на основе материалов с эффектом памяти формы (ЭПФ) представляет собой рациональное техническое решение, позволяющее провести плавное раскрытие конструкции без значительных динамически нагрузок [5]. Такие приводы обладают высокой надежностью, простотой конструкции, миниатюрностью и малой массой. Проволока из никелида титана — яркий пример применения материалов с ЭПФ в качестве активного элемента силового привода [6].

## 1. Активные элементы привода из материала с эффектом памяти формы

Активным элементом привода для раскрытия крупногабаритной космической конструкции может быть проволока из никелида титана (рис.1). Данный материал обладает эффектом памяти формы. Это физическое явление, при котором материал способен восстанавливать

свою исходную форму под действием внешнего стимула, чаще всего изменения температуры, после значительной деформации. Этот эффект реализуется за счёт обратимых структурных превращений в кристаллической решётке. При нагреве выше температуры начала обратного превращения начинается переход из мартенситного фазового состояния в аустенитное. За счёт термоупругости мартенсита внутренние напряжения в кристаллической решётке вызывают автодеформацию, возвращающую материал в исходную форму. Полное восстановление завершается при достижении температуры конца обратного превращения.

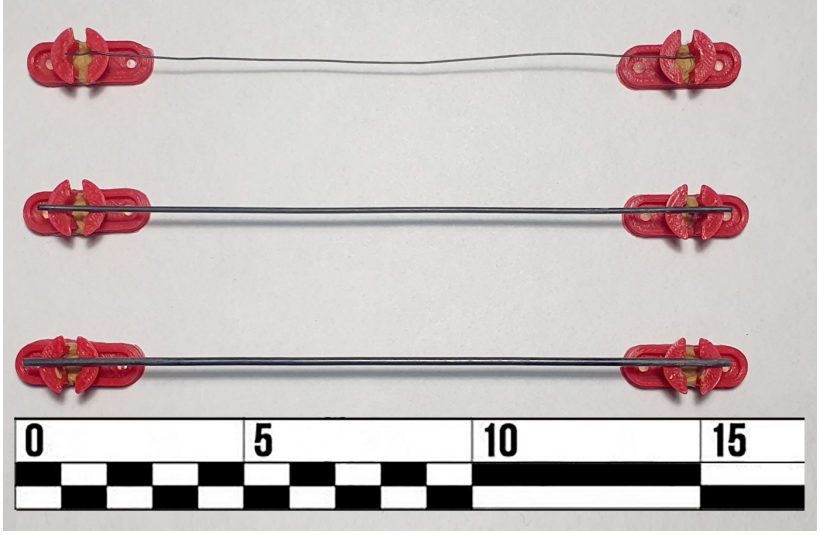



*Рис. 1. Проволока из никелида титана различных диаметров: 0.5 мм, 1.5 мм, 2.1 мм*

Описанные выше процессы являются достаточно сложными по своей природе и зависят от большого количества факторов. Поэтому для построения хорошей математической модели необходимо сначала провести серии экспериментов для получения значительного набора данных. Так как управляющим воздействием на активный элемент из материала с ЭПФ силового привода является изменение его температуры, то в условиях космического пространства инициировать его срабатывание можно несколькими способами: пропусканием через него электрического тока, кондуктивным нагревом от внешнего нагревательного элемента (нихромовая проволока) или же радиационным нагревом (солнечным излучением) [7]. Для отработки в наземных условиях проще всего использовать пропускание электрического тока в качестве метода нагрева.

## 2. Математическая модель работы активного элемента привода

Процесс нагрева активных элементов можно описать с помощью уравнения теплового баланса на основе закона сохранения энергии. В процессе наземных испытаний можно принять, что изменение тепловой энергии активного элемента силового привода равно количеству теплоты, потупившему за счет электрической энергии, минус тепловые потери от естественной конвекции, тепловые потери на собственное излучение и минус энергия, затраченная на фазовые превращения

$$cm(T_2 - T_1) = \frac{U^2}{R(\chi)} \cdot \Delta t - \alpha \cdot S \cdot (T_1 - T_c) \cdot \Delta t - \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot S \cdot T^4 \cdot \Delta t - Q. \quad (1)$$

При моделировании, подобные нелинейности в процессе работы активного элемента привода с эффектом памяти формы можно учитывать с использованием параметра состояния ($\chi$). За данный параметр можно принять отношение части материла, которая уже совершила фазовый переход, к общему количеству материала. Так как величина энергии, необходимой

для фазового перехода, известна [8], то рассчитать параметр состояния можно используя полную энергию, необходимую для фазового перехода всего материала $(Q)$, и количество энергии, уже потраченное на фазовый переход в текущий момент времени $(Q')$

$$\chi = \frac{Q'}{Q}; \qquad 0 \le Q' \le Q; \qquad 0 \le \chi \le 1.$$

Расчет проводится также методом шагов по времени. На каждом шаге рассчитывается $Q'$ — энергия, ушедшая на фазовое превращение за время $\Delta t$ по формуле

$$Q' = (1-\chi^2)\cdot\left(\frac{U^2}{R(\chi)}\cdot\Delta t - \alpha\cdot S\cdot(T_1 - T_c)\cdot\Delta t - \varepsilon\cdot\sigma_0\cdot S\cdot T^4\cdot\Delta t\right). \tag{2}$$

Так как удельное электрическое сопротивление у разных фаз материала различается, будем рассчитывать его значение на каждом шаге по времени с учетом изменяющегося фазового соотношения проводника и его температуры, формула (3). Это необходимо учитывать, потому что изменение электрического сопротивления будет влиять на динамику нагрева активного элемента.

$$R(\chi) = (\rho_м\cdot(1-\chi)\cdot(1+\alpha_м\cdot(T_1 - T_0)) + \rho_a\cdot\chi\cdot(1+\alpha_a\cdot(T_1 - T_0))\cdot\frac{l}{F}. \tag{3}$$

На рис. 2 показано сравнение экспериментально полученных значений сопротивления активного элемента в зависимости от его температуры с расчётными значениями по предложенной формуле. Предложенная модель изменения сопротивления хорошо совпадает с реальными характеристиками материала.

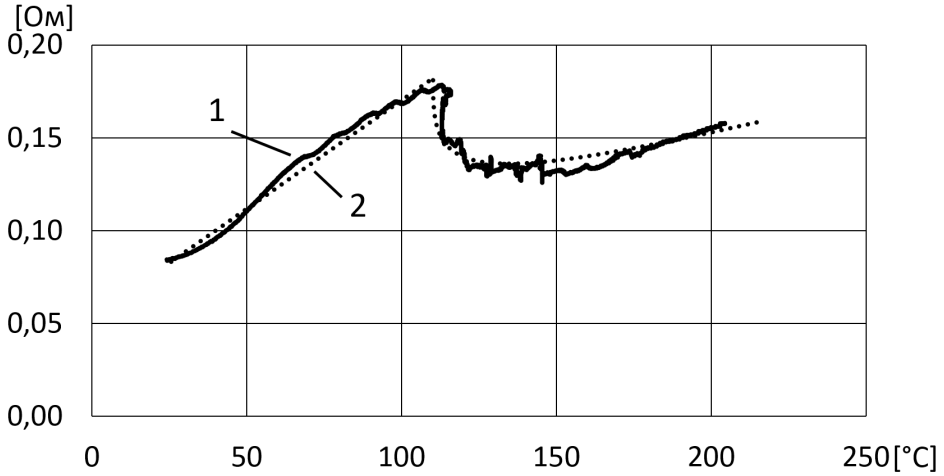



*Рис. 2. Изменение электрического сопротивления активного элемента от его температуры: 1 — эксперимент; 2 — расчёт*

Также с помощью параметра состояния можно рассчитать перемещение, создаваемое активным элементом привода по формуле 4:

$$h = \chi h_{\max}. \tag{4}$$

На рис. 3, линиями 1 и 3 показаны графики зависимости изменения температуры и относительной длины активного элемента, полученные в ходе экспериментальных исследований. В данном эксперименте использовался проволочный элемент диаметром 1.5 мм и длинной 173 мм, на который действовала постоянная растягивающая нагрузка в 0.319 кН. Нагрев производился пропусканием электрического тока через активный элемент от источника постоянного напряжения. Линии 2 и 4 на рис. 3 показывают значения температуры и перемещения, полученные при расчёте по предложенной модели. Они хорошо совпадают с экспериментальными значениями в течении всего времени работы активного элемента привода.

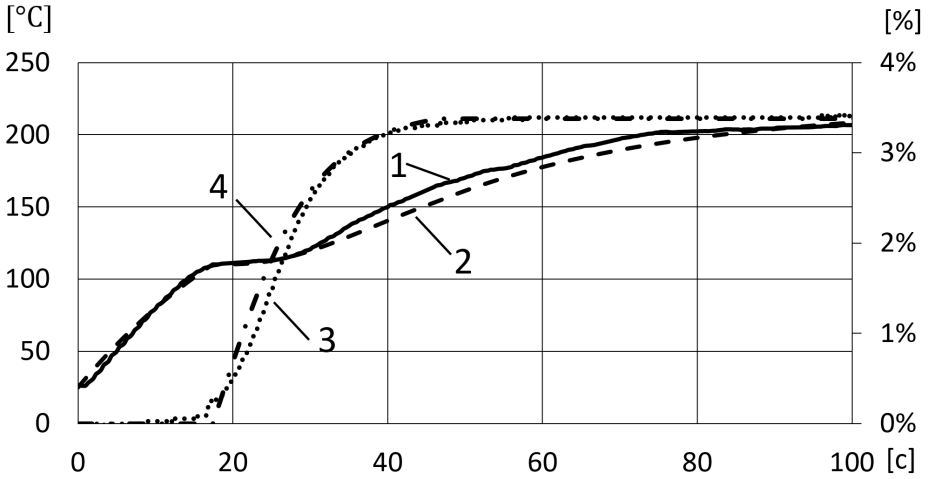



*Рис. 3. Сравнение экспериментальных данных с расчётом по модели: 1 — температура в эксперименте; 2 — температура по модели; 3 — относительное изменение длины в эксперименте; 4 — относительное изменение длины по модели*

Так как основным параметром работы привода является изменение его длины, а управляющим воздействием на активный элемент из материала с эффектом памяти формы является температурное поле, то важнейшей характеристикой будет зависимость перемещения от температуры. Таким образом, из графиков, представленных на рис. 4, можно сделать вывод, что предложенная модель довольно точно описывает конечный этап работы привода из материала с эффектом памяти формы. Данная модель хорошо отражает плавность завершения работы привода, что может обеспечивать безударное раскрытие крупногабаритной космической конструкции.

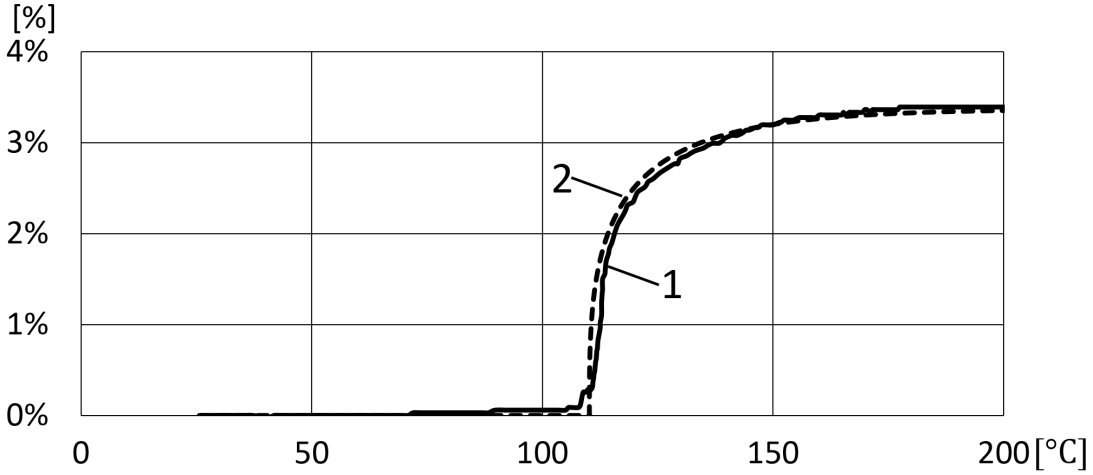



*Рис. 4. Сравнение экспериментальных данных с расчётом по модели: 1 — экспериментальные данные; 2 — расчёт по модели*

## Заключение

Крупногабаритные космические конструкции являются очень сложными техническими устройствами и требуют постоянного нахождения новых решений для совершенствования характеристик. Один из важнейших этапов работы подобных конструкций — их раскрытие на орбите из транспортного положения в рабочее, которое происходит под действием силовых приводов. Одним из перспективных направлений развития методов раскрытия является использование привода из материала с эффектом памяти формы. Однако основные рабочие

характеристики указанного материала довольно сложны и существенно нелинейны. Для расширения сферы применения подобных материалов в крупногабаритных космических конструкциях необходимо создание точных математических моделей поведения этих приводов во время работы. Предложена математическая модель, описывающая изменение температуры и длины активного элемента привода. Результаты расчета по предложенной математической модели совпадают с экспериментальными данными. Разработанная математическая модель может стать основой для дальнейших исследований в этой области, а также проектирования более совершенных крупногабаритных космических конструкций.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект № FSFN-2024-0004).

**Литература**

1. Механика больших космических конструкций / Н. В. Баничук, И. И. Карпов, Д. М. Климов и др.; Рос. акад. наук, Ин-т пробл. механики. – М. : Факториал, 1997. – 302 с.

2. *Лопатин А. В.* Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн. Ч. 1 / А. В. Лопатин, М. А. Рутковская // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2007. – № 2. – С. 51–57.

3. *Лопатин А. В.* Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн. Ч. 2 / А. В. Лопатин, М. А. Рутковская // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2007. – № 3. – С. 78–81.

4. *Пономарев С. В.* Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов / С. В. Пономарев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2011. – № 4 (16). – С. 110–119.

5. *Likhachev V. A.* Truss mounting in space by shape memory alloys / V. A. Likhachev, A. I. Razov, A. G. Cherniavsky, Y. Kravchenko, S. N. Trusov // Proceedings of the First International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies (California, USA, March 1994). – P. 245–248.

6. *Karla S.* Design of shape memory alloy actuated intelligent parabolic antenna for space applications / S. Karla, B. Bhattacharya, B. S. Munjal // Smart Materials and Structures. – 2017. – Vol. 26, № 9. – 095015.

7. *Зимин В. Н.* Моделирование работы привода из материала с эффектом памяти формы для раскрытия крупногабаритных космических конструкций / В. Н. Зимин, А. О. Шахвердов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2025. – № 3 (120). – С. 48–61.

8. *Zimin V. N.* Mechanics of Transformable Large Scale Space Structures with Shape Memory Actuator / V. N. Zimin, A. V. Krylov, A. O. Shakhverdov // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications / ed. H. Altenbach. – Cham : Springer, 2025. – (Advanced Structured Materials; vol. 223).

УДК 004.056.55

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ К АТАКАМ МЕТОДОВ СТЕГАНОГРАФИИ В ИЗОБРАЖЕНИЯХ

**А. О. Зубкова, О. А. Медведева**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В данной статье исследуются методы стеганографии, обеспечивающие скрытую передачу информации путем встраивания ее в растровые изображения. Для анализа выбраны три широко распространенных алгоритма: метод замены наименее значащего бита (LSB), его усовершенствованная версия с псевдослучайным распределением внедряемых данных (RandomLSB) и метод блочного кодирования (BlockLSB). В статье представлены принципы работы алгоритмов, а также анализ их устойчивости к различным видам атак.
**Ключевые слова:** стеганография в изображениях, метод LSB, метод Random LSB, метод блочного скрытия, стегоанализ, кодирование информации, визуальная атака, критерий хи-квадрат, Regular-Singular атака.

## Введение

Кодирование данных становится темой, приобретающей всё большее значение благодаря росту объемов цифровой информации и необходимостью эффективно ее передавать и хранить. Изображения выступают как удобный контейнер, способный хранить в себе скрытые данные.

Особое внимание уделяется методам скрытой передачи информации, которые обеспечат конфиденциальность коммуникации. Возникает задача разработки алгоритмов кодирования информации, устойчивых к обнаружению и взлому.

В данной статье предлагается рассмотреть три известных алгоритма кодирования информации в изображениях: метод замены наименее значащего бита (LSB), метод LSB с псевдослучайным распределением внедряемых данных (RandomLSB) и метод блочного кодирования (BlockLSB). Рассматриваются принципы работы алгоритмов, а также проводится оценка их устойчивости к различным атакам для выявления самого безопасного и надежного метода.

## Методы кодирования информации в изображениях

Одним из базовых подходов к кодированию информации в изображениях является метод LSB (Least Significant Bit). Он основан на замене наименее значащего бита пикселя изображения на бит скрываемой информации.

**Алгоритм кодирования LSB**

1. Загрузить изображение в формате png.
2. Преобразовать кодируемое сообщение в бинарный вид, где каждому символу ставится в соответствие 8-битная двоичная строка, полученная по его Unicode.
3. Добавить в начало сообщения 32-битный заголовок, содержащий длину сообщения.
4. Проверить вместимость изображения.
5. Для каждого пикселя изображения по каждому цветовому каналу заменить младший бит пикселя битом из сообщения.

Данный алгоритм очень прост в реализации и для его декодировки не потребуется знание какого-либо пароля.

Можно усложнить метод LSB, добавив генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ) с фиксированным сидом (паролем), чтобы определить позиции пикселей, куда будут записываться биты. Такой метод кодирования называется RandomLSB.

**Алгоритм кодирования RandomLSB**

1. Загрузить изображение в формате png.
2. Преобразовать кодируемое сообщение в бинарный вид, где каждому символу ставится в соответствие 8-битная двоичная строка, полученная по его Unicode.
3. Добавить в начало сообщения 32-битный заголовок, содержащий длину сообщения.
4. Проверить вместимость изображения.
5. Выбрать случайные неповторяющиеся позиции для встраивания кодируемых битов с помощью генератора псевдослучайных чисел с заданным уникальным паролем seed.
6. Для каждого выбранного пикселя изображения по каждому цветовому каналу заменить младший бит пикселя битом из сообщения.

Данный подход имеет дополнительную степень защиты за счет наличия пароля. Его можно легко менять, чтобы получить разные последовательности позиций, что позволяет использовать один и тот же носитель для разных сообщений.

Рассмотрим далее метод блочного кодирования (BlockLSB). Данный метод позволяет встраивать в изображение сообщение путем разбивания изображения-контейнера на блоки и встраивания в каждый блок одного бита кодируемого сообщения.

**Алгоритм блочного кодирования**

1. Загрузить изображение в формате png.
2. Преобразовать кодируемое сообщение в бинарный вид, где каждому символу ставится в соответствие 8-битная двоичная строка, полученная по его Unicode.
3. Добавить в начало сообщения 32-битный заголовок, содержащий длину сообщения.
4. Изображение разбить на непересекающиеся блоки. Для каждого блока вычислить бит четности через операцию XOR для всех младших битов.
5. Проверить вместимость изображения: длина кодируемого сообщения вместе с 32-битным заголовком должна быть не больше количества блоков.
6. Выбрать случайные неповторяющиеся блоки для встраивания кодируемых битов с помощью генератора псевдослучайных чисел с заданным уникальным паролем seed.
7. В каждом блоке скрывается один бит сообщения. Если бит четности блока не равен текущему значению бита сообщения, то из блока случайным образом выбирается пиксель, в котором инвертируется наименее значащий бит.

Данный метод имеет дополнительную степень защиты за счет наличия пароля. Он более сложен в реализации, что делает его более устойчивым к попыткам взлома. Однако пропускная способность данного метода уступает предыдущим алгоритмам.

## Визуальная оценка работы методов стеганографии

Для реализации данных методов стеганографии была написана программа на языке программирования Python. Рассмотрим результаты работы реализованных алгоритмов (табл. 1). В изображение размера $1280 \times 1280$ пикселей помещалось сообщение длины 614368 символов для методов LSB и RandomLSB и 12796 символов для метода BlockLSB.

Можно увидеть, что все четыре изображения для человеческого глаза кажутся одинаковыми. Рассмотренные в статье методы работают только с наименее значащими битами, и их замена вносит очень небольшие изменения в цвета пикселей. Однако, хотя на первый взгляд полученные изображения идентичны с оригинальным, есть подходы, позволяющие раскрыть попытку встраивания скрытой информации в изображение — различного рода атаки.

Таблица 1

*Результаты работы методов стеганографии*

| Исходное изображение | Метод LSB | Метод RandomLSB | Метод BlockLSB |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Оценка устойчивости методов стеганографии к атакам**

Исследуем устойчивость рассмотренных ранее методов кодирования информации к различным атакам.

Рассмотрим следующие виды атак: визуальная атака, статистическая атака на основе критерия хи-квадрат, Regular-Signular атака.

Для осуществления *визуальной атаки* необходимо наглядно продемонстрировать наименее значащие биты изображения. Если изображение сформировать только из наименее значащих битов пикселей, то можно легко увидеть следы вложения. Визуальная атака целиком основана на способности человека анализировать зрительные образы и выявлять существенные различия в сопоставляемых изображениях. Она эффективна при полном заполнении контейнера, но по мере уменьшения количества шифруемой информации глазу человека все труднее заметить следы вложения среди сохраненных элементов контейнера.

Применение критерия *хи-квадрат* для обнаружения стеганографии в изображении основывается на том, что изменение изображения приводит к изменению его статистических свойств. При этом изменение наименее значащего бита приводит к изменениям в частотном распределении пикселей, делая его менее случайным, чем ожидалось бы для «естественного» изображения. В основе алгоритма лежит анализ соседних значений цветов пикселей, которые в двоичном представлении отличаются только младшим битом. Для перебора всех пар вводится параметр $k$.

Фактическая частота появления цвета в изображении рассчитывается по формуле:

$$n_i = h_{2k},$$

где $h$ — количество пикселей, имеющих цвет $i$, $k$ — индекс пар значений цвета пикселя, $i \in [0,255]$, $k \in [0,127]$.

Теоретически ожидаемая частота встречаемости пикселей цвета $i$ рассчитывается по формуле:

$$n_i^* = \frac{h_{2k} + h_{2k+1}}{2}.$$

Критерий хи-квадрат считается по формуле:

$$\chi^2_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_k - n_k^*)^2}{n_k^*}.$$

Число степеней свободы равно $k-1=127$. Обычно уровень значимости $\alpha$ составляет 0,01. Критическое значение критерия для этого случая равно 92,88655. Нулевая гипотеза заключается в том, что в изображении нет скрытой информации. Это значит, что если рассчитанное по формуле значение хи-квадрат превышает 92,88655, то нулевая гипотеза отвергается и есть основания предполагать, что в изображении скрыта информация.

Рассмотрим еще один статистический метод — *Regular-Singular атака*. RS-атака анализирует группы пикселей, применяя к ним специальные операции (функции маскирования), и классифицирует эти группы на Regular (R) и Singular (S) в зависимости от того, как изменяется их «гладкость» или «шумность» после инверсии младших бит. Для исходного изображения число R и S блоков примерно одинаково ($R/S \approx 1$).

**Алгоритм RS-атаки**

1. Изображение делится на непересекающиеся блоки по 4 пикселя в каждом.

2. Измеряется изначальная гладкость блока (сумма абсолютных разностей соседних пикселей):

$$smoothness = \sum_{i=0}^{k-1} \left| a_{n+1} - a_n \right|,$$

где $a$ — пиксель блока, $n$ — количество пикселей в блоке.

3. Вводится функция флиппинга $F$ такая, что $F(F(x)) = x$. Для RS-атаки используют функции флиппинга:

$F_1$ — инверсия младшего бита пикселя в изображении

$F_0$ — оставление без изменений.

4. Задается маска M — 4-мерный вектор со значениями 0 и 1, указывающий, какому пикселю в блоке соответствует какой флиппинг. Разные комбинации помогают обнаружить статистические аномалии, поэтому используются несколько различных масок.

5. К каждому блоку применяются введенные функции флиппинга $F_1$ и $F_0$ в соответствии выбранным маскам.

6. Измеряется гладкость полученного блока.

7. Классифицируются блоки:

Regular (R) — если после флиппинга гладкость выросла.

Singular (S) — если после флиппинга гладкость упала.

Unusable (U) — если гладкость не изменилась.

Проведем эксперимент с png изображением размера $1280 \times 1280$ пикселей (табл. 2). Используя алгоритмы LSB, RandomLSB и BlockLSB зашифруем секретное сообщение. Оценим устойчивость каждого метода шифрования к рассмотренным выше видам атак на стегосистемы.

Из результатов, представленных в таблице, можно сделать следующие выводы.

Так как в методе LSB заполнялись биты последовательно, то визуальная атака сразу обнаруживает заполненность контейнера. В методе RandomLSB и BlockLSB уже тяжелее зрительно заметить стеганографию.

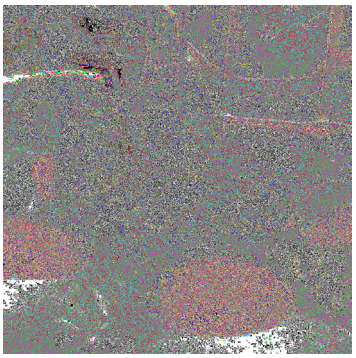
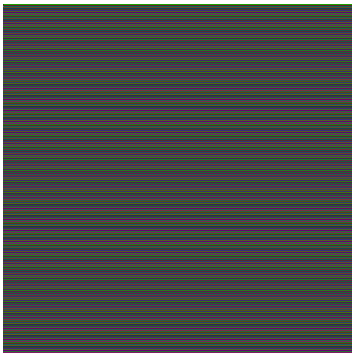
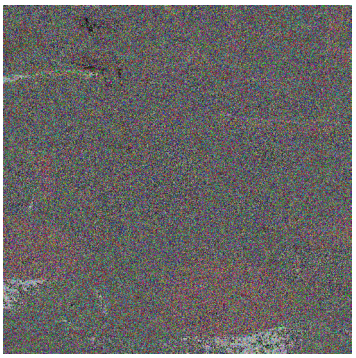
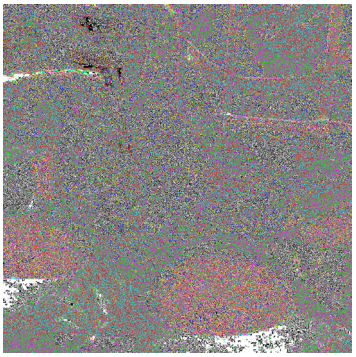
Для обнаружения стеганографии с помощью критерия хи-квадрат изображение разбивается на области (столбцы), для каждой из которых подсчитывается значение критерия. В методе LSB каждое значение превышает 92,88655, что обнаруживает скрытие секретного сообщения. В методах RandomLSB и BlockLSB значения не превышают критического.

При анализе с помощью RS-атаки замечено, что в методах LSB и RandomLSB отношение R и S блоков по большинству масок становится неравным (R/S намного больше 1). Метод BlockLSB оказался устойчив к данной атаке.

Таким образом, на основании результатов исследования, представленных в таблице, можно сделать вывод о том, что метод блочного скрытия является самым устойчивым к атакам. Использование данного метода более эффективно обеспечит скрытие кодируемой информации и конфиденциальность коммуникации.

Таблица 2

*Результаты эксперимента*

| Метод шифрования | Визуальная атака | Статистическая, хи-квадрат | Статистическая, Regular-Singular |
|---|---|---|---|
| Исходное изображение |  | Chi-squared values for each zone (column):<br>Zone (Column) 1: 74.11<br>Zone (Column) 2: 76.96<br>Zone (Column) 3: 58.38<br>Zone (Column) 4: 63.30<br>Zone (Column) 5: 56.47<br>Zone (Column) 6: 61.56<br>Zone (Column) 7: 55.40<br>Zone (Column) 8: 69.44<br>Zone (Column) 9: 69.62<br>Zone (Column) 10: 63.43<br>Zone (Column) 11: 70.96<br>Zone (Column) 12: 56.41<br>Zone (Column) 13: 61.84<br>Zone (Column) 14: 63.56<br>Zone (Column) 15: 87.27<br>Zone (Column) 16: 80.24<br>Zone (Column) 17: 74.85<br>Zone (Column) 18: 62.86<br>Zone (Column) 19: 65.61<br>Zone (Column) 20: 68.73<br>Zone (Column) 21: 66.38 | Result for channel Red:<br>Count of blocks: 409600<br>mask [0,0,0,0]: R=0, S=0, U=409600<br>R/S: inf<br>mask [1,0,0,0]: R=218671, S=190929, U=0<br>R/S: 1.14530008537204 92<br>mask [0,1,0,0]: R=48625, S=28730, U=332245<br>R/S: 1.6924817264183 78<br>mask [0,0,1,0]: R=49239, S=28632, U=331729<br>R/S: 1.7197191953059514<br>mask [0,0,0,1]: R=210898, S=198702, U=0<br>R/S: 1.0613783454620487<br>mask [1,1,0,0]: R=218006, S=191594, U=0<br>R/S: 1.137854003778824<br>mask [0,1,1,0]: R=57706, S=38191, U=313703<br>R/S: 1.5109842633081092<br>mask [0,0,1,1]: R=210743, S=198857, U=0<br>R/S: 1.059771594663502<br>mask [1,0,0,1]: R=131999, S=110968, U=166633<br>R/S: 1.1895231057602191<br>mask [1,1,1,1]: R=118571, S=119356, U=171673<br>R/S: 0.9934230369650457 |
| LSB |  | Chi-squared values for each zone (column):<br>Zone (Column) 1: 117.82<br>Zone (Column) 2: 114.34<br>Zone (Column) 3: 110.74<br>Zone (Column) 4: 98.38<br>Zone (Column) 5: 108.65<br>Zone (Column) 6: 110.78<br>Zone (Column) 7: 104.14<br>Zone (Column) 8: 110.82<br>Zone (Column) 9: 94.68<br>Zone (Column) 10: 101.69<br>Zone (Column) 11: 117.94<br>Zone (Column) 12: 99.85<br>Zone (Column) 13: 96.14<br>Zone (Column) 14: 97.18<br>Zone (Column) 15: 105.28<br>Zone (Column) 16: 126.02<br>Zone (Column) 17: 111.75<br>Zone (Column) 18: 133.38<br>Zone (Column) 19: 126.39<br>Zone (Column) 20: 107.37<br>Zone (Column) 21: 120.06 | Result for channel Red:<br>Count of blocks: 409600<br>mask [0,0,0,0]: R=0, S=0, U=409600<br>R/S: inf<br>mask [1,0,0,0]: R=170191, S=239409, U=0<br>R/S: 0.71087970794 74873<br>mask [0,1,0,0]: R=96238, S=0, U=313362<br>R/S: inf<br>mask [0,0,1,0]: R=92537, S=0, U=317063<br>R/S: inf<br>mask [0,0,0,1]: R=330230, S=79370, U=0<br>R/S: 4.1606400403175<br>mask [1,1,0,0]: R=175380, S=234220, U=0<br>R/S: 0.7487831952864827<br>mask [0,1,1,0]: R=91019, S=1, U=318580<br>R/S: 91019.0<br>mask [0,0,1,1]: R=331957, S=77643, U=0<br>R/S: 4.275427276122767<br>mask [1,0,0,1]: R=90854, S=23, U=318723<br>R/S: 3950.17391304347 85 |
| RandomLSB |  | Chi-squared values for each zone (column):<br>Zone (Column) 1: 66.09<br>Zone (Column) 2: 68.28<br>Zone (Column) 3: 56.99<br>Zone (Column) 4: 55.95<br>Zone (Column) 5: 58.81<br>Zone (Column) 6: 55.01<br>Zone (Column) 7: 62.37<br>Zone (Column) 8: 63.53<br>Zone (Column) 9: 65.19<br>Zone (Column) 10: 59.60<br>Zone (Column) 11: 60.30<br>Zone (Column) 12: 56.18<br>Zone (Column) 13: 52.41<br>Zone (Column) 14: 68.48<br>Zone (Column) 15: 65.13<br>Zone (Column) 16: 64.26<br>Zone (Column) 17: 64.79<br>Zone (Column) 18: 65.58<br>Zone (Column) 19: 50.95<br>Zone (Column) 20: 51.77<br>Zone (Column) 21: 65.81 | Result for channel Red:<br>Count of blocks: 409600<br>mask [0,0,0,0]: R=0, S=0, U=409600<br>R/S: inf<br>mask [1,0,0,0]: R=190602, S=218998, U=0<br>R/S: 0.8703367154037936<br>mask [0,1,0,0]: R=68548, S=16100, U=324952<br>R/S: 4.257639751552795<br>mask [0,0,1,0]: R=67359, S=15988, U=326253<br>R/S: 4.213097322992244<br>mask [0,0,0,1]: R=269234, S=140366, U=0<br>R/S: 1.918085576279156<br>mask [1,1,0,0]: R=192176, S=217424, U=0<br>R/S: 0.8838766649495916<br>mask [0,1,1,0]: R=71298, S=21135, U=317167<br>R/S: 3.373456352022711<br>mask [0,0,1,1]: R=269877, S=139723, U=0<br>R/S: 1.9315144965395818<br>mask [1,0,0,1]: R=106582, S=55607, U=247411<br>R/S: 1.9167011347492222<br>mask [1,1,1,1]: R=60017, S=60448, U=289135<br>R/S: 0.9928699047114875 |
| BlockLSB |  | Chi-squared values for each zone (column):<br>Zone (Column) 1: 74.75<br>Zone (Column) 2: 78.96<br>Zone (Column) 3: 57.41<br>Zone (Column) 4: 66.41<br>Zone (Column) 5: 56.25<br>Zone (Column) 6: 61.06<br>Zone (Column) 7: 55.73<br>Zone (Column) 8: 68.55<br>Zone (Column) 9: 69.02<br>Zone (Column) 10: 63.06<br>Zone (Column) 11: 69.36<br>Zone (Column) 12: 55.37<br>Zone (Column) 13: 62.54<br>Zone (Column) 14: 62.69<br>Zone (Column) 15: 85.63<br>Zone (Column) 16: 77.45<br>Zone (Column) 17: 74.00<br>Zone (Column) 18: 62.01<br>Zone (Column) 19: 63.04<br>Zone (Column) 20: 65.48<br>Zone (Column) 21: 65.61 | Result for channel Red:<br>Count of blocks: 409600<br>mask [0,0,0,0]: R=0, S=0, U=409600<br>R/S: inf<br>mask [1,0,0,0]: R=218225, S=191375, U=0<br>R/S: 1.1403004572175048<br>mask [0,1,0,0]: R=48179, S=29012, U=332409<br>R/S: 1.6606576588997657<br>mask [0,0,1,0]: R=48844, S=28948, U=331808<br>R/S: 1.6873013679701534<br>mask [0,0,0,1]: R=210521, S=199079, U=0<br>R/S: 1.057474670859307<br>mask [1,1,0,0]: R=217657, S=191943, U=0<br>R/S: 1.1339668547433353<br>mask [0,1,1,0]: R=57230, S=38427, U=313943<br>R/S: 1.4893174070315143<br>mask [0,0,1,1]: R=210417, S=199183, U=0<br>R/S: 1.0564003956160917<br>mask [1,0,0,1]: R=131485, S=111313, U=166802<br>R/S: 1.181218725575629<br>mask [1,1,1,1]: R=118650, S=119363, U=171587<br>R/S: 0.994026624665935 |

**Литература**

1. *Westfeld A.* Attacks on Steganographic Systems Breaking the Steganographic Utilities EzStego, Jsteg, Steganos, and S-Tools–and Some Lessons Learned / A. Westfeld, A. Pfitzmann // Dresden University of Technology Department of Computer Science – 2000. – D-01062.

2. *Дрюченко М. А.* Алгоритмы выявления стеганографического скрытия информации в JPEG-файлах / М. А. Дрюченко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2007. – № 1. – С. 21–30.

3. *Сейеди С. А.* Сравнение методов стеганографии в изображениях / С. А. Сейеди, Р. Х. Садыхов // Информатика. – 2013. – № 1(37). – С. 66–75.

4. *Строкин Д. И.* Стеганографический анализ файла изображения на предмет обнаружения сокрытой информации / Д. И. Строкин, И. В. Пономарев // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – 2022. – № 8. – С. 86–88.

УДК 004.92, 004.94

# МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ НА ПЕРЕКРЕСТКЕ

**А. Н. Ильичева**

*Волгоградский государственный университет*

**Аннотация.** Исследование направлено на разработку имитационной модели свободного движения транспортных средств на изолированном перекрестке для проведения комплексного анализа транспортных потоков. В качестве основного инструмента исследования использована среда имитационного моделирования AnyLogic, предоставляющая широкие возможности для создания гибких агентно-событийных моделей. В работе описаны этапы построения модели, включая формализацию алгоритма движения транспортных средств, задание параметров потока и определение ключевых метрик для оценки эффективности работы перекрестка.

**Ключевые слова:** имитационное компьютерное моделирование, информационные системы, транспортный поток, улично-дорожная сеть, перекресток, вычислительный эксперимент, модель следования за лидером, AnyLogic.

## Введение

Актуальность исследования транспортных потоков обусловлена стремительной автомобилизацией общества, в условиях которой личный транспорт становится неотъемлемым элементом повседневной жизни. Ежегодный рост числа автомобилей приводит к возрастающей нагрузке на существующую дорожно-транспортную инфраструктуру, что порождает комплекс проблем. Ключевыми из них являются неэффективное регулирование перекрестков, возникновение заторов и пробок, особенно на ключевых магистралях и транспортных развязках, что влечет за собой значительные социально-экономические издержки: потери времени, перерасход топлива и увеличение вредных выбросов в атмосферу.

Традиционные подходы к решению этих проблем, такие как физическое расширение дорог или эмпирическая оптимизация светофорных циклов, зачастую являются затратными и не всегда приводят к желаемому результату [1–3]. Они не позволяют с достаточной точностью прогнозировать последствия изменений в сложной, нелинейной и стохастической системе городского движения. В этой связи необходимым инструментом становится имитационное компьютерное моделирование (рис. 1) [3–5].

Данный метод позволяет создавать виртуальные цифровые двойники участков улично-дорожной сети (УДС), на которых можно проводить вычислительные эксперименты в контро-

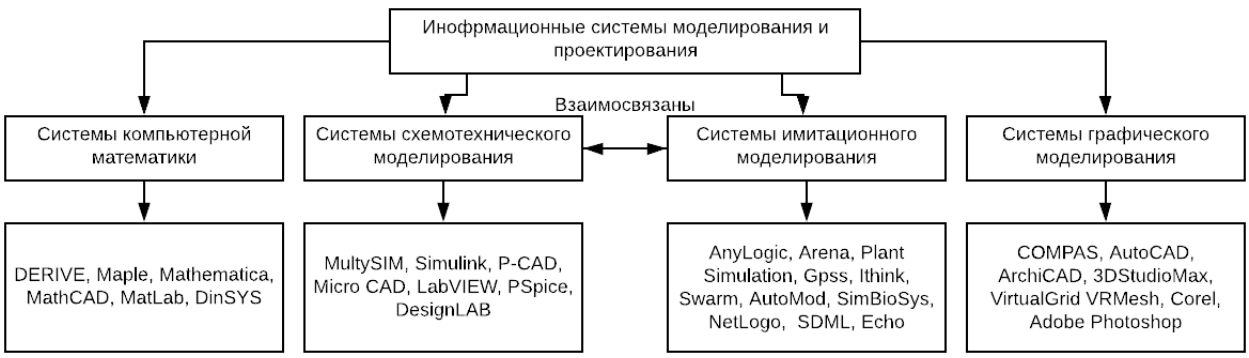



*Рис. 1. Условная классификация информационных систем компьютерного моделирования с примерами инструментальных средств*

лируемых условиях, анализировать различные сценарии и оценивать эффективность управленческих решений до их реализации в реальности [7]. Особую актуальность это направление приобретает в контексте крупных городов России, в частности Волгограда [6], где проблема транспортной загруженности остается острой, а проведение натурных экспериментов на действующих магистралях высокозатратно.

### 1. Особые требования к представлению транспортного потока в модели

Основой имитационной модели является дискретное представление транспортного потока как совокупности групп (агрегатов) автомобилей. Каждая такая группа описывается вектором параметров, формализующих ее состояние и поведение. Такой векторный подход позволяет эффективно управлять сложностью модели. Вместо отслеживания абсолютно каждого автомобиля в системе с момента его появления, модель оперирует группами, что снижает вычислительную нагрузку. При этом сохраняется необходимая детализация на уровне отдельных агентов внутри группы.

К разрабатываемой модели предъявляются следующие ключевые требования [2, 6]:

1) Адекватность и полнота охвата. Модель должна с необходимой точностью воспроизводить весь рассматриваемый фрагмент УДС, включая не только сам перекресток, но и подъезды к нему, что критически важно для корректного анализа формирования и рассасывания очередей.

2) Устойчивость и репрезентативность во времени. Моделирование должно обеспечивать стабильные и статистически значимые результаты при различных временных интервалах, как в часы пиковой нагрузки, так и в периоды низкой интенсивности движения.

3) Детализация на уровне отдельных агентов. Модель должна учитывать индивидуальные характеристики и поведение каждого транспортного средства в потоке, включая его маршрут следования, тип ТС (легковой автомобиль, грузовик, автобус), динамические параметры (ускорение, торможение) и решение водителя на перекрестке.

4) Оптимизация вычислительной эффективности. Несмотря на необходимую детализацию, требования к вычислительным ресурсам должны быть минимизированы для обеспечения приемлемой скорости проведения экспериментов. Это достигается за счет оптимизации алгоритмов и рационального уровня абстракции

Основные элементы (сущности) имитационной модели включают [3, 4, 6]:

1) Автотранспорт (агенты). Ключевые активные элементы системы. Каждое ТС наделяется логикой поведения, параметрами (длина, скорость, тип) и индивидуальным маршрутом, что позволяет реалистично имитировать траектории движения и взаимодействия.

2) Перекресток. Центральный статический объект модели, представляющий собой зону пересечения двух или более дорог. Его геометрия (количество полос, углы пересечения, наличие карманов) строго определяет возможные маневры и точки конфликтов потоков.

3) Транспортный поток. Совокупность автомобилей, движущихся в одном направлении. Поток характеризуется такими параметрами, как интенсивность (авт./час), состав и интервалы между автомобилями. Модель различает входящие и исходящие потоки.

4) Зона конфликта (участок пересечения потоков). Критический участок перекрестка, где траектории движения транспортных средств из разных потоков физически пересекаются, сливаются или расходятся. Моделирование взаимодействий в этой зоне является основой для анализа безопасности и пропускной способности.

## 2. Алгоритм свободного движения транспортных средств

Общий моделирующий алгоритм свободного движения транспортных средств (ТС) разработан с учетом поведенческих решений, принимаемых водителем при маневрировании на многополосном перекрестке. Алгоритм последовательно обрабатывает действия каждого автомобиля-агента, имитируя процесс принятия решений на основе анализа окружающей обстановки (рис. 2) [7].

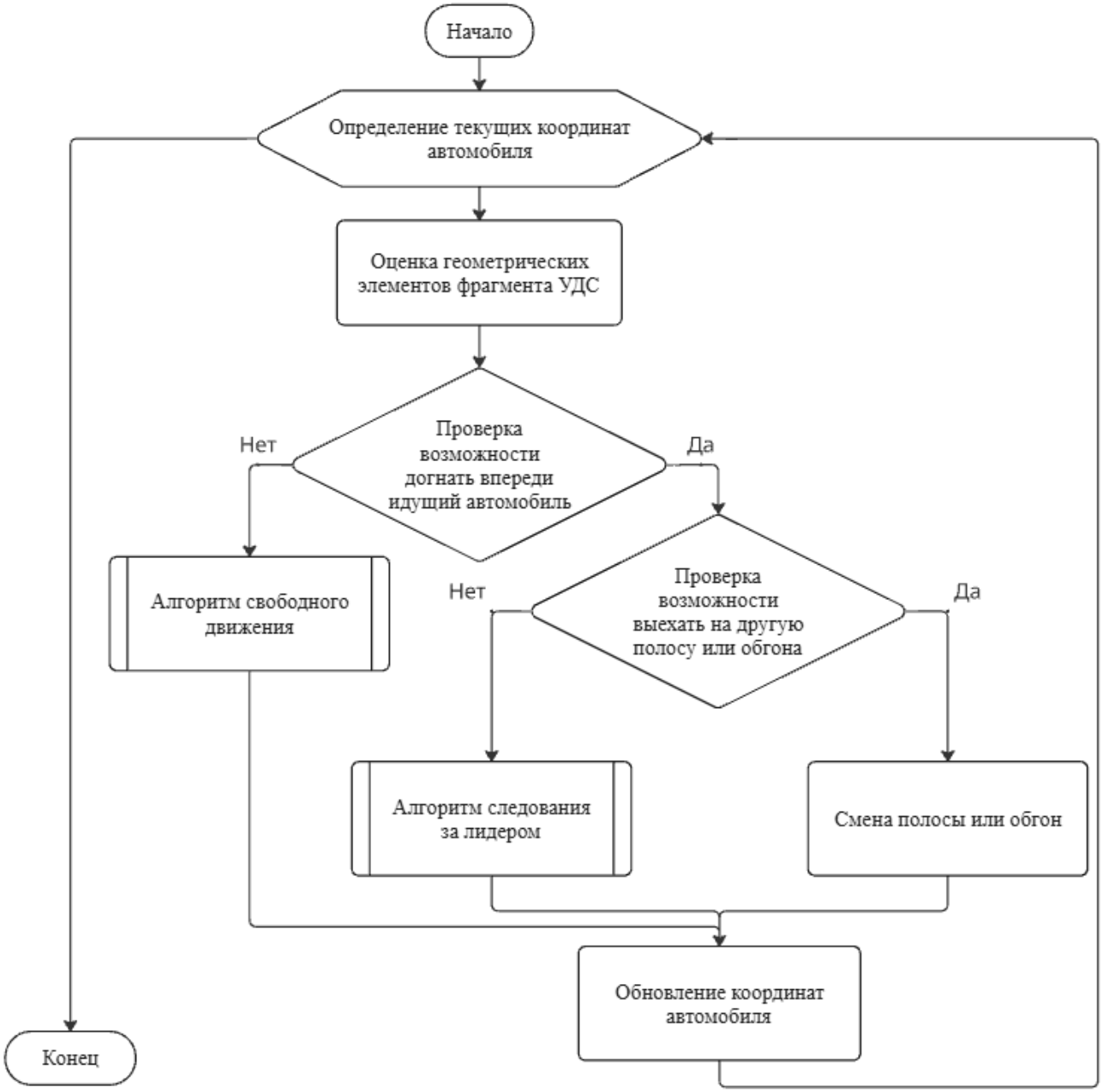



*Рис. 1. Условная классификация информационных систем компьютерного моделирования с примерами инструментальных средств*

Данный алгоритм относится к классу микроскопических моделей, так как рассматривает поведение каждого транспортного средства в отдельности. Его ключевыми поведенческими моделями являются модель следования за лидером (Car-Following Model, определяет, как водитель поддерживает безопасную дистанцию) и модель принятия решения о перестроении (Lane-Changing Model, описывает логику оценки ситуации и выполнения маневра смены полосы).

Такой подход позволяет реалистично имитировать сложное взаимодействие транспортных средств в потоке, возникающие задержки и точки конфликтов, что является основой для последующего анализа пропускной способности перекрестка.

## Заключение

В рамках проведенного исследования был осуществлен комплексный анализ ключевых аспектов, необходимых для последующей разработки имитационной модели свободного движения транспортных средств на изолированном перекрестке. Были систематизированы и формализованы основополагающие принципы построения такой модели. В результате определены критически важные требования к ней, включая адекватность, полноту охвата участка УДС, детализацию на уровне агентов и вычислительную эффективность. Для их реализации предложено математическое представление транспортного потока в виде дискретных групп автомобилей, описываемых вектором параметров, что задает основу для управления сложностью модели. Основой результата стала разработка и формализация алгоритма свободного движения, интегрирующего поведенческие модели следования за лидером и принятия решений о перестроении ТС. Логическая блок-схема алгоритма наглядно представляет последовательность принятия решений агентом-водителем в условиях многополосного движения. Полученные результаты позволили перейти к следующему этапу, а именно программной реализации имитационной модели (рис. 3).

*Рис. 3. Прототип имитационной модели движения ТС на перекрестке*

Перспективы работы оцениваются в ее непосредственном создании, проведении серии вычислительных экспериментов для анализа пропускной способности перекрестка и последующей апробации на более сложных участках улично-дорожной сети.

**Литература**

1. *Галицкий А. С.* Разработка математической модели интеллектуальной транспортной системы // Труды МФТИ. – 2018. – Т. 10, № 4. – 11 с.

2. *Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. В.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие. – М. : МФТИ, 2010. – 362 с.

3. *Исмагилов Т. Р., Бояршинова И. Н., Потапова И. А.* Разработка компьютерной имитационной модели автомобильного движения через серию перекрестков // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 10. – С. 291–295.

4. *Кисилева М. В.* Имитационное моделирование в среде AnyLigocю – Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2009. – 88 с.

5. *Маликов Р. Ф.* Практикум по имитационному моделированию сложных систем в среде AnyLogic 6: учебное пособие. – Уфа : Издательство БГПУ, 2013. – 296 с.

6. *Мальцева А. Н.* Компьютерное моделирование дорожного движения на основе метода N-тел / А. Н. Мальцева // XXV Региональная конференция молодых исследователей Волгоградской области: Тезисы докладов, Волгоград, 20 ноября – 13 декабря 2020 года / Редколлегия: А. Э. Калинина (отв. ред.) [и др.]. – Волгоград : Волгоградский государственный университет, 2021. – С. 42–47.

7. *Наумова Н. А., Данович Л. М., Савин В. Н., Горшкова С. Н., Булатникова И. Н., Круглова И. А.* Алгоритм определения оптимального способа организации движения автотранспортных средств на перекрестке // Успехи современного естествознания. – 2008. – № 10. – С. 60–61.

УДК 004.94

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВИРТУАЛЬНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ НА ПРИМЕРЕ UNREAL ENGINE 5

**А. Н. Ильичева, И. С. Скоробогатов**

*Волгоградский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается роль виртуальных химических лабораторий как инструмента цифровизации образования. Отмечается актуальность применения иммерсивных технологий для организации безопасных и доступных лабораторных практикумов. Проведен сравнительный анализ игровых движков Unity и Unreal Engine [8, 9], обоснован выбор UE5 благодаря его графическим и физическим возможностям, а также системе визуального программирования Blueprint [6, 7]. В качестве примера приведён опыт разработки прототипа виртуальной лаборатории на базе игрового движка Unreal Engine 5. Разработана архитектура лаборатории, включающая в себя основные компоненты: интерактивные и статичные объекты, систему сценарных триггеров, визуальные эффекты. В исследовании отмечаются перспективы расширения функционала виртуальных лабораторий в направлении интеграции VR/AR-средств и использования при дистанционном обучении.

**Ключевые слова:** виртуальная лаборатория, химические реакции, цифровизация образования, Unity, Unreal Engine 5, иммерсивные технологии, геймификация, VR/AR-средства, визуальное программирование, UML-диаграммы.

## Введение

Современная система образования сталкивается с необходимостью поиска новых форматов обучения, которые соответствуют уровню развития цифровых технологий. Лабораторные практикумы занимают важное место в подготовке специалистов естественно-научного профиля, однако их проведение связано с высокими затратами и рисками. Одним из решений становится применение виртуальных лабораторий, которые позволяют воссоздать условия эксперимента в безопасной цифровой среде [1, 8]. Проект ориентирован на применение на персональных компьютерах и ноутбуках, что в последствии упростит его интеграцию в учебный процесс [4].

## 1. Виртуальные лаборатории как элемент цифровой образовательной среды

Современная система образования сталкивается с необходимостью поиска новых форматов обучения, которые соответствуют уровню развития цифровых технологий. Лабораторные практикумы занимают важное место в подготовке специалистов естественно-научного профиля, однако их проведение связано с высокими затратами и рисками. Одним из решений становится применение виртуальных лабораторий, которые позволяют воссоздать условия эксперимента в безопасной цифровой среде [1, 8].

Виртуальные лаборатории относятся к категории иммерсивных технологий, способных имитировать реальные процессы [9]. В химическом образовании они позволяют формировать практические навыки работы с оборудованием и реактивами без необходимости использования дорогостоящих материалов [10]. Такие решения способствуют повышению качества усвоения материала, делают обучение интерактивным и более доступным [5].

Использование игровых движков, таких как Unreal Engine 5, открывает новые возможности для моделирования учебных процессов [3, 7]. Движок предоставляет инструменты для визу-

ализации, физического моделирования и создания интерактивных сценариев. Это позволяет студентам не только наблюдать за результатом эксперимента, но и активно взаимодействовать с объектами виртуальной среды, что повышает вовлечённость и уровень усвоения знаний [2].

## 2. Проектирование и разработка виртуальной химической лаборатории

Архитектура виртуальной химической лаборатории проектировалась с учетом масштабируемости и возможностями Unreal Engine 5. Перемещение пользователя по сцене должно осуществляться при нажатии на клавиши клавиатуры, а также дублироваться на мышь. Общая архитектура взаимодействия элементов отображена на UML-диаграммах прецедентов (рис. 1), классов (рис. 2) и последовательности (рис. 3).

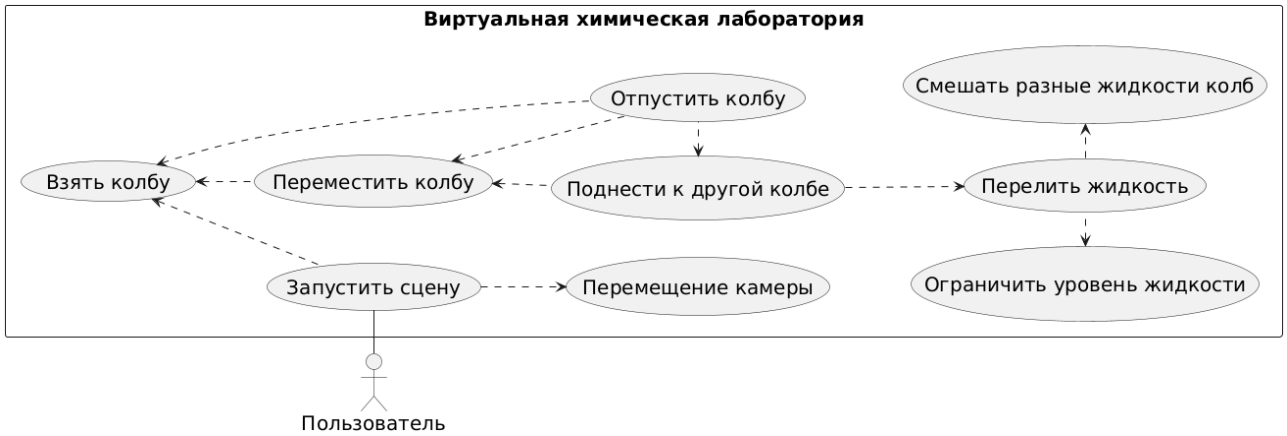



*Рис. 1. UML-диаграмма прецедентов виртуальной химической лаборатории*

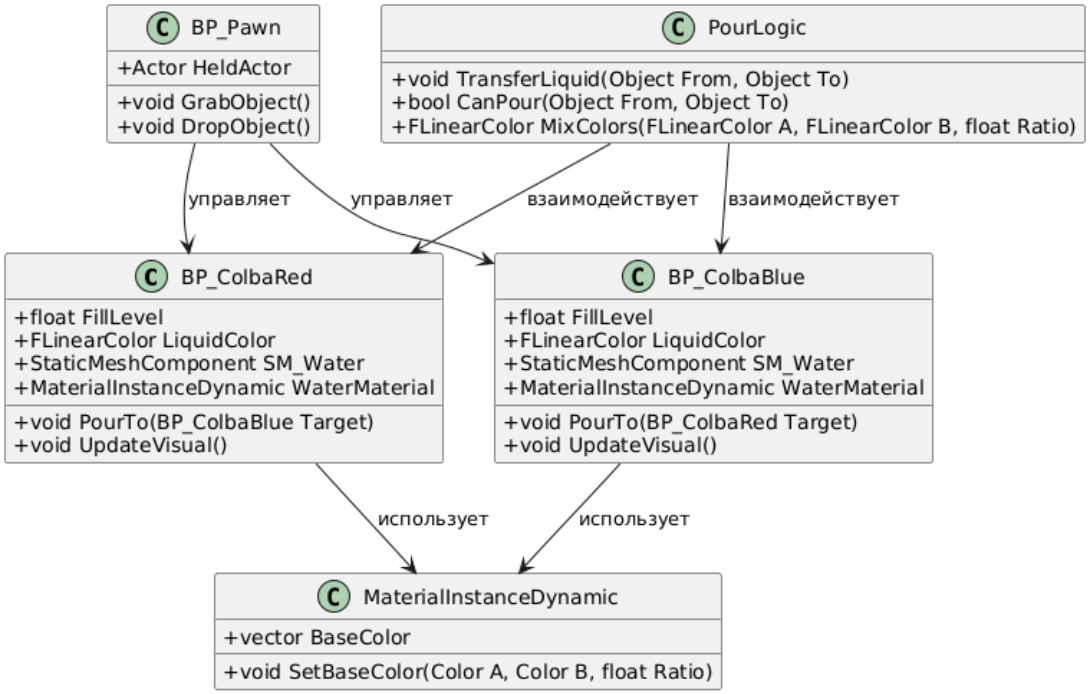



*Рис. 2. UML-диаграмма классов виртуальной химической лаборатории*

Элементы сцены взаимодействуют друг с другом через систему визуального программирования Blueprint (рис. 4). Логика обработки данных организована в виде нод-методов.

Результат функционального прототипа, реализованного в среде UE 5 (рис. 5).

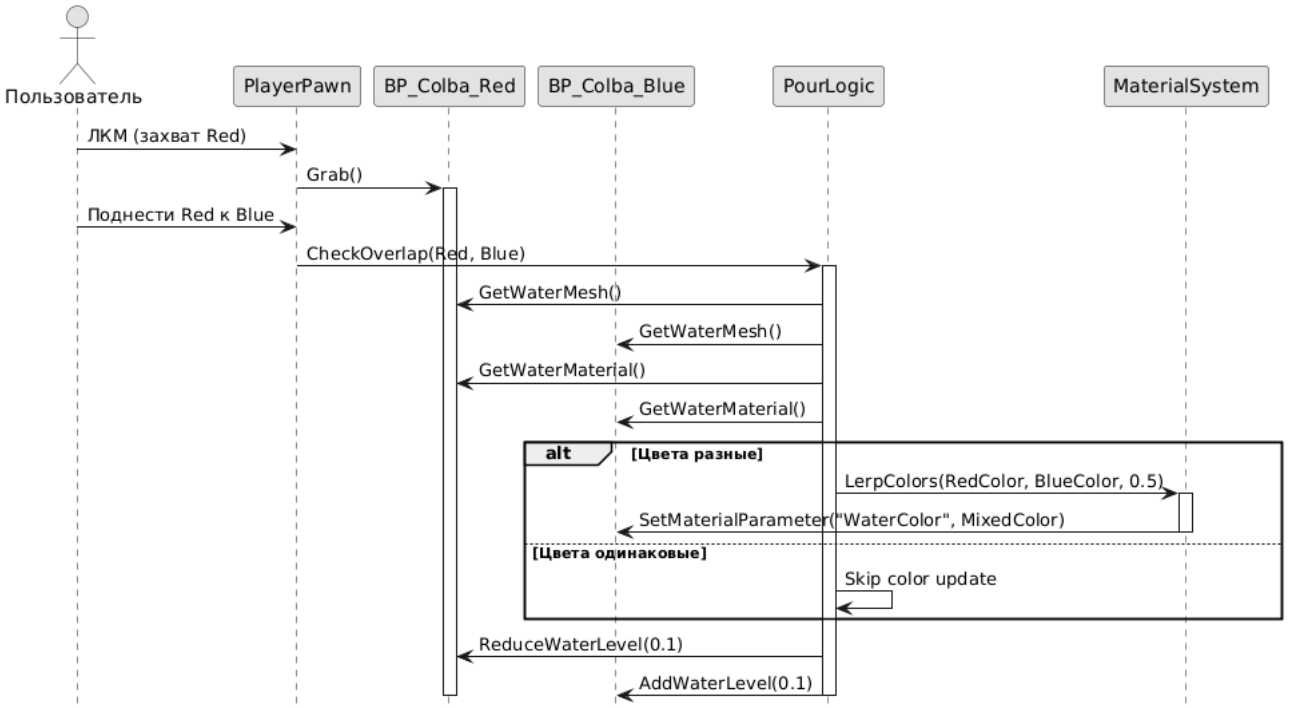



*Рис. 3. UML-диаграмма последовательности виртуальной химической лаборатории*

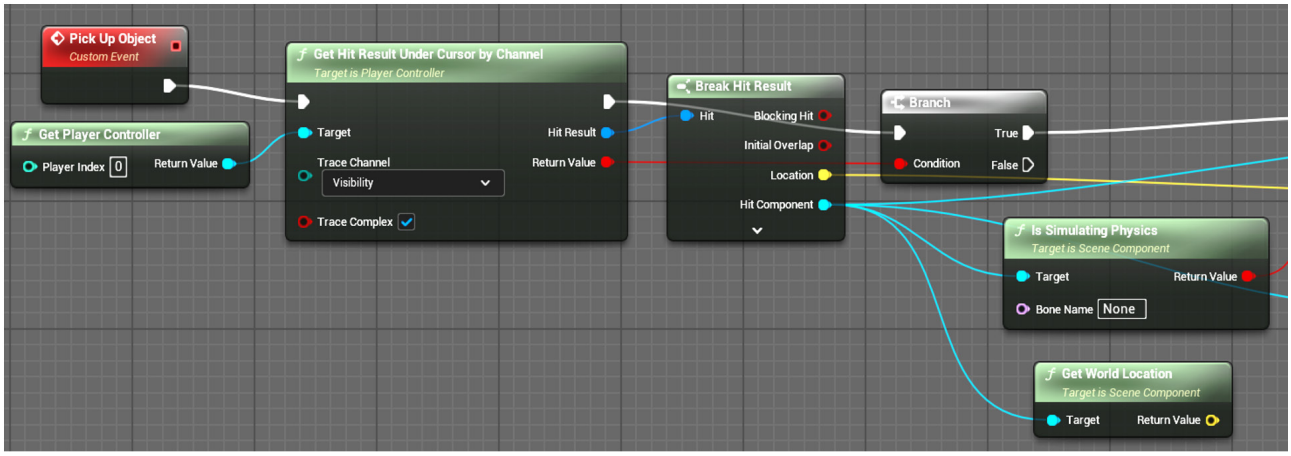



*Рис. 4. Часть Blueprint, реализующая взаимодействие пользователя с интерактивными объектами*

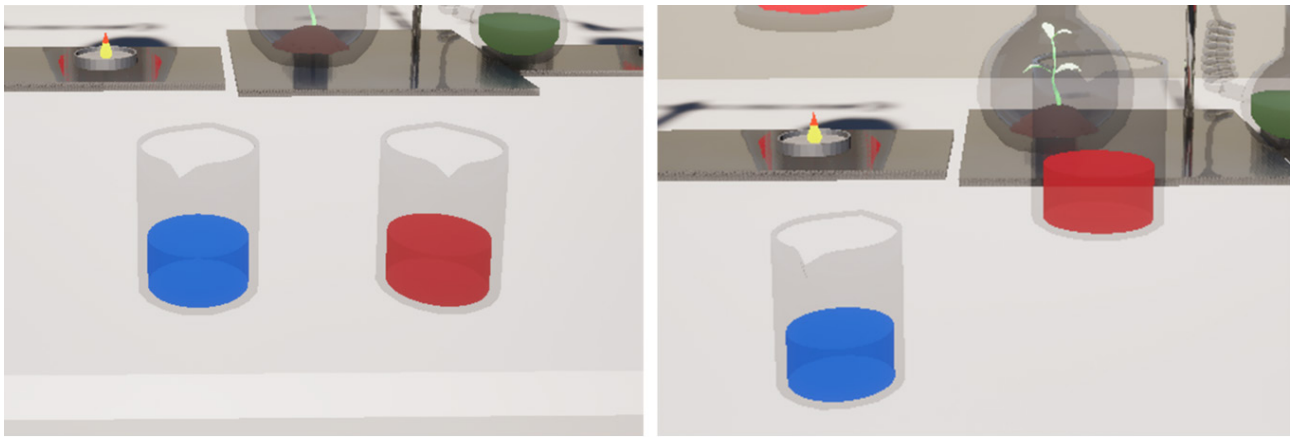


*Рис. 5. Слева расположение химических стаканов с разным цветом жидкостей; справа поднятие химического стакана над поверхностью стола курсором мыши*

## Заключение

Результатом исследования является разработанный прототип виртуальной химической лаборатории на платформе Unreal Engine 5, который обеспечивает интерактивное управление камерой с помощью клавиатуры и мыши и взаимодействие с объектами лабораторного оборудования, такими как химические стаканы, для реализации основных операций виртуального химического эксперимента. В ближайшем будущем виртуальные лаборатории могут быть интегрированы с VR/AR-технологиями, что позволит студентам «погружаться» в лабораторное пространство [9]. Дополнительное развитие связано с применением искусственного интеллекта для адаптации сценариев под уровень знаний обучающегося [1]. Такие системы станут частью единой цифровой образовательной среды и будут способствовать реализации концепции персонализированного обучения.

## Литература


1. *Гурин Н. И., Сахонь Е. С.* Технология разработки симуляторов лабораторных установок для дистанционного обучения // Труды Белорусского Государственного Технологического Университета. Серия. 3. Физико-математические науки и информатика. – 2021. – № 1. – С. 48–53.

2. *Завальцева О. А., Мишина О. С., Коротков О. В.* Использование интерактивных и цифровых технологий в обучении химии // Проблемы со временного педагогического образования. – 2023. – № 81/2. – С. 256–259.

3. *Коптелова Е. Н., Брюхова А. К., Гулиева Н. К.* Использование виртуальной лаборатории в процессе обучения химии // Образование и воспитание дошкольников, школьников, молодежи: теория и практика. – 2023. – № 1. – С. 29–36.

4. Разработка виртуального лабораторного практикума по неорганической химии. Химические свойства элементов групп IA, IIA, IIIA, IVA и их соединений / Е. А. Сиплатова [и др.] // Успехи в химии и химической технологии. – 2014. – Т. 28, № 1. – С. 1–4.

5. *Семкова Э. С., Коптелова Е. Н.* Использование цифровых инструментов при обучении химии // Наука в жизни человека. – 2023. – № 1. – С. 100–110.

6. *Стёпушкина П. К.* Игровые движки для образовательных целей // Вестник науки. – 2024. – Т. 74, № 5. – С. 851–854.

7. *Турданов К., Палуанова А. Д., Ешбаева М. М.* Особенности виртуальных лабораторий // Research Focus. – 2023. – Т. 2, № 2. – С. 124–127.

8. *Чен П.* Использование иммерсивных технологий в современном образовании // Вестник АГУ. Серия 3: Педагогика и психология. – 2024. – № 1. – С. 42–47.

9. *Slater M.* Place Illusion and Plausibility Can Lead to Realistic Behaviour in Immersive Virtual Environments // Philos. Trans. Royal Soc. B. – 2009. – Vol. 364. – P. 3549–3557.

10. *Zolkina A. V., Lomonosova N. V., Petrusevich D. A.* Gamification as a tool of enhancing teaching and learning effectiveness in higher education // Science for Education Today. – 2020. – Vol. 10, No 3. – P. 127–143.

УДК 519.6

# ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЯННОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА НА КОРПУСЕ ПОДВОДНОГО АППАРАТА

**С. Л. Ильменков[1], Ф.Ф. Легуша[1], С. А. Переселков[2], И. М. Косенко[2], Н. В. Ладыкин[2], А. С. Переселков[2]**

*[1]Санкт-Петербургский государственный морской технический университет*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрен численный метод определения информативных признаков упругих подводных объектов в задачах гидролокации. В центре анализа находится математическая модель рассеяния импульсного звукового сигнала изотропной цилиндрической оболочкой конечной длины с торцевыми заглушками, которая в первом приближении описывает корпус необитаемого подводного аппарата. Зондирующим воздействием служит плоский волновой пакет с прямоугольной огибающей и гармоническим заполнением. По спектру рассеянного сигнала в заданной полосе частот определяется форма и длительность рассеянного импульса. Для этого используются угловые характеристики рассеяния стационарного сигнала, полученные из решения граничного интегрального уравнения в узловых точках на неаналитической поверхности оболочки. Для различных углов локации и частот заполнения выполнена оценка влияния толщины оболочки модели на проявление её упругих свойств в нестационарном гидролокационном отклике.
**Ключевые слова:** изотропная оболочка, импульсный звуковой сигнал, чатота заполнения, характеристики рассеяния.

## Введение

Геометрические и физические свойства подводных объектов служат ключевыми информативными признаками, по которым их отличают гидролокационными методами. Задача получения таких признаков важна для разных направлений морской деятельности, включая защиту объектов инфраструктуры, контроль трубопроводов и классификацию обнаруженных целей. Основой для предваренной оценки характеристик гидролокационных сигналов выступают расчетные подходы, основанные на математических моделях, что особенно значимо с учётом трудностей натурных измерений, связанных с изменчивостью параметров среды, влиянием границ акватории и внешними помехами. При разработке методов распознавания особое внимание уделяется необитаемым подводным аппаратам, которые занимают важное место в современной подводной робототехнике. Поскольку их корпус не является аналитической поверхностью, в модельных исследованиях его представляют комбинацией цилиндрических, сферических и конических упругих оболочек. При анализе рассеяния звука на таких поверхностях эффективно применение численных методов, позволяющих учитывать реальные характеристики материалов и среды [1, 2].

В зависимости от параметров корпуса и диапазона частот зондирующего воздействия вклад в рассеяние могут вносить фон внутренней полости, неровности поверхности, упругие свойства материала либо жёсткие характеристики стенки [3, 4]. В настоящей работе, развивающей результаты [2, 5, 6], выполнено расчетное исследование влияния толщины корпуса модельного подводного аппарата на степень выраженности и частотный диапазон проявления его упругих свойств в нестационарном гидролокационном отклике.

## 1. Постановка задачи

Для построения математической модели рассеяния импульсных эхосигналов упругим корпусом подводного аппарата, находящимся в идеальной безграничной жидкости, использован подход, описанный ранее в [2, 5]. Модель рассеивателя в данном случае также представляет собой круговую газонаполненную изотропную цилиндрическую оболочку конечной длины $L$ и толщины $h$, ограниченную по торцам дисками или полусферами радиуса $a$. Характеристики рассеяния нестационарного звукового сигнала определяются в соответствии с [7–9]: по спектру рассеянного сигнала $S(\nu,\theta)$ в полосе частот $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ с помощью преобразования Фурье отыскивается форма и длительность рассеянного импульса:

$$\Psi_s(t,\theta) = r^{-1/2}\pi^{-1}\int_{2\pi\nu_1}^{2\pi\nu_2} S(\nu,\theta)\exp(i2\pi\nu t)d(2\pi\nu), \qquad (1)$$

где $S(\nu,\theta) = S_0(\nu)D(\nu,\theta)$, $\theta$ — угол наблюдения, $S_0(\nu)$ — комплексный амплитудный спектр импульса падающей волны, $D(\nu,\theta)$ — угловая характеристика рассеяния стационарного звукового сигнала, $r$ — расстояние до точки наблюдения.

Рассматривается плоский зондирующий волновой пакет $p_i$ с частотой заполнения $\omega_0$ и прямоугольной огибающей:

$$p_i(x_i, t-t_1) = p_0(x_i)\exp(-i\omega_0 t)\left(\left[U(t)-\left[U(t-t_1)\right]\right]\right), \qquad (2)$$

где $x_i (i = 1,2,3)$ — обобщенные координаты, связанные с формой рассеивателя, $t_1$ — длительность волнового пакета, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, $\left[U(t-t_1)\right]$ — единичная ступенчатая функция. Она равна 0 при $t \le t_1$ и равна 1 при $t > t_1$.

Для расчёта, как и ранее [2, 3] используются значения $D(\nu,\theta)$, полученные на основе численного решения граничного интегрального уравнения относительно поверхностных перемещений и напряжений в узловых точках криволинейных изопараметрических граничных элементов на фрагментах поверхностной модели. В численном анализе рассматриваются низаочастотные падающие импульсы при $\nu_0 = \sqrt{\nu_1\nu_2}$, а значения $D(\nu,\theta)$ определяются с шагом $0.01\nu_1$. Расчетные оценки выполняются в диапазоне частот, соответствующем: $\nu_1 = 2\nu'$, $\nu_2 = 30\nu'$, где $\nu' = c/\pi * a$ ($c$ — скорость звука в воде). Число периодов частоты заполнения $n = 25..35$ выбрано, исходя из необходимой длительности падающего импульса с учетом значений $c$, $L$, $a$ для лучшего разрешения и идентификации объекта [6, 10]. Не учитывается влияние эффекта Доплера и рефракционных явлений, а толщина оболочки существенно меньше длины упругой волны в ее материале [8].

## 2. Результаты расчёта

На рис. 1 приведены рассчитанные временные характеристики падающего импульса и импульсов обратного рассеяния звука на стальной оболочке $L/2a = 5$, заполненной воздухом, при траверсной локации $\theta = 90°$ для нескольких значений её относительной толщины $h' = h/a$ и значения $\nu_0$, определяемого диапазоном $\nu_1 = 4\nu'$, $\nu_2 = 6\nu'$.

Аналогичные результаты для значений $\nu_0$, определяемых диапазонами $\nu_1 = 10\nu'$, $\nu_2 = 12\nu'$ и $\nu_1 = 20\nu'$, $\nu_2 = 22\nu'$ представлены на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

Как следует из результатов расчета, при $h' < 0.0002$ рассеянный звуковой сигнал, в основном, определяется «мягким» фоном внутренней полости оболочки. При $h' \approx 0.01..0.05$ в дифрагированном поле может возрастать роль упругих колебаний стенки оболочки, а по мере роста $h'$ все более преобладает характер рассеяния оболочкой как твердым телом.

На рис. 4 показаны нормированные импульсы обратного рассеяния для $h' = 0.05$ при траверсной и осевой локации и значениях $\nu_0$, для которых наблюдаются наибольшие значения

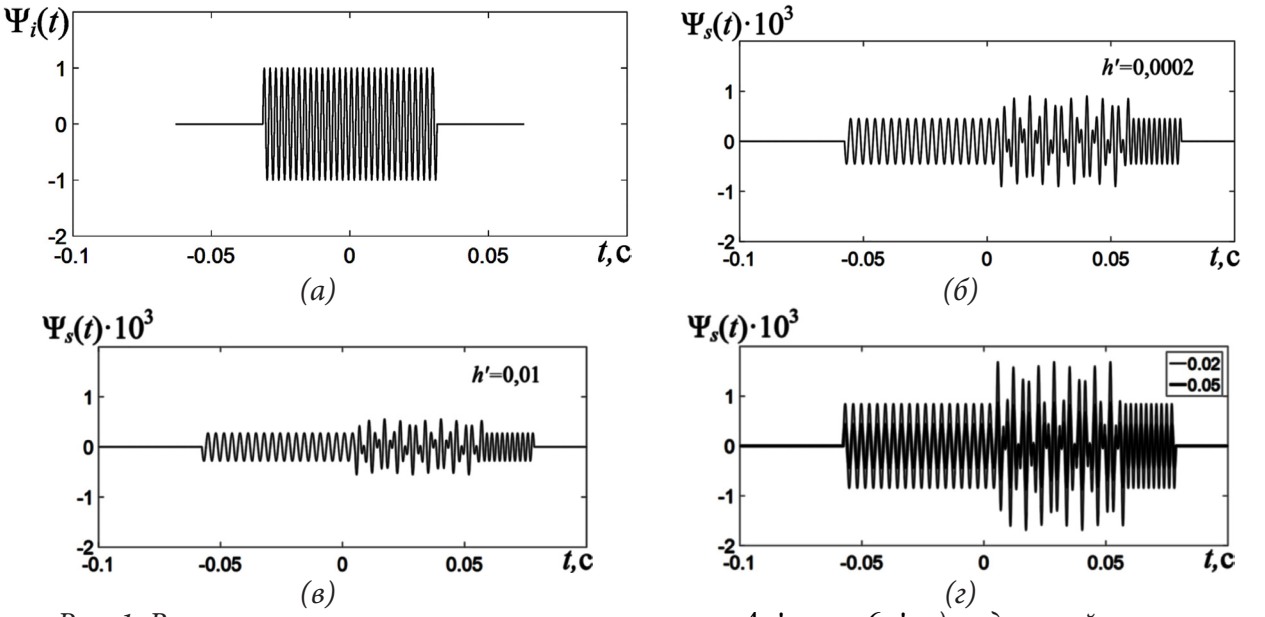



*Рис. 1. Временные зависимости рассеяния при* $v_1 = 4v'$, $v_2 = 6v'$. *а) падающий импульс; нормированные импульсы рассеяния: б)* $h' = 0.002$; *в)* $h' = 0.001$; *г)* $h' = 0.02$, $h' = 0.05$

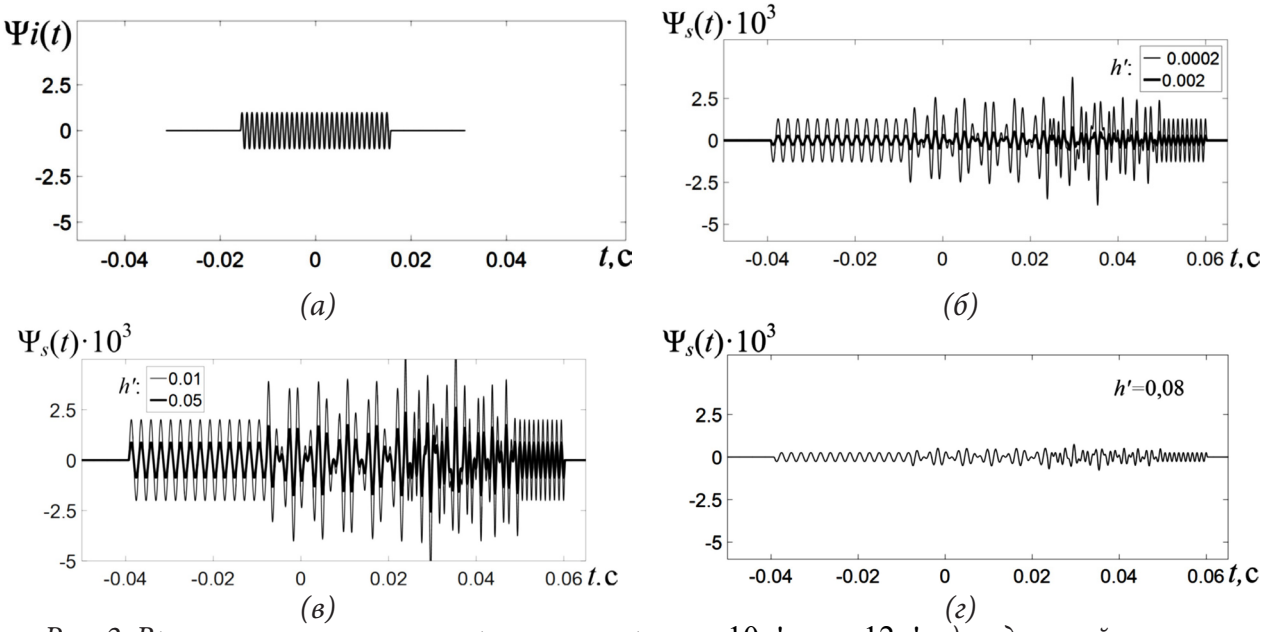



*Рис. 2. Временные зависимости рассеяния при* $v_1 = 10v'$, $v_2 = 12v'$. *а) падающий импульс; импульсы рассеяния: б)* $h' = 0.0002$, $h' = 0.002$; *в)* $h' = 0.01$, $h' = 0.05$; *г)* $h' = 0.08$

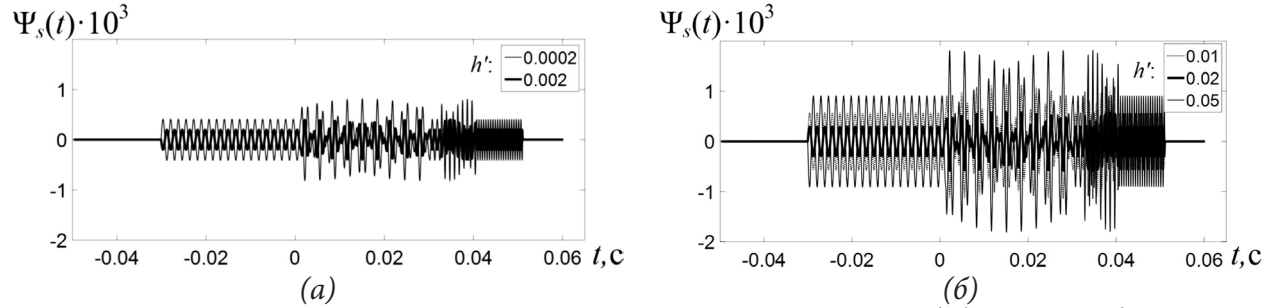
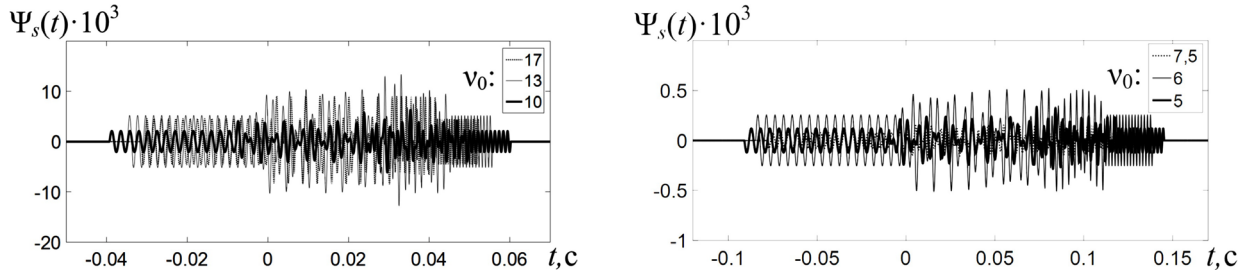



*Рис. 3. Временные зависимости рассеяния при* $v_1 = 20v'$, $v_2 = 22v'$. *а)* $h' = 0.0002, h' = 0.002$; *б)* $h' = 0.01$, $h' = 0.02$, $h' = 0.05$

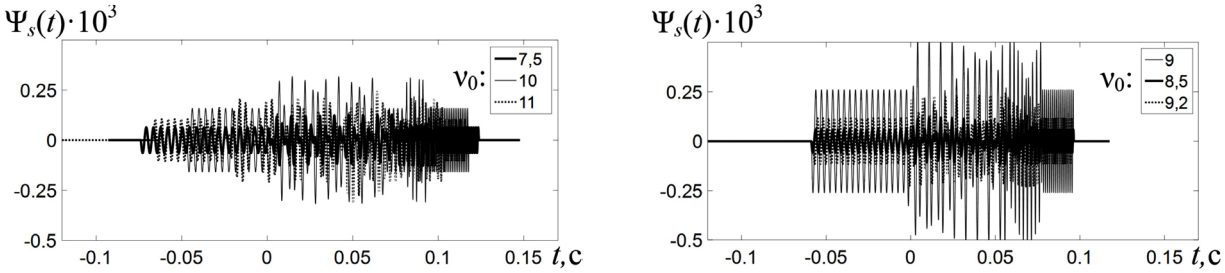
$\Psi_s(t)$. Как видно из рисунков, максимальные значения имеют место при $v_0 \approx 13$ (траверсная локация) и $v_0 \approx 6$ (осевая локация), что соответствует пространственной протяженности падающего импульса, сопоставимой с длиной контура модели в направлении его распространения.

Аналогичные результаты для неосевой локации модели представлены на рис. 5. Максимальные значения наблюдаются в случаях при $v_0 \approx 10$ $(\theta = 30°)$ и $v_0 \approx 9$ $(\theta = 60°)$ соответственно, что может быть связано с пространственной протяженностью падающих импульсов, близкой к проекции длины контура модели на направление их распространения.




*(а)* *(б)*

*Рис. 4. Импульсы обратного рассеяния: а) траверсная локация; б) осевая локация*




*(а)* *(б)*

*Рис. 5. Импульсы обратного рассеяния: а) $\theta = 30°$ при $v_0 = 7.5, 10, 11$; б) $\theta = 60°$ при $v_0 = 8.5, 9, 9.2$*

## Заключение

Полученные результаты показывают, что предложенный подход позволяет определить, какой механизм формирования рассеянного звукового сигнала играет главную роль для упругой тонкостенной оболочки конечной длины. Численный анализ даёт возможность установить связь между конкретным процессом рассеяния (внутренняя полость, зеркальное отражение, упругие свойства материала), толщиной стенки и частотой гармонического заполнения падающего импульса. Такое соответствие сохраняется при разных углах локации. В реальных условиях подводные аппараты имеют выступающие детали и неровности, сопоставимые с длиной волны, что усиливает вклад процессов рассеяния и усложняет идентификацию. Дополнительное влияние оказывают границы водной среды и рефракция, поэтому развитие применяемого численного алгоритма связано с уточнением расчетной модели и учетом внешних факторов.

В дальнейших исследованиях планируется рассмотреть применение голографических методов к обработке дифракционных акустических импульсов в гидроакустических волноводах, формируемых в рамках описанной модели. Основой таких методов являются устойчивые свойства интерференционной структуры, создаваемой источниками звука [13–18]. Вид и положение локальных полос интерферограммы определяются частотным диапазоном, параметрами волновода и движением источника. Голографические процедуры детектирования и локализации работают в широком диапазоне частот [19–22], обладают высокой помехоустойчивостью, слабой зависимостью от вариаций океанологических параметров и сохраняют надежность при пространственно-временной нестационарности среды [23–29]. Совмещение

голографической обработки с методами оценки глубины [30, 31] повышает устойчивость решения задач мониторинга подводной обстановки, включая обнаружение [32, 33], разрешение целей [34–36], пеленгование [37–39], оценку скорости и дистанции [13–17] и определение глубины [30, 31] малошумных объектов. Голографический подход также позволяет использовать адаптивные алгоритмы [40–42] и выполнять модовую селекцию в различных типах волноводов [43–45]. Его фокусирующая способность превосходит классические методы, в том числе обращение волнового фронта и временной реверс к координате источника [46], что делает его перспективным инструментом для обработки дифракционных акустических импульсов.

**Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

**Литература**

1. *Ильменков С. Л.* Развитие методов решения граничных задач гидроакустики: монография. – Санкт-Петербург: СПбГМТУ, 2020. – 190 с.

2. *Ильменков С. Л., Переселков С. А.* Оценка параметров модели подводного аппарата на основе расчёта характеристик рассеяния нестационарного сигнала // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2025. – 17(2). – С. 247–254.

3. *Шендеров Е. Л.* Излучение и рассеяние звука. – Ленинград : Судостроение, 1989. – 301 с.

4. *Косарев О. И.* Дифракция звука на конечном твёрдом цилиндре в дальнем поле // Вестник научно-технического развития. – 2017. – 3(115). – С. 30–37.

5. *Ильменков С. Л.* Решение задачи рассеяния стационарного и импульсного звуковых сигналов на многослойной изотропной цилиндрической оболочке / С. Л. Ильменков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 2. – С. 28–38.

6. *Ilmenkov S. L., Kleshchev A. A., Kuznetsova E. I.* Scattering of Stationary and Non-stationary (Impulse) Sound by Viscous–Elastic Cylindrical Layers // Open Journal of Mathematical Modeling. – 2013. – 1(1). – P. 1–6.

7. *Клещёв А. А.* Гидроакустические рассеиватели. – Санкт-Петербург : Прима, 2-е изд., 2011. – 267 с.

8. *Метсавээр Я. А.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах. – Москва : Наука, 1979. – 240 с.

9. *Подстригач Я. С.* Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. – Киев : Наукова думка, 1986. – 264 с.

10. *Залогин Н. Н., Скнаря А. В.* Зондирующие сигналы для активной локации высокого пространственного разрешения // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2016. – 8(1). – С. 3–8.

11. *Балакин Р. А., Вилков Г. И.* Идентификация материалов подводных объектов методами гидроакустического зондирования // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 3–11.

12. *Фролов С. И., Данилова Е. А., Таньков Г. В., Кочегаров И. И., Григорьев А. В.* Разработка методики определения резонансных частот тонкостенных цилиндрических конструкций бортовых радиоэлектронных средств // Надёжность и качество сложных систем. – 2021. – № 1. – С. 102–113.

13. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

14. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Голографические методы обработки гидроакустических сигналов (Обзор) // Акуст. журн. – 2025. – Т. 71, № 1. – С. 96–117.

15. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

16. *Ehrhardt M., Pereselkov S., Kuz'kin V., Kaznacheev I., Rybyanets P.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

17. *Глущенко М. Ю., Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Хворостов Ю. А., Ткаченко С. А.* Голографический метод идентификации шумового подводного источника в мелком море // Акуст. журн. – 2024. – Т. 70, № 3. – С. 67–77.

18. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Matvienko Y., Tkachenko S., Rybyanets P.* The Formation of 2D Holograms of a Noise Source and Bearing Estimation by a Vector Scalar Receiver in the High-Frequency Band. // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – 12. – 704.

19. *Казначеев И. В., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

20. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kaznacheev I. V., Grigor'ev V. A.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. – 2017. – Vol. 25, No 4. – P. 299–306.

21. *Переселков С. А., Кузькин В. М., Кузнецов Г. Н., Просовецкий Д. Ю., Ткаченко С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов // Акуст. журн. – 2020. – Т. 66, № 4. – С. 437–445.

22. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Куцов М. В., Переселков С. А.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне // Изв. РАН. Сер. физ. – 2021. – Т. 85, № 6. – С. 907–912.

23. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Zvyagin V. G., Malykhin Yu. A., Prosovetskiy D. Yu.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 2. – P. 160–167.

24. *Badiey M., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu., Tkachenko S. A.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II. Phys. Wave Phenom. – 2019. – 27(4). – P. 313–319.

25. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204.

26. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Ладыкин Н. В., Куцов М. В.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

27. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 1922.

28. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Influence of Intense Internal Waves Traveling Along an Acoustic Path on Source Holographic Reconstruction in Shallow Water // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – 13. – P. 1409.

29. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt, M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Effects of Irregular Bathymetry on Hologram Formation of Moving Source in ShallowWater. // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – 13. – P. 1775.

30. *Беседина Т. Н., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Определение глубины источника звука в мелком море на фоне интенсивного шума // Акуст. журн. – 2015. – Т. 61, № 6. – С. 718–728.

31. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Wave method for estimating the sound source depth in a oceanic waveguide // Phys. Wave Phenom. – 2016. – Vol. 24, No 4. – P. 310–316.

32. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А.* Обнаружение источника в диспергирующих средах // РЭНСИТ. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

33. *Матвиенко Ю. В., Кузькин В. М., Переселков С. А., Ладыкин Н. В., Грачев В. И.* Обнаружение и локализация шумового подводного источника в мелководной акватории на фоне интенсивного судоходства // РЭНСИТ. – 2025. – Т. 17, № 2. – С. 211–220.

34. *Kuz'kin V. M., Kuznetsov G. N., Pereselkov S. A., Grigor'ev V. A.* Resolving power of the interferometric method of source localization // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

35. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

36. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. A.* Resolution of hydroacoustic noise signals under conditions of spatial-temporal variability of ocean environment // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 4. – P. 290–299.

37. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kuznetsov G. N., Kaznacheev I. V.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

38. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Direction finding of a noise sound source // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 3. – P. 237–241.

39. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Логачев В. В., Косенко И. М.* Голографический метод обработки гидроакустических сигналов высокочастотного источника в мелком море // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 545–554.

40. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Tkachenko S. A.* Adaptive algorithms for interferometric processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 267–273.

41. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. F.* Adaptive method for holographic processing of broadband hydroacoustic signals // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 5. – P. 382–391.

42. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Адаптивный алгоритм локализации шумовых подводных источников в мелководных акваториях // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 533–544.

43. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Prosovetskii D. Yu., Kaznacheeva E. S.* Mode selection in oceanic waveguides // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, No 2. – P. 111–118.

44. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Kaznacheeva E. S., Tkachenko S. A.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, No 5. – P. 314–320.

45. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 279–286.

46. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Use of interference patterns to control sound field focusing in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 559.

УДК 550.388.2

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОКОЛОЗЕМНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

**С. А. Ишанов, Н. М. Кащенко, Л. В. Зинин, Д. А. Савкин, П. М. Каратаева**

*Балтийский федеральный университет имени И. Канта*

**Аннотация.** На основе математической модели низкоэнергичной околоземной космической плазмы рассмотрена динамика крупномасштабных процессов в системе ионосфера-плазмосфера в различных гелиогеофизических условиях. Численное моделирование основано на квазигидродинамическом описании плазмы и учитывает динамику ионосферно-плазмосферного обмена, процессы химической кинетики с учётом ударной ионизации энергичными магнитосферными ионами, диффузию электронно-ионного газа с учётом нейтрального ветра, теплоперенос в околоземной плазме с учётом обмена энергией между нейтральными и заряженными частицами, перенос и термализацию сверхтепловых электронов. По результатам численных исследований нестационарных процессов и структур в ионосферной плазме получены и проанализированы пространственно-временные распределения ключевых макроскопических параметров (концентрации, скорости и температуры).

**Ключевые слова:** гидродинамика, численное моделирование, кинетика, ионосфера, плазмосфера, вычислительный эксперимент, эволюция возмущений.

## Введение

Исследование ионосферы и плазмосферы — одна из актуальных задач науки, связанная с решением как фундаментальных вопросов физики космической плазмы, так и прикладных, касающихся распространения радиоволн различных диапазонов, освоения околоземного космического пространства и связанных с ним техногенных воздействий, а также для прогноза возможного поведения системы ионосфера — магнитосфера [1–3].

Численное моделирование нестационарных процессов в околоземной космической плазме необходимо проводить в существенно анизотропной среде (с перепадом плотности более чем в 15 порядков). Ионосферная плазма считается низкотемпературной с максвелловским распределением заряженных частиц со средней энергией $RT_e$ менее 1 эВ и концентрацией $10^2$–$10^6$ см$^{-3}$.

Целью работы является исследование динамики плазмы среднеширотной ионосферы и плазмосферы в возмущенных и спокойных условиях с учетом широкого спектра геофизических факторов, ответственных за образование этих структур: сложного состава ионосферной плазмы, диффузии электронно-ионного газа, фотохимии, дипольной геометрии геомагнитного поля, электрического дрейфа, ионосферно-плазмосферного обмена, кинетики сверхтепловых электронов.

Используемая в данной работе численная модель системы ионосфера — плазмосфера, основанная на системе уравнений магнитной гидродинамики, позволяет рассчитывать концентрации, температуры и скорости ионов $H^+$, $He^+$, $O^+$, $N^+$, ${N_2}^+$, ${O_2}^+$, $NO^+$ и электронов вдоль геомагнитной силовой трубки от высоты 125 км до нескольких радиусов Земли.

В модели также решаются уравнения диффузии для малых нейтральных и возбужденных компонент, в том числе таких как $O(^1D)$, $N(^2D)$, $O_2(A^1\Delta q)$, $H_2O, {N_2}^v$.

## 1. Описание математической модели

Математическая модель силовой трубки основана на уравнениях непрерывности (1), движения (2) и теплового баланса (3), записанных в проекциях на силовую линию магнитного поля и решаемых для каждого сорта заряженных частиц.

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_\alpha u_\alpha}{\partial s} + L_\alpha = Q_\alpha \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial s} + \frac{1}{m_\alpha n_\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial s} = F_\alpha \tag{2}$$

$$\frac{3}{2}kn_\alpha\left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial s}\right) + \frac{P_\alpha}{A}\frac{\partial (Au_\alpha)}{\partial s} - \frac{1}{A}\left(A\lambda_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial s}\right) = \theta_\alpha \tag{3}$$

где $A$ — расходимость силовых линий;

$\alpha$ — индекс сорта заряженных частиц, который принимает значения $O^+$, $H^+$, $He^+$, $N^+$, $O_2{}^+$, $NO^+$, $N_2{}^+$ в уравнениях (1), (2) и значения $e^-$, $O^+$, $H^+$, $He^+$, $N^+$, $O_2{}^+$, $NO^+$, $N_2{}^+$ в уравнении (3);

$m_\alpha$, $n_\alpha$, $u_\alpha$, $T_\alpha$, $P_\alpha$ — масса, концентрация, продольная скорость, температура и давление заряженных частиц сорта $\alpha$;

$L_\alpha$ и $Q_\alpha$ — коэффициент рекомбинации и функция ионизации ионов сорта $\alpha$;

$F_\alpha$ — нормированная на массу внешняя сила — ускорение от внешних сил, задаваемая формулой (4);

$k$ — постоянная Больцмана;

$\lambda_\alpha$ — коэффициент теплопроводности;

$\theta_\alpha$ — разность скоростей нагрева и охлаждения заряженных частиц.

$$F_\alpha = -g\sin I + \sum_{j\neq\alpha} S_{\alpha j}(u_j - u_\alpha) + R_\alpha(V_{nx}\cos I - u_\alpha) - \frac{1}{m_\alpha N_e}\frac{\partial P_e}{\partial s}, \tag{4}$$

где $g$ — ускорение силы тяжести;

$I$ — магнитное наклонение;

$S_{\alpha j}$ — коэффициент силы трения ионов сорта $\alpha$ и сорта $j$;

$R_\alpha$ — коэффициент силы трения ионов сорта α с нейтральными частицами;

$V_{nx}$ — меридиональная составляющая скорости нейтрального ветра;

$N_e$, $P_e$ — электронная концентрация и давление.

В силу принятого предположения о квазинейтральности плазмы электронная концентрация равна сумме концентраций положительных ионов $N_e = \sum_\alpha n_\alpha$. Таким образом, распределение частиц сорта $\alpha$ считается максвелловским, и потоками тепла пренебрегается.

Химические реакции, определяющие кинетику ионов, а также образующихся в результате их взаимодействия с нейтральными компонентами молекулярных ионов, представлены в [4–6].

Учет взаимодействия плазмы с горизонтальным термосферным ветром на ионосферных высотах проводится также, как в [3–4].

Для расчета пространственно-временных вариаций концентраций и температуры нейтральных компонентов $He$, $O$, $H$, $N$, $N_2$, $O_2$ используется модель термосферы MSIS [7].

Численное решение системы уравнений модели осуществлялось вдоль геомагнитной силовой линии с применением метода конечных разностей [8–10].

При решении системы уравнений (1)–(2) использован подход, приведенный в [9, 10].

## 2. Результаты вычислительных экспериментов

В работах [3, 4] рассматривался вопрос образования и «затягивания» ионосферной «дыры» при инжектировании $[H_2O]$. В этих работах приводились результаты расчетов высотно-временных распределений $N_mF2$, $h_mF2$ и потоков ионосферной плазмы. Показано, что инжектируемая $[H_2O]$ существенно влияет на рекомбинацию ионосферной плазмы в области $F2$

ионосферы. В данной работе рассматривается вопрос влияния инжектируемой $[H_2O]$ на электронную и ионные температуры ионосферной плазмы.

В работе в качестве начального условия $[H_2O]$ задавалась для двух случаев: в первом случае $[H_2O]$ на высоте $h = h_m F2$ составляла $10^7$ см$^{-3}$ и во втором случае $[H_2O] = 10^8$ см$^{-3}$.

Данная работа является продолжением работ [3, 4]. Расчеты ионосферных параметров проводились в силовой трубке $(L = 2)$ для высокой солнечной активности $(F_{10.7} = 234)$ в зимних условиях. Силовая линия имеет неоднородную пространственную сетку с 201 узлом. Шаг интегрирования по времени $\tau = 20\ c$.

На рис. 1 представлены суточные вариации $N_m F2$ при выбросах воды для зимних условий в момент времени $LT$ = 12 ч. В первом случае выброс воды составил на $N_m F2[H_2O] = 10^7$ см$^{-3}$ (на рис. 1 пунктирные линии) и во втором $[H_2O] = 10^8$ см$^{-3}$.

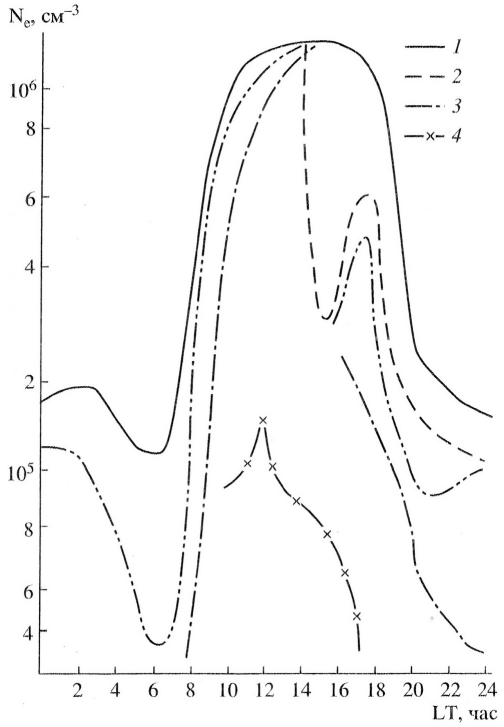



*Рис. 1. Временное поведение $N_m F2$. 1, 2 — фоновые значения $N_m F2$ при $[H_2O] = 10^7$ см$^{-3}$, 3 — значения $N_m F2$ при $[H_2O] = 10^8$ см$^{-3}$ (первые сутки) и 4 — вторые сутки*

Начальный профиль $[H_2O]$ задавался по барометрическому распределению. Затем $[H_2O]$ рассчитывалась численно по диффузионному уравнению. Из рис. 1 видно, что $[N_m F2]$ в первом случае восстанавливается $\approx$ 2 ч. Во втором случае восстановление $[N_m F2]$ наблюдается через 24 часа. Восстановление ионосферной «дыры» происходит как за счет ионизации, так и за счет изменения потоков плазмы из магнитосферы в ионосферу [1, 2]. На этом же рис. 1 видно появление второй «дыры» в заходный период $(LT \approx 20)$ (пунктир). На рис. 2, 3 представлена суточная вариация электронной и ионной ($T_{H^+}$) температуры на высоте $h_m F2$ при выбросах $H_2O$. Из рис. 2 видно, что образование ионосферной «дыры» приводит к существенному увеличению температуры электронов. При выбросах $[H_2O] = 10^7$ см$^{-3}$ в максимуме $F2$ слоя уменьшение $[N_m F2]$ составляет примерно 50 % для выбранных условий. Такое уменьшение электронной концентрации не приводит к заметному изменению электронной температуры. При выбросах $[H_2O] = 10^8$ см$^{-3}$ в максимуме $F2$ слоя наблюдается как существенные изменения в $[N_m F2]$, так и в высотно-временном поведении $T_e$ (см. рис. 2, 3). Так, электронная концентрация в $N_m F2$ уменьшилась на порядок величины для $LT$ = 16–18 и для $LT$ =0.4–0.6. Такое уменьшение электронной концентрации приводит к увеличению электронной темпера-

туры (при неизменных источниках нагрева ионосферной плазмы), что видно из рис. 2, 3 и из уравнения (3).

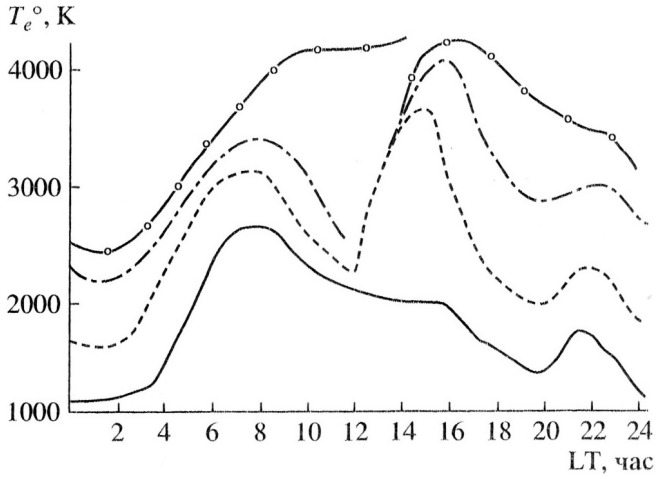



*Рис. 2. Временное поведение $T_e$ на высоте $N_mF2$ (обозначения соответствуют рис. 1)*

Что касается ионных температур, то вычислительный эксперимент показал, что образование ионосферной «дыры» не сказывается на изменении $T_{o^+}$. Для примера на рис. 3 приведена суточная вариация $T_{H^+}$ при антропогенных воздействиях воды на ионосферу в области $h_mF2$. Из рис. 3 видно, что $T_{H^+}$ подвержена изменениям, в зависимости от количества выбрасываемой воды.

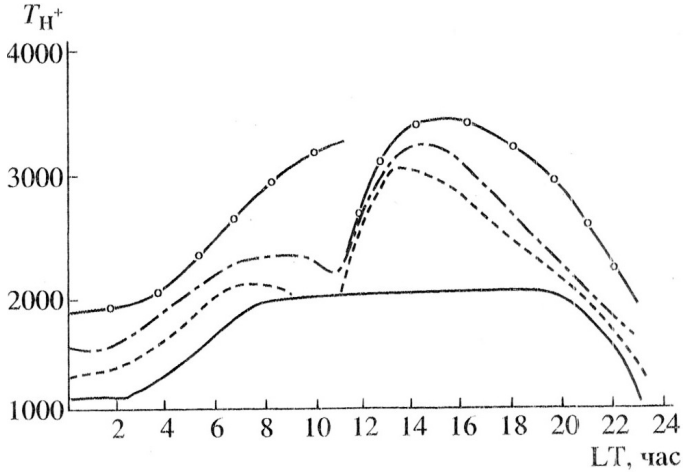



*Рис. 3. Временное поведение $T_{H^+}$ на высоте $N_mF2$ (обозначения соответствуют рис. 1)*

В качестве следующей модельной задачи был выбран расчет ионосферно-плазмосферных параметров в условиях возмущения плотности и температуры плазмы в силовой трубке с параметром $L = 3$ для средней геомагнитной и солнечной активности (индексы $K_p = 3, F_{10.7} = 150$) и начала года (зима в Северном полушарии, лето в Южном) [4].

В геомагнитной силовой трубке с установившимся режимом антропогенное возмущение задавалось в полдень в Северном полушарии гауссоподобным распределением концентрации и температуры электронов с максимальным значением на высоте 2400 км ($N_e[2400] = 1.6 \cdot 10^5$ см$^{-3}$, $T_e[2400] = 1$ эВ). Размер области возмущения на высоте — 900 км.

На рис. 4, 5 представлены пространственно-временные распределения электронной концентрации до и после динамического воздействия. Результаты, показанные на рис. 4, позволяют проследить распространение возмущения вверх и вниз по геомагнитной трубке. Время релаксации электронной концентрации к фоновым значениям составляет примерно 10 минут

в интервале высот 300–2500 км. Динамическое воздействие не вызвало заметного отклика на высотах F-области (рис. 4), однако через 5 минут после начала возмущения на высоте 900 км концентрация электронов возросла в 1.7 раза, а на высоте 500 км, спустя 10 минут, — в 1.3 раза.

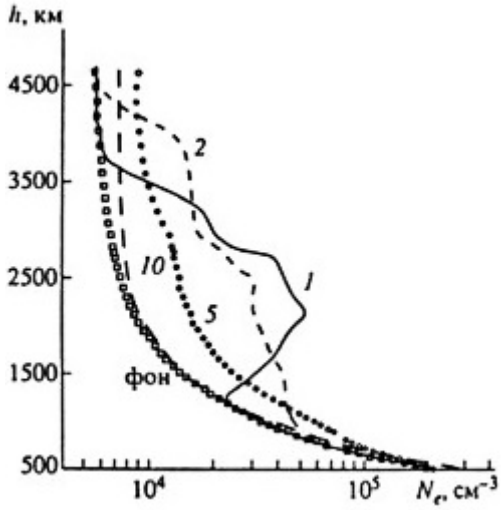



*Рис. 4. Высотные профили электронной концентрации для различных моментов времени в Северном полушарии. Цифры у кривых соответствуют времени (в мин), прошедшему после возмущения плазмосферы*

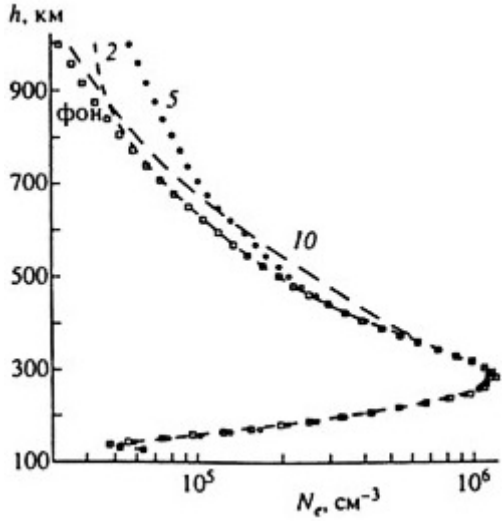



*Рис. 5. Высотные профили электронной концентрации в области ионосферы для различных для различных моментов времени в Северном полушарии. Обозначается те же, что и на рис. 4*

На рис. 6 представлены временные изменения концентрации электронов на избранных высотах. Очевидно, что по мере удаления от места локализации динамического воздействия амплитуда возмущения уменьшается, причем наблюдается фазовый сдвиг максимального значения концентрации, изменяющийся с высотой. Для Северного полушария заметно некоторое понижение электронной концентрации через 20–30 мин после возмущения на высотах 500–2100 км, обусловленное, по-видимому, динамическими факторами.

Таким образом, техногенное возмущение температуры и плотности плазмы на высотах плазмосферы переносится вдоль геомагнитного поля от места локализации в ионосферу и магнитосопряженную область.

Фазовый сдвиг в локальных максимумах параметром плазмы является характерным.

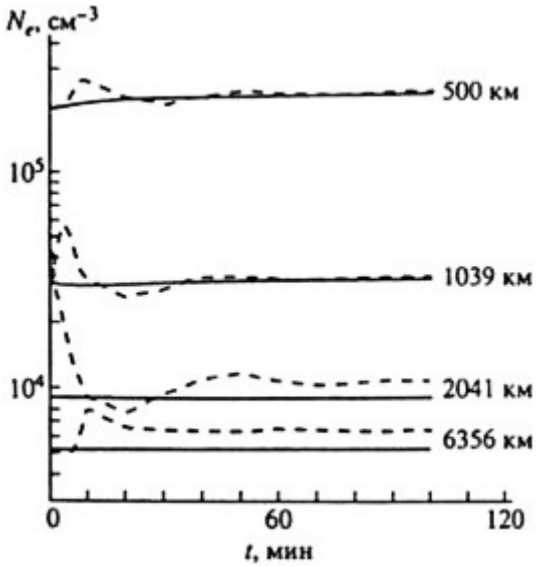



*Рис. 6. Временные вариации электронной концентрации на фиксированных высотах в Северном полушарии. Сплошные кривые соответствуют невозмущенным условиям*

## Заключение

На основе гидродинамической модели динамики тепловой плазмы в геомагнитных силовых трубках исследованы процессы динамики плазмы и энергии в ионосфере и плазмосфере Земли в различных гелиогеофизических условиях.

Вычислительные эксперименты показали, что более корректная постановка задачи численного моделирования нестационарных процессов и структур в околоземной космической плазмы формулируется для полной системы уравнений движения и непрерывности гиперболического типа.

В результате численных исследований получены и проанализированы пространственно-временные распределения основных макроскопических параметров ионосферно-магнитосферной плазмы в различных геофизических ситуациях, включая техногенные воздействия.

В результате вычислительных экспериментов показаны основные закономерности в динамике переноса и химической кинетики заряженных частиц в спокойных и возмущенных условиях.

Проведена разработка новых и модификация известных численных методов, учитывающих специфику моделируемых физических процессов и удовлетворяющих необходимым требованиям аппроксимации, устойчивости и экономичности.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект №25-21-00107, http://rscf.ru/project/25-21-00107

## Литература

1. Современные достижения в плазменной гелиогеофизике; под ред. Л. Н. Зеленого, А. А. Петруковича, И. С. Веселовского. – М. : Физматлит, 2019. – 688 с.

2. *Мингалев О. В., Мингалев И. В., Малова Х. В., Мерзлый А. М., Мингалев В.С., Хабарова О. В.* Описание крупномасштабных процессов в околоземной космической плазме // Физика плазмы. – 2020. – Т. 46, № 4. – С. 329–350.

3. *Латышев К. С., Зинин Л. В., Ишанов С. А.* Математическое моделирование околоземной космической плазмы // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. – 2008. – Т. 7–1, Ч. 3. – С. 337–349.

4. *Ишанов С. А., Мацула П. В.* Вычислительный эксперимент при моделировании динамики антропогенных возмущений ионосферно-магнитосферной плазмы // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 6. – С. 128–136.

5. *Брюнелли Б. Е., Намгаладзе А. А.* Физика ионосферы. – М.: Наука, 1988. – 528 с.

6. *Кринберг Н. А., Тащилин А. В.* Ионосфера и плазмосфера. – М.: Наука, 1984. – 189 с.

7. *Hedin A. E.* Thermospheric model // J. Geophys. Res. – 1987. – V. 92, № A5. – P. 4649–4662.

8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.

9. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений // ДАН СССР. – 1984. – Т. 279, № 1. – С. 80–83.

10. *Chetverushkin B., D'Ascenzo N., Ishanov S., Saveliev V.* Hyperbolic type explicit kinetic scheme of magneto gas dynamics for high performance computing systems // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 2015. – 30(1). – P. 27–36.

УДК 004.9

# ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СНЕЖНЫХ ЛАВИН

**А. В. Калач[1,2], Б. А. Крынецкий[1]**

*[1]МИРЭА – Российский технологический университет*
*[2]Воронежский институт ФСИН России*

**Аннотация.** Приведены результаты оценки численной неустойчивости при моделировании лавинных процессов методом сглаженных частиц (SPH) на начальной стадии расчета, что выражается во взрывном разлете частиц вследствие чрезмерных сил отталкивания при их плотной упаковке в ограниченном объеме, соответствующем лавиноопасной зоне. Предложены критерии оценки числа частиц, основанные на отношении объема призмы, описывающей начальную область скопления снега, к объему сферической частицы с фиксированным радиусом. Показано, что применение критериев позволяет избежать нефизичной динамики при сохранении требуемой точности моделирования.
**Ключевые слова:** метод сглаженных частиц, SPH, моделирование лавин, адекватность модели, численная устойчивость, начальные условия, оценки начальных условий.

## Введение

Метод сглаженных частиц является мощным инструментом в задачах моделирования динамики сплошных сред с произвольным характером поверхностей, которыми выступают лавинные процессы [1–4]. Одним из ключевых параметров, контролируемых в рамках моделирования, является число частиц, участвующих в процессе. Выбор числа частиц — важный шаг определения начальных условий, формирующий разрешающую способность модели, и определяющий предпосылки к поведению системы. Попытка улучшения разрешающей способности модели неограниченным увеличением числа частиц приводит к парадоксальной ситуации, в которой силы взаимного отталкивания частиц приводят к нетипичной взрывной динамике на начальном этапе моделирования, ухудшающей адекватность результатов.

Проблема нестабильности на начальном этапе моделирования, вызванная плотной упаковкой частиц, обычно решается методами релаксации начальной конфигурации [5]. Однако, подобные подходы требуют дополнительных вычислительных затрат и не всегда удобны, особенно в случаях, когда число частиц остаётся контролируемым параметром исследования.

В рамках исследования ставится задача разработки критерия для оценки допустимого числа частиц, позволяющего избежать указанной проблемы и обеспечить устойчивый старт расчета.

## 1. Особенности моделирования лавины методом сглаженных частиц

Моделирование динамики снежных лавин представляет собой сложную многопараметрическую задачу, обусловленную изменчивостью физико-механических свойств снега и сложностью рельефа горной местности. В представленной работе для решения этой задачи используется метод сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics — SPH).

В рамках рассматриваемой [6] трехмерной модели снежная масса дискретизируется на совокупность сферических элементов диаметром $d$ Взаимодействие между элементами описывается вязкоупругой моделью, где сила воздействия на $i$-й элемент со стороны $j$-го элемента определяется как векторная сумма:

$$\overrightarrow{F_{ij}} = \overrightarrow{F_{ij}^{y}} + \overrightarrow{F_{ij}^{B}}, \tag{1}$$

где $\overrightarrow{F_{ij}^{y}}$ — сила упругого взаимодействия, $F_{ij}^{B}$ — сила вязкого взаимодействия.

Ключевой проблемой при реализации SPH-моделирования лавинных процессов является обеспечение устойчивости начальной конфигурации системы частиц. При размещении частиц в ограниченном объеме, соответствующем лавиноопасному участку склона, возникает эффект плотной упаковки, когда среднее расстояние между центрами частиц становится сравнимым с характерным диаметром элемента

Сила упругого взаимодействия в выражении (1) определяется для частиц *i* и *j* по выражению:

$$\overrightarrow{F_{ij}^{y}} = \begin{cases} c\left(d_э - r_{ij}\right)\dfrac{\overrightarrow{r_{ij}}}{r_{ij}}, & r_{ij} < \alpha d_э \\ 0, & r_{ij} \geq \alpha d_э \end{cases},$$

где $c$ — коэффициент жесткости, $r_{ij}$ — расстояние между центрами частиц, $\alpha$ — коэффициент, определяющий границу взаимодействия, $d_э$ — диаметр частицы.

При высокой плотности упаковки величина $r_{ij}$ стремится к $d_э$, что приводит к резкому росту числа соседей в зоне взаимодействия и, как следствие, к возникновению чрезмерных сил отталкивания. Это проявляется в нефизичном взрывном разлете частиц на начальных шагах моделирования.

## 2. Особенности определения начальных условий

Для определения начальных координат моделирования применяется подход, основанный на почти периодическом анализе линеаризованной структуры лавиноопасной области [7]. В рамках подхода формируется система полигонов, аппроксимирующих геометрию склона, и определяется система критических линейных границ, определяющих лавиноопасные области исследуемого хребта.

Для моделирования начальных координат частиц определённые границы воспроизводятся в пространстве соответствующих цифровых моделей рельефа (ЦМР). Пространственные горизонтальные координаты частиц $x$, $y$ определяют соответствующее значение вертикальной координаты $z$ — высоту рельефа в заданной точке пространстве. Затем к величине $z$ добавляется случайная величина, распределённая равномерно, определённая в интервале [0; высота снежного покрова]. Начальные скорости определяются равными 0, что соответствует статичному состоянию снежных масс.

Дальнейшее моделирование лавины происходит с учётом заданной характеристики взаимодействия между частицами, обусловленной состоянием снега — сухого либо влажного. Функция, определяющая профиль склона, представлена билинейной интерполяцией ЦМР. Динамика частиц описывается законами классической механики в условиях сил упругого и вязкого взаимодействия.

## 3. Количественные критерии устойчивого решения

В ходе процедуры генерации начальных состояний частиц, описанной выше, в пространстве создаётся $N$ частиц, заключенных в пределах четырёхугольника в проекции $xy$, определённого высотой снежного покрова в соответствующей области ЦМР. Его объём возможно определить, считая его телом постоянной толщины — путём умножения площади четырёхугольника на высоту снежного покрова.

$$V_{масс} = S_{осн} \cdot h_{покрова},$$

где $S_{осн}$ — площадь четырёхугольного полигона, $h_{покрова}$ — толщина моделируемого покрова.

Так же возможно рассчитать объём, который могут занять частицы — путём умножения объёма частиц на их количество:

$$V_{частичный} = \frac{\pi d_э^3}{6} \cdot N,$$

где $N$ — число моделируемых сферических частиц.

В рамках задачи плотной упаковки равных сфер доказана оптимальная оценка соотношения объёма сфер к заполняемой упаковке, равная $\pi / 3\sqrt{2}$. Эту оценку возможно считать нижней границей, при которой равномерное распределение частиц может создать непересекающиеся объекты, что характерно для разреженного состояния системы. Тогда оценка характерного критического числа разреженных частиц составляет

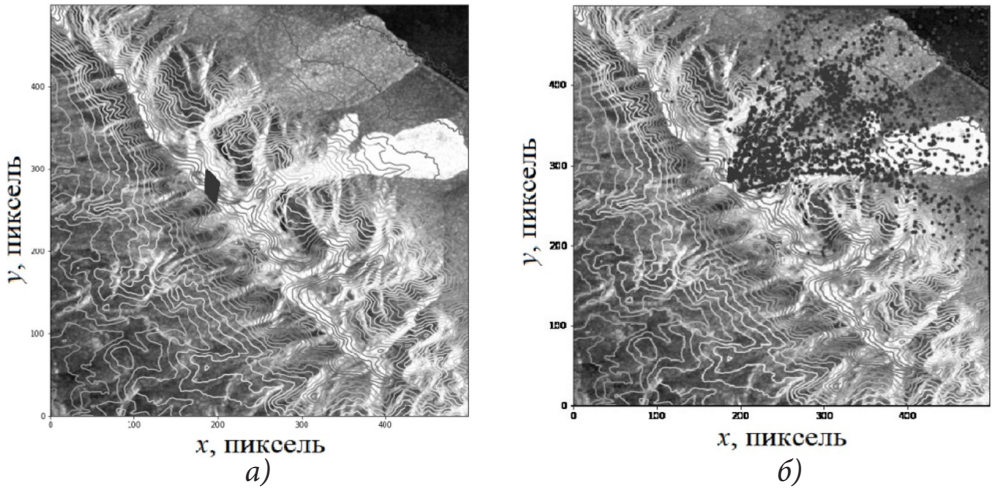
$$N_{разр} = \frac{2 \cdot S_{осн} \cdot h_{покрова}}{\sqrt{2} \cdot d_э^3}.$$

В случае, если частицы генерируются в числе, превышающем $N_{разр}$, пересечения неизбежны, что определяет ситуацию, в которой начальное состояние снежной массы становится преднапряжённым — это может соответствовать опрессовыванию снега перед сходом (что может быть представлено в условиях неоднородности послойной структуры снежного покрова). Тогда в рамках моделирования возможно возникновения всплесков снежной массы на начальных этапах. В последующих этапах моделирования такие всплески нивелируются и теряются в общей массе.

Последующее наращивание числа частиц приводит к существенному уплотнению начальных координат частиц, и как следствие — наращивание потенциала сил эластичного взаимодействия между частицами. Экспериментально установлено, что при достижении соотношения $V_{частичный} / V_{масс}$ порядка 10, возникает явление взрыва — неадекватного поведения системы, при котором частицы, расположенные на внешней стороне множества, получают начальный импульс, вызывающий поведение, не свойственное для адекватного поведения лавины. Тогда оценка характерного критического числа уплотнённых частиц составляет

$$N_{крит} = 60 \cdot \frac{S_{осн} \cdot h_{покрова}}{d_э^3}.$$

Тогда частицы разлетаются в форме струй, не касающихся поверхности склона. Пример такого явления представлен на рис. 1. Частицы на рисунке размечены тёмно-серыми точками.




*а)* *б)*

*Рис. 1. Начальное положение частиц (а), положение частиц по прошествии 2 секунд модельного времени (б)*

Таким образом, для числа частиц, участвующих в моделировании определены теоретическая и экспериментальная значения оценок. Эти значения с оценками влияния на процесс моделирования, установленные в ходе экспериментов, приведены в табл 1.

Таблица 1

| Число частиц моделирования | Характеристика плотности снежных масс | Потенциальные проблемы моделирования | Преимущества моделирования |
|---|---|---|---|
| $1 \le N < N_{разр}$ | Разряженная | Недостаточная инофрмативность, слабая обоснованность результатов | Моделирование оперативно |
| $N_{разр} \le N < N_{крит}$ | Уплотнённая | Локальные искажения начального поведения структуры | Моделирование носит комплексный характер |
| $N \ge N_{крит}$ | Критически уплотненённая | Неадекватное физическое поведение, требуются огромные вычислительные мощности | Нет |

Дальнейшее уточнение и дополнение классификации критических оценок может быть дополнено на основе выделения частных классов результатов моделирования.

## Заключение

В работе рассмотрена проблема численной неустойчивости, возникающей на начальных этапах SPH-моделирования лавинных процессов при размещении частиц в ограниченных областях рельефа. Показано, что ключевой причиной нефизичного «взрывного» разлёта частиц является чрезмерная плотность их исходной упаковки, приводящая к резкому росту сил упругого взаимодействия и нарушению устойчивости интегрирования.

Предложен практический критерий оценки максимально допустимого числа частиц, основанный на сравнении объёма моделируемой призмы снежного покрова с суммарным объёмом равных сфер с учётом оптимальной плотности упаковки. Теоретическая оценка критического числа разрежённых частиц позволяет определить границу, за пределами которой пересечения неизбежны и в системе появляется преднапряжённое состояние. Экспериментально установлено, что дальнейшее увеличение плотности приводит к достижению порога критического уплотнения, сопровождаемого неприемлемой неустойчивостью начальной конфигурации и потерей физической достоверности модели.

Применение предложенного критерия обеспечивает устойчивый запуск SPH-моделирования без необходимости дополнительных процедур релаксации, что снижает вычислительные затраты и повышает воспроизводимость результатов. Полученные зависимости могут использоваться как при выборе разрешения модели, так и при разработке алгоритмов генерации начальных условий для различных типов лавинных сценариев.

## Литература

1. *Соловьев А. С.* Моделирование зоны распространения снежной лавины модифицированным методом сглаженных частиц / А. С. Соловьев, А. В. Калач // Актуальные проблемы деятельности подразделений УИС : сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции, Воронеж, 28 мая 2015 года. – Воронеж: ООО «Издательство «Научная книга»», 2015. – С. 301–303. – EDN VYGIZP.

2. *Четырбоцкий А. Н.* Численное моделирование динамики схода лавины гибридными методами SPH / А. Н. Четырбоцкий // Селевые потоки: катастрофы, риск, прогноз, защита: Материалы IV Международной конференции, Иркутск, 06–10 сентября 2016 года. – Иркутск : Изд-во Института географии им. В. Б. Сочавы СО РАН, 2016. – С. 248–250.

3. *Алешин А. П.* Метод SPH как эффективное средство при реализации численного моделирования процесса движения лавины / А. П. Алешин // 3D технологии в решении научно-практических задач: Сборник статей Всероссийской научно-практической конференции, Красноярск, 29 сентября 2022 года. – Красноярск: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева», 2022. – С. 116–118.

4. *Fan Yu, Li Xiaoliang, Zhang Shuoguo, Hu Xiangyu, Adams Nikolaus.* Analysis of the particle relaxation method: For generating uniform particle distributions in smoothed particle hydrodynamics // Computational Particle Mechanics. – 2025. – 12. – 10.1007/s40571-025-00965-6.

5. *Shipovsky I. E.* Smoothed Particle Hydrodynamics Simulation of Rock Slope Stability / I. E. Shipovsky, V. A. Trofimov // AIP conference proceedings : PHYSICAL MESOMECHANICS OF CONDENSED MATTER: Physical Principles of Multiscale Structure Formation and the Mechanisms of Nonlinear Behavior: MESO2022, Tomsk, 05–08 сентября 2022 года. Vol. 2899. – College Park: AIP PUBLISHING, 2023. – P. 020132. – DOI 10.1063/5.0163111. – EDN YFTSDM.

6. *Калач А. В.* Моделирование движения снежной лавины / А. В. Калач, А. С. Соловьев, Т. В. Лентяева // Технологии техносферной безопасности. – 2025. – № 1(107). – С. 116–133. – DOI 10.25257/TTS.2025.1.107.116-133. – EDN IGHWVO.

7. *Крынецкий Б. А.* К вопросу структурной сегментации снежных лавин на основе почти периодов / Б. А. Крынецкий, А. В. Калач // Арктика: перспективы, инновации и развитие регионов : IX Международный Арктический саммит : сборник материалов, Москва – Санкт-Петербург, 22–25 апреля 2025 года. – Москва : Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, 2025. – С. 191–195. – EDN HYOEPR.

УДК 519.6

# МОДЕЛЬ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО УЩЕРБА ОТ ТРОПИЧЕСКИХ ЦИКЛОНОВ

**А. В. Калач, А. Л. Шкерин**

*МИРЭА – Российский технологический университет*

**Аннотация.** Приведены результаты разработки модели машинного обучения для предсказания экономического ущерба. Исследовано влияние ключевых факторов (интенсивность ветра, число пострадавших, уровень экономического развития) и другие на результаты моделирования. Создана модель и ее программная реализация для оценки рисков и прогнозирования ущерба от тропических циклонов и штормов на основе EM-DAT (International Disaster Database) с минимизацией метрики MAE и максимизацией метрики R2. Использованы алгоритмы CatBoost и MLP для разработки модели прогнозирования, проведён SHAP-анализ.

**Ключевые слова:** тропический циклон, машинное обучение, EM-DAT, экономический ущерб, CatBoost, SHAP.

## Введение

Тропические циклоны представляю собой одно из наиболее разрушительных атмосферных явлений, вызывающее значительный экономический ущерб и человеческие потери. Согласно EM-DAT [1] за период 2000–2025 гг. зарегистрировано более 2755 событий штормов, из которых более тысячи сопровождались экономическим ущербом в диапазоне от 5 тыс. до 125 млн. долларов США.

Традиционные физические модели, например использующие уравнения диффузии и ветра как в работе Калача А. В. и др. [2] хорошо описывают динамику эволюции циклона, но слаба справляются с прогнозированием экономических последствий из-за сложности интеграции в модель социально-экономических факторов. Актуальные социально-экономические показатели были получены из World Bank [3].

В автореферате Постернака Е. В. [4] предлагается схема научно-методического аппарата краткосрочного прогнозирования ущерба от природных ЧС и обоснования объемов сил и средств с применением методов ML, но не рассматривается практическая реализация этой схемы. В данной работе основное внимание уделяется программной реализации конкретного варианта прогнозирования.

Цель настоящей работы — разработка модели машинного обучения, интегрирующей метеорологические и социально-экономические признаки для предсказания экономического ущерба. Для достижения поставленной цели рассматривались градиентный бустинг CatBoost и Multi-Linear Perceptron (MLP), данный выбор обусловлен низки затратами вычислительных мощностей на обучение и достаточной сложностью указанных методов машинного обучения, что позволяет уловить нелинейные закономерности в исследуемых данных.

## 1. Подготовка и обработка данных

Используемые в настоящей работе данные получены из набора данных EM-DAT [1], после чего данные были отфильтрованы по показателю Disaster Type = ‘Storm’ и Total Damage >0. Ключевые переменные, представленные в набор, следующие:

- Magnitude, интенсивность скорости ветра в шторме, км·ч$^{-1}$;

• No. Affected, количество людей которым требуется незамедлительная помощь, безразмерная величина;

• Total Affected, количество пострадавших от явления, безразмерная величина;

• Total Death, количество погибших от явления, безразмерная величина;

• Start Year, год начала события явления, безразмерная величина;

• Disaster Subtype, подтип шторма, в частности — тропический циклон, категориальная строка;

• Region, географическая категория происходящего явления, категориальная строка;

• Total Damage, общие экономический ущерб от шторма, тысячи долларов США;

Для определения того, какие признаки следует перевести в логарифмическую шкалу, было построено распределение показателей, на примере показателя Total Damage показана сильная асимметричность распределения, по оси ордината отложено количество таких записей, по оси абсцисс показатель Total Damage (рис. 1.).

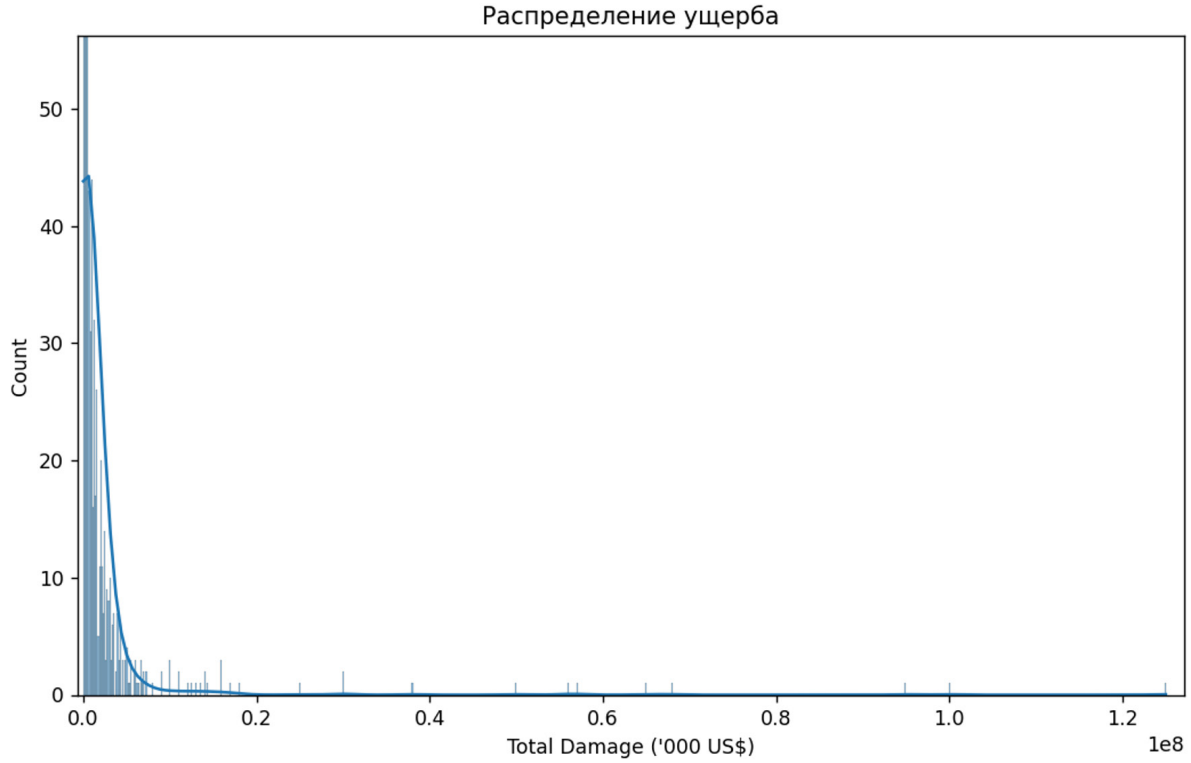



*Рис. 1. Ассиметричное распределение признака Total Damage*

Из рис. 1 видно, что асимметричность распределения не даёт изучить его в полной мере и искажает дальнейшие результаты прогнозирования и анализа, для чего к данному признаку применяется логарифмическая шкала, подобное применяется ко всем признакам показывающим ассиметричное распределение или значения имеющие характер выбросов, как, например, значение $1.2 \cdot 10^8$ на рис. 1. Логарифмическая шкала для показателя Total Damage представлена на рис. 2, по оси ординат отложено количество, по оси абсцисс логарифм показателя Total Damage.

Как видно из рис. 2 теперь признак Total Damage пригоден для дальнейшего анализ.

Так же для выявления зависимости между признаками и создания новых признаков была изучена корреляционная матрица, построенная среди выбранных признаков, корреляционная матрица представлена на рис. 3, более светлые области соответствуют наличию корреляции между переменными, более тёмные — отсутствию корреляции, по обоим осям отложены рассматриваемые признаки.

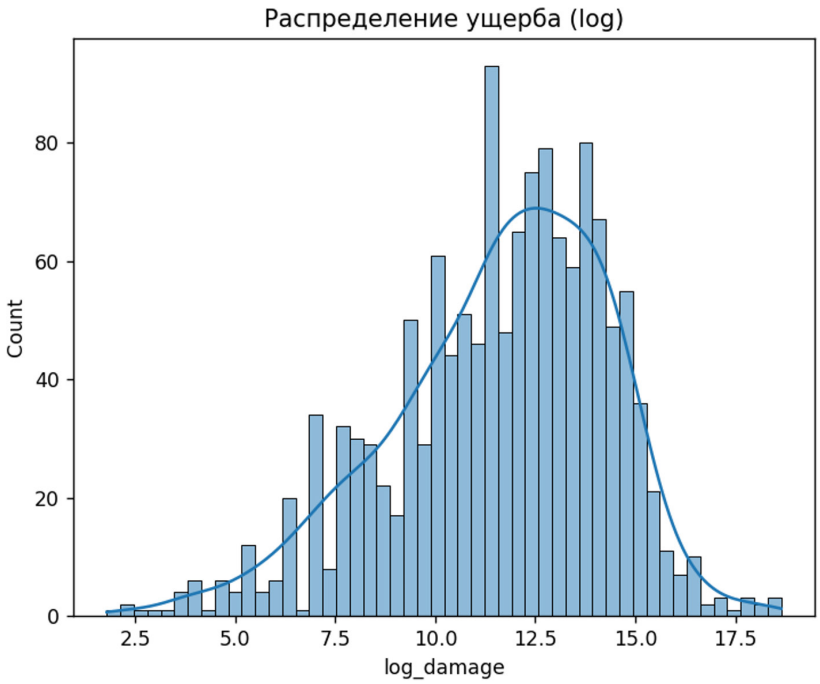



*Рис. 2. Распределение признака Total Damage в логарифмической шкале*

*Рис. 3. Корреляционная матрица исследуемых признаков*

Как видно из рис. 3 признаки в своём изначальном масштабе обладают слабой, практически отсутствующей корреляцией, за исключением признаков Total Damage и Magnitude. Признаки No. Affected и Total Affected обладают корреляцией со значением 1, что говорит о том, что один из признаков можно исключить, в данном случае исключается No. Affected, так как Total Affected имеет информацию не содержащуюся в No. Affected. После преобразования признаков в логарифмическую шкалу новая корреляционная матрица представлена на рис. 4, по осям отложены признаки в логарифмической шкале, за исключение признаков Magnitude и Start Year.

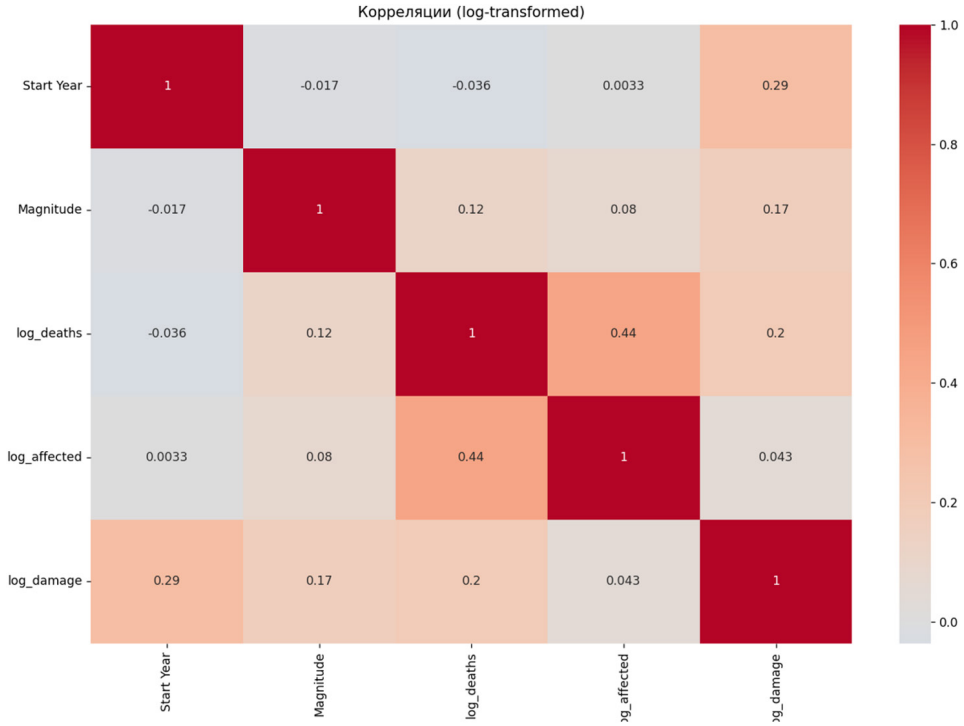



*Рис. 4. Корреляционная матрица исследуемых признаков приведённых в логарифмический масштаб*

Из рис. 4 следует, что в логарифмическом масштабе отобранные признаки обладают достаточно явной корреляцией, о чём свидетельствуют значения 0.44 и 0.29.

С помощью инженерии признаков были созданы некоторые новые признаки, которые затем используются в дальнейшем обучении модели, такие как булевы признаки is_tropical и is_high_wind, принимающие значения 0 и 1.

Используя one hot кодирование на признаках Subtype и Region получены численные представления указанных признаков для дальнейшего их использования в обучении нейронной сети.

## 2. Построение и обучение модели

За базовую модель принимается модель линейной регрессии как заведомо более слабый вариант при проработке задач со сложной нелинейной зависимостью. Основные рассматриваемые модели — это градиентный бустинг CatBoost и MLP, в данной работе параметры сравниваемых моделей приведены в табл. 1, параметры указывались исходя из предполагаемой сложности зависимости между данными и допустим вычислительных мощностей располагаемых при написании работы, указанные характеристики следуют из реализации моделей в открытых библиотеках для python 3.11.

Таблица 1

*Используемые параметры моделей*

| Модель | Параметры |
|---|---|
| Linear Regression | По умолчанию из библиотеки scikit-learn |
| CatBoost | 200 итераций, глубина = 6, скорость обучения = 0.1 |
| MLP | Поиск по сетке с вариантами: скрытые слои: (50,25), (100, 50); 2 слоя |

В качестве функции потерь для каждой из модели используется средняя абсолютная ошибка (MAE), задаваемая соотношением (1):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\, y_i - \hat{y}_i \,|, \tag{1}$$

где $n$ — количество всех наблюдений, $y_i$ — истинное значение наблюдения, $\hat{y}_i$ — предсказанное значение.

Данная метрика минимизируется в процессе обучения. Выбор данной метрики обусловлен устойчивостью метрики к выбросам, которые исходя из рис. 1 имеют место в исследуемых данных.

Так же для оценки моделей используется коэффициент детерминации $R^2$ который находится из уравнения (2):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_i)^2}, \tag{2}$$

где $\overline{y}_i$ — среднее значение признака в используемых данных.

Модель CatBoost использует соотношение (3) для обновления вектора значения

$$\hat{y}^{(k)} = \hat{y}^{(k-1)} + \eta + T_k(x), \tag{3}$$

где $\hat{y}_i^{(k)}$ — предсказание для $k$-й итерации, $\eta$ — коэффициент скорости обучения, $T_k(x)$ — результат $k$-го дерева модели.

Для MLP модели соотношение обновления значений подчиняется уравнению (4):

$$h^{(l)} = \sigma(W^{(l)} \cdot h^{(l-1)} + b^{(l)}, \tag{4}$$

где $h^{(l)}$ — результат l-го слоя, $\sigma$ — функция активации Rectified Linear Unit (ReLU), $W^{(l)}$ — матрица весов l-го, $b^{(l)}$ — смещение.

### 3. Обсуждение результатов

Обучение моделей проводилось на домашнем компьютере без использования графических ускорителей, основой вычислительной конфигурации является процессор AMD RyzenX3D 9700. Результаты обучения сведены в табл. 2.

Таблица 2

*Результаты обучения моделей*

| Модель | $R^2$ | MAE |
|---|---|---|
| Linear Regression | 0.312 | 2.34 |
| CatBoost | 0.508 | 1.85 |
| MLP | 0.456 | 1.98 |

Как видно из табл. 2, CatBoost оказался лучшей моделью по обеим рассматриваемым метрикам, более того значение $R^2$ = 0.508 является хорошим показателем для модели.

Для выявления наиболее значимых признаков использовался SHAP-анализ, результаты которого представлены на рис. 5, где по оси абсцисс указано влияние параметра на результат работы модели, по оси ординат проверяемый признак, чем яркие красные признаки являются наиболее значимыми, холодные синие признаки являются наименее значимыми:

Из рис. 5 видно, что модель чувствительна к экономико-социальным факторам больше, чем к исключительно метеорологическим, что подтверждает гипотезу о значимости внутреннего валового продукта в регионе, где происходит опасное явление.

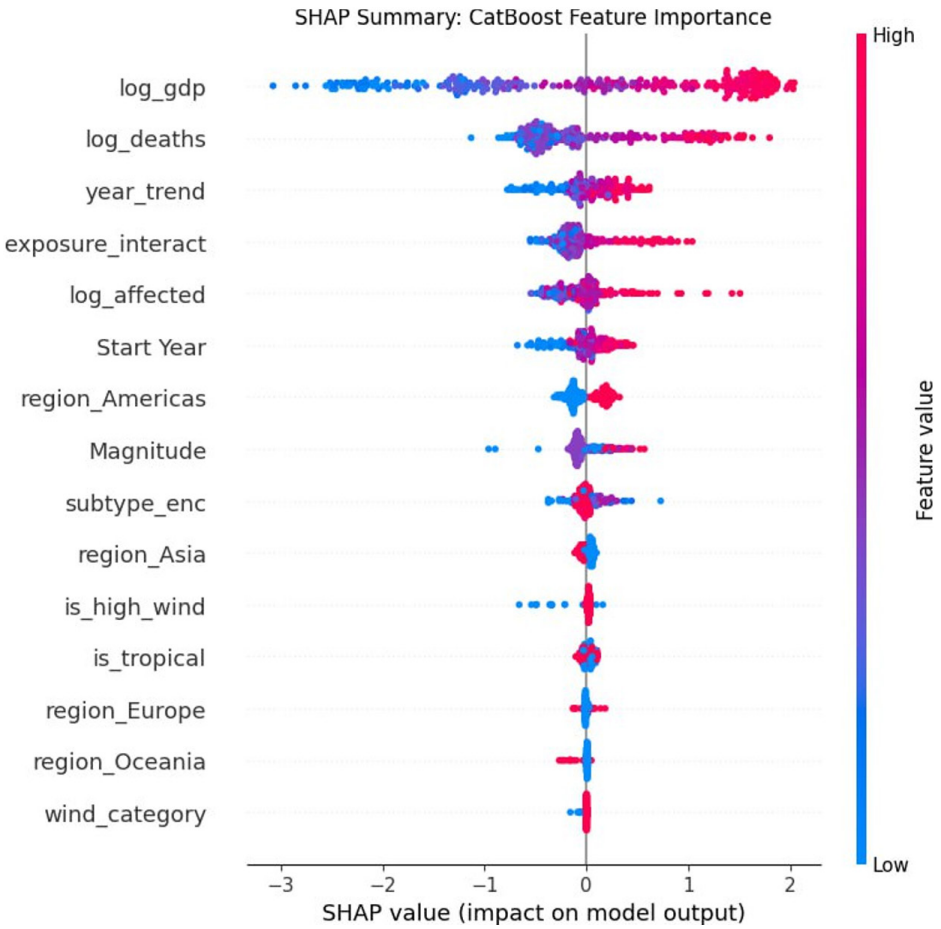



*Рис. 5. Корреляционная матрица исследуемых признаков приведённых в логарифмический масштаб*

## Заключение

Предложенная модель машинного обучения достигла значений $R^2$ = 0.508 и MAE = 1.85, что превосходит модель принятую за базовую. Установлено, что среди исследуемых моделей для данной задачи модель CatBoost является лучшей моделью с большим выигрышем относительно рассматриваемых метрик. Разработана программа для использования обученной модели в дальнейших прогнозах. SHAP-анализ показал большой вклад экономических показателей в результат работы моделей.

## Литература

1. EM-DAT – The international disaster database [Электронный ресурс] / Centre for Research on the Epidemiology of Disasters (CRED), UCLouvain. – Режим доступа: https://www.emdat.be/ (дата обращения: 13.11.2025).

2. Разработка цифрового двойника тропического циклона по упрощённой модели / А. В. Калач, А. А. Парамонов, А. Л. Шкерин [и др.] // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 02–04 декабря 2024 года. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2025. – С. 552–555. – EDN GONVCP.

3. GDP per capita, PPP (current international $) [Электронный ресурс] / World Bank. – Режим доступа: https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.PP.CD. (дата обращения: 13.11.2025).

4. *Постернак Е. В.* Методика обоснования объемов инженерно-технических мероприятий при краткосрочном прогнозе ущерба от природных чрезвычайных ситуаций с учетом социально-демографических факторов: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 3.2.6 / Е. В. Постернак. – [Б. м.], [б. г.]. – [24].

5. *Озерова Н. А.* Исследование особенностей эволюции тропических циклонов, влияющих на погоду Дальнего Востока России / Н. А. Озерова ; под науч. рук. О. Г. Анискина // Сборник материалов участников XIX Большого географического фестиваля. – Санкт-Петербург : Свое издательство, 2023. – С. 300–304.

6. *Ермакова О. С.* База данных спутниковых снимков тропических циклонов в сезоны ураганов 2017–2020 гг. / О. С. Ермакова, Н. С. Русаков, Е. И. Поплавский, Д. А. Сергеев, Ю. И. Троицкая // Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук. – 2022.

7. *Юровская М. В.* Набор данных о ветре и волнении для изучения тропических циклонов / М. В. Юровская // Морской гидрофизический журнал. – 2023. – Т. 39, № 2 (230). – С. 220–233.

8. *Калач А. В.* Оценка опасности зон структуры тропических циклонов на основе почти периодического анализа / А. В. Калач, А. А. Парамонов, А. Л. Шкерин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2025. – № 2. – С. 16–28. – DOI 10.17308/sait/1995-5499/2025/2/16-28. – EDN MOBDQZ.

УДК 550.388.2

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕЛКОМАСШТАБНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ НА ФРОНТАХ ПЛАЗМЕННЫХ ПУЗЫРЕЙ

**Н. М. Кащенко, С. А. Ишанов, Е. В. Зубков, А. В. Шоть**

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта*

**Аннотация.** Представлены результаты численных расчетов динамики мелкомасштабных неустойчивостей, возникающих в областях развитых экваториальных плазменных пузырей ионосферы Земли. Исследование проведено на основе решения уравнений для возмущений потенциала электрического поля, электронной концентрации и температуры ионов и электронов. В качестве фоновых значений использовалось численное решение уравнений авторской двумерной модели неустойчивости Релея — Тейлора в низкоширотной ионосфере. На основе построенной модели возмущений проведена серия численных экспериментов для области, соответствующей верхней части развитых плазменных пузырей. Численные эксперименты использовались для модельного вычисления инкремента мелкомасштабных неустойчивостей градиентного типа. В модели применено приближение сильной вытянутости экваториальных плазменных пузырей вдоль силовых линий геомагнитного поля Земли. В отличие от предыдущих работ автора, в модели присутствуют уравнения ионной и электронной температур, учтены градиенты фоновой электронной концентрации, изменена методика модельной оценки инкремента мелкомасштабной неустойчивости, а целью данной работы было исследование температурных особенностей мелкомасштабных неустойчивостей для верхней части плазменных пузырей..
**Ключевые слова:** мелкомасштабные неустойчивости, инкремент неустойчивости, F-рассеяние, неустойчивость Релея — Тейлора, ионосферные плазменные пузыри.

## Введение

Актуальность изучения возмущений, возникающих в ионосфере Земли, обусловлена важными прикладными аспектами, а именно, существенным влиянием на качество спутниковой связи и спутниковых радионавигационных систем флуктуаций фаз и амплитуд принимаемых сигналов (мерцания), вызванных рассеянием и дифракцией электромагнитных волн на мелкомасштабных неоднородностях ионосферы (явление F-рассеяния). Как известно [1–6], явление экваториального F-рассеяния связано процессами развития плазменных пузырей в низкоширотной ионосфере Земли и дальнейшем развитии мелкомасштабных неоднородностей вследствие неустойчивостей градиентного типа в областях значительных градиентов на фронтах плазменных пузырей. В частности, в этих работах описаны особенности внешнего F-рассеяния, распределение вероятности наблюдения частотного F-рассеяния для зимнего солнцестояния, суточные, широтные и долготные вариации вероятности появления F-рассеяния в разных условиях.

В данной статье представлены результаты численного моделирования параметров неустойчивостей градиентного типа [7–9] на границах ионосферных пузырей, вышедших во внешнюю ионосферу на высотах порядка 600–800 км. Модель неустойчивости Рэлея — Тейлора [10] использована для получения пространственно-временного распределения параметров плазменных пузырей. Двухэтапный подход позволяет заметно уменьшить вычислительные затраты по сравнению с прямым трехмерным подходом, что дает возможность проведения обширных вычислительных экспериментов при высоком пространственно-временном разрешении.

## 1. Математическая модель

Математическую основу численной модели составляет система уравнений, состоящая из уравнения непрерывности ионов и электронов (использованы ионы $O^+$, $H^+$, $NO^+$), уравнения потенциальности электрического поля, уравнения непрерывности электрического тока (1) и уравнения теплопроводности (3) в двумерном приближении [3, 7–10]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla(n_j \vec{V}_j) = Q_j - L_j \\ \vec{E} = -\nabla\phi \\ \nabla\vec{J} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $j$ — сорт заряженных частиц, и электронов; $\vec{V}_j$ — вектор дрейфовой скорости; $Q_j, L_j$ — скорости образования и потерь ионов; $n_j$ — концентрация частиц сорта $j$; $\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\vec{J}$ — вектор плотности электрического тока, $\phi$ — потенциал электрического поля.

В области исследования, находящейся в интервале высот от 550 км до 850 км в силу сильной замагниченности ионосферной плазмы процессы переноса ионов вдоль магнитного поля, будут определяться столкновениями, а поперек поля — дрейфовым движением плазмы, поэтому выполнено условие:

$$\nabla\vec{V}_j = 0. \tag{2}$$

Уравнения теплопроводности имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} n_i k \dfrac{dT_i}{dt} + kT_i n_i \nabla\vec{V}_i = P_i^y + J_i \\ \dfrac{3}{2} n_e k \dfrac{dT_e}{dt} + kT_e n_e \nabla\vec{V}_e = P_e^y \end{cases} \tag{3}$$

где $T_i, T_e$ — температуры ионов и электронов, $P_i^y$ — скорость теплообмена между ионами и другими частицами, $P_e^y$ — скорость теплообмена между электронами и другими частицами, $J_i$ — джоулев нагрев ионного газа, $k$ — постоянная Больцмана. Скорости теплообмена и джоулев нагрев заданы так:

$$\begin{cases} P_i^y = \sum\limits_n n_i \dfrac{m_i}{(m_i + m_n)} \nu_{in} \cdot 3k(T_n - T_i) + n_i \nu_{ie} \cdot 3k(T_e - T_i) \\ P_e^y = 3k(T_n - T_e) \cdot \sum\limits_n n_e \dfrac{m_e}{m_n} \nu_{en} + 3k(T_i - T_e) \cdot \sum\limits_i n_e \nu_{ei} \\ J_i = \sigma_P \vec{E}^2 \end{cases} \tag{4}$$

где $m_i, m_n, m_e$ — массы ионов, нейтральных частиц и электронов соответственно, $\nu_{in}$, $\nu_{ie}$, $\nu_{ei}$, $\nu_{en}$ — частоты столкновений, $T_n$ — температура нейтралов, $\sigma_P$ — проводимость Педерсена:

$$\sigma_P = e^2 n_e \left( \frac{\nu_{in}}{m_i(\Omega_i^2 + \nu_{in}^2)} + \frac{\nu_{en}}{m_e(\Omega_e^2 + \nu_{en}^2)} \right), \tag{5}$$

где $\Omega_i, \Omega_e$ — ионная и электронная гирочастоты.

Приведем частоты столкновений частиц с нейтральным кислородом:

$$
\begin{aligned}
&\nu(e,O) = 8.9\cdot 10^{-11}\left(1+0.00057T_e\right)T_e^{1/2}n(O)\\
&\nu\left(O^+,O\right) = 1.6\cdot 10^{-11}\left(T_i+T_n\right)^{1/2}n(O)\\
&\nu\left(NO^+,O\right) = 4.27\cdot 10^{-10}n(O)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В этих выражениях концентрации заданы в (см$^{-3}$), а частоты в (с$^{-1}$). Здесь показаны только существенные на рассматриваемых высотах слагаемые в частотах $\nu_{in}$ и $\nu_{en}$, поскольку основной вклад в частоты столкновений на рассматриваемых высотах вносят столкновения заряженных частиц с атомарным кислородом, а именно, $\nu(e,O)$ и $\nu(O^+,O)$.

Как известно, в указанных выше приближениях уравнение для потенциала электрического поля — следствие 3-го уравнения системы (1) и имеет вид:

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left(\Sigma_p\frac{\partial\phi}{\partial y}+\Sigma_h\frac{\partial\phi}{\partial z}+D_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Sigma_p\frac{\partial\phi}{\partial z}-\Sigma_h\frac{\partial\phi}{\partial y}+D_z\right)=0, \tag{7}
$$

где $\Sigma_p, \Sigma_h$ — интегральные вдоль силовых линий магнитного поля Земли проводимости Педерсена и Холла соответственно, $D_y, D_z$ — источники, определяемые нейтральными ветрами и ускорением земного тяготения.

Поскольку в рассматриваемых условиях плазменных пузырей $T_i$ существенно больше $T_n$, а $T_e$ примерно равно $T_i$, то в работе принято приближение, что проводимость Педерсена пропорциональна квадратному корню из ионной температуры.

В силу выше сказанного в рассматриваемых условиях используем приближения:

– в рассматриваемой области проводимость Холла существенно меньше проводимости Педерсена, поэтому ее не учитываем;

– интегральную проводимость Педерсена считаем пропорциональной электронной концентрации и квадратному корню из ионной температуры.

В работе использована прямоугольная правая система координат (x, y, z):

– x направлена вдоль силовых линий магнитного поля Земли на юг,

– y направлена на восток,

– z направлена вверх.

Для вычисления параметров нейтрального газа использована эмпирическая модель MSIS [11–12]. Начальные значения для модели неустойчивости Рэлея — Тейлора получены решением низкоширотной модели ионосферы. В дальнейшем распределение концентраций, скоростей дрейфа и потенциала полученных решением уравнений неустойчивости Рэлея — Тейлора будем называть фоновыми.

Модель мелкомасштабных неустойчивостей в перечисленных приближениях получена из уравнений (1)–(7) и является системой уравнений для возмущений. Обозначим:

$$
\begin{cases}
n = N_0 + N\\
\phi = \Phi_0 + \Phi\\
T_i \to T_{i0} + T_i\\
T_e \to T_{e0} + T_e
\end{cases}, \tag{8}
$$

где $N_0$, $\Phi_0$, $T_{i0}$, $T_{e0}$ — невозмущенные концентрация электронов и потенциал электрического поля, $N$, $\Phi$, $T_i$, $T_e$ — возмущения концентрации электронов, потенциала электрического поля, ионной и электронной температур. Через $V_{0y}$ и $V_{0z}$ обозначим невозмущенные скорости поперечного дрейфа, через $\nu_r$ — скорость рекомбинации электронов. $N_0$, $\Phi_0$, $T_{i0}$, $T_{e0}$, $V_{0y}$, $V_{0z}$ получены из решения модели неустойчивости Рэлея — Тейлора. Потенциал $\Phi_0$ и его возмущение $\Phi$ обезразмерим делением на индукцию магнитного поля $B$.

С учетом сделанных обозначений уравнение непрерывности для возмущения $N$ примет вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+V_{0y}\frac{\partial N}{\partial y}+V_{0z}\frac{\partial N}{\partial z}+\nu_r N+L_z\frac{\partial \Phi}{\partial y}-L_y\frac{\partial \Phi}{\partial z}=-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial N}{\partial y} \tag{9}$$

уравнение для возмущения ионной температуры примет вид:

$$\frac{dT_i}{dt}=-A_{in}T_i+C_{in}(\vec{E}\cdot\vec{E}_0+\vec{E}\cdot\vec{E}), \tag{10}$$

где $A_{in}$ и $C_{in}$ — переобозначенные коэффициенты из уравнений (3), а из уравнения (7) получим уравнение для возмущения потенциала:

$$\left(1+\frac{N}{N_0}+\frac{T_i}{2T_{i0}}\right)\Delta\Phi=-\frac{V_{0y}}{N_0}\frac{\partial N}{\partial z}+\frac{V_{0z}}{N_0}\frac{\partial N}{\partial y}-\left(L_y+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T_i}{2T_{i0}}\right)\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\left(L_z+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T_i}{2T_{i0}}\right)\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z}-$$
$$-\frac{1}{N_0}\left(\frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \tag{11}$$

где $V_{0y}=\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}$, $V_{0z}=-\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}$ — скорости поперечного дрейфа, $L_y=\frac{\partial \ln(N_0)}{\partial y}$, $L_z=\frac{\partial \ln(N_0)}{\partial z}$ — градиенты фонового распределения электронной концентрации.

## 2. Особенности численных методов

Двумерные уравнения модели неустойчивости Релея — Тейлора решались в экваториальной плоскости, область решения ограниченна задавалась так: $(y,z)\in[100\text{ км};1700\text{ км}]\times$ $\times[-250\text{ км};250\text{ км}]$. Такой выбор области интегрирования обусловлен уменьшением влияния граничных условий на моделируемые процессы. Гелио-геомагнитные условия выбраны со средними значениями: $F_{10.7}=150$ и $k_p=3$.

Для потенциала электрического поля в качестве граничного условия задана восточная компонента равная 1 мВ/м, что соответствует характерным условиям исследуемых процессов. На нижней границе области заданы условия химического равновесия, а на верхней границе и боковых границах — условие равенства нулю потоков.

Для модели мелкомасштабной неустойчивости (9)–(11) область интегрирования задана так: $(y,z)\in[550\text{ км};850\text{ км}]\times[-20\text{ км};20\text{ км}]$. Граничные условия для возмущений заданы нулевыми. Начальные неоднородности возмущения задавались модельно в овале с полуразмерами $r_y=3$ км, $r_z=30$ км и амплитудой возмущения концентрации $N_1$.

Уравнения модели (9)–(11) решались численно конечноразностными методами на прямоугольных равномерных сетках, с шагами равными 0.04 км по переменной $y$ и 0.05 км по координате $z$. Использованы конечно-разностные методы второго порядка точности. Двумерные уравнения переноса концентрации и ионной температуры (9)–(10) решаются по схеме расщепления, для решения одномерных уравнений схемы расщепления выбран монотонный метод (Z-схема) с нелинейной коррекцией потоков [13–14]. Для решения уравнения потенциала (11) электрического поля применен метод четно-нечетной редукции с итерациями по правой части уравнения.

## 3. Результаты численных экспериментов

Численная модель мелкомасштабной неустойчивости (9)–(11) была использована для нахождения пространственно-временных параметров возмущений и оценки, на основе полученных распределений, инкрементов неустойчивости.

На рис. 1 приведено распределение электронной концентрации, полученное по модели неустойчивости Релея — Тейлора для момента времени 3520 с от момента инициализации. Прямоугольником на рисунке выделена область решения уравнений модели неустойчивости (9)–(11).

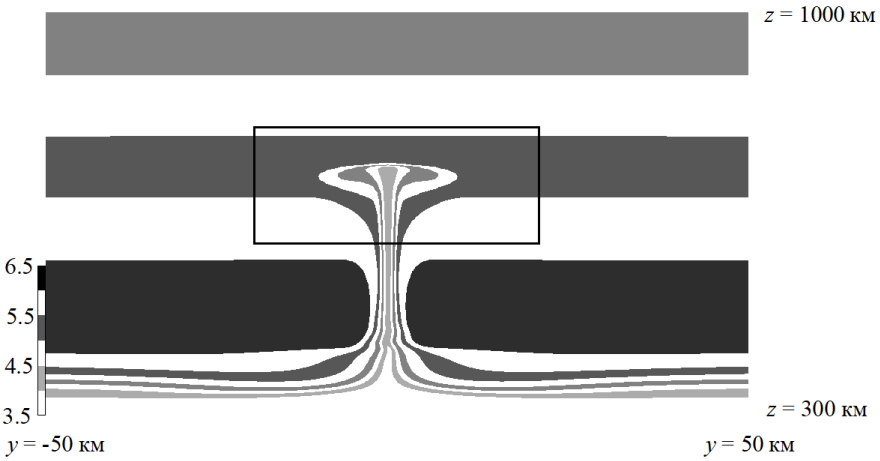



*Рис. 1. Распределение* $\lg(N_0)$*, вычисленное по модели неустойчивости Релея — Тейлора для момента времени 3520 с от момента инициализации*

Для численной оценки инкремента неустойчивости использовался следующий подход: начальное возмущение для электронной концентрации $N_e$ задавалось в виде суммы гармоник вида:

$$A_k \cos\left(k_{yk}\left(y-y_h\right)+k_{zk}\left(z-z_h\right)+\varphi_k\right), \tag{12}$$

где $A_k, k_{yk}, k_{zk}, \varphi_k$ — заданы генератором псевдослучайных чисел.

На рис. 2 показано начальное возмущение концентрации $N_e$, полученное этим алгоритмом. Начальные значения для потенциала $\Phi$ и температуры ионов $T_i$ заданы равными нулю. Показана часть области решения, соответствующая координатам $z \in [640 \text{ км}; 820 \text{ км}]$, $y \in [-8 \text{ км}; 8 \text{ км}]$. Белый цвет соответствует значению $N \geq 150$, черный цвет соответствует значению $N \leq -150$, градации серого цвета соответствуют промежуточным значениям.

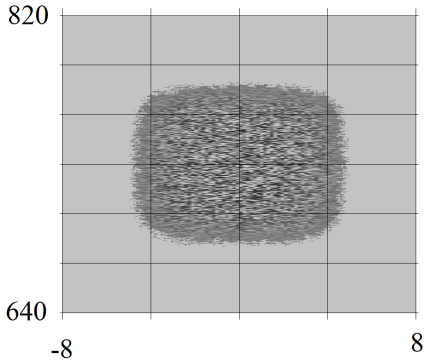


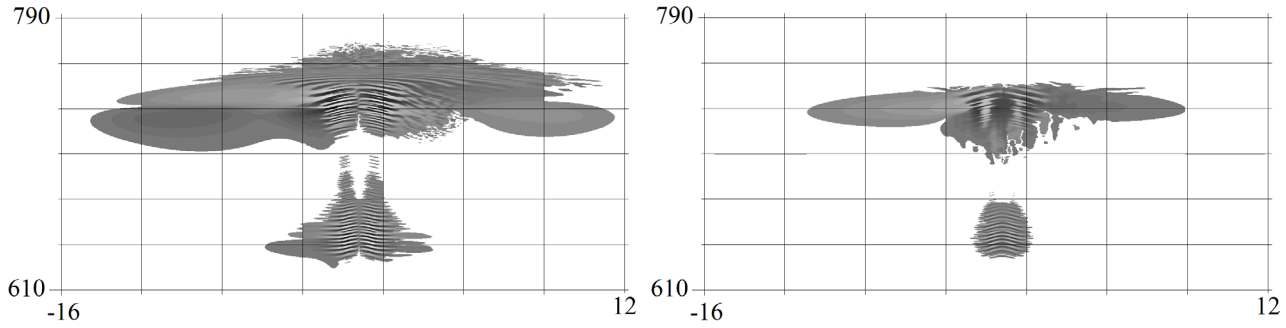

*Рис. 2. Начальное возмущение концентрации* $N_e$

На рис. 3*а* и 3*б* показано распределение электронной концентрации $N_e$ и ионной температуры $T_i$ полученное решением уравнений модели (9)–(11) для момента 36 с от момента возмущения. Центр начального возмущения был задан координатами (0 км; 730 км).

На рис. 4*а* и 4*б* показано распределение электронной концентрации $N_e$ и ионной температуры $T_i$ полученное решением уравнений модели (9)–(11) для момента 36 с от момента возмущения. Центр начального возмущения в этих расчетах был задан координатами (6 км; 730 км).

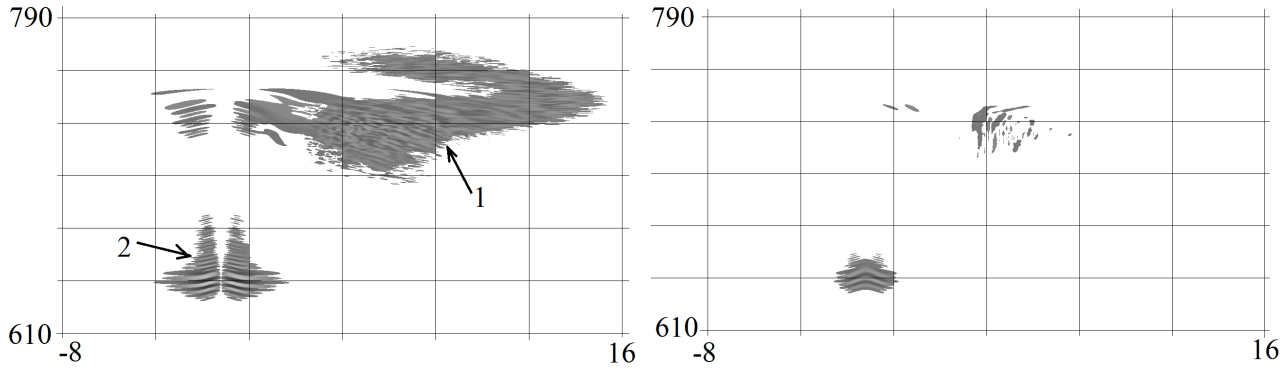
Результаты вычислений для разных координат центра возмущения показаны в табл. 1 и на рис. 5.

Отрицательное значение в табл. 1 соответствует убыванию среднеквадратичного значения возмущения, для данных вычислений это объясняется тем, что область начального возмущения вышла за границы плазменного пузыря.




*а)* *б)*

*Рис. 3. а) Распределение возмущения $N_e$ для момента модельного времени 36 с.*
*б) Распределение возмущения $T_i$ для момента модельного времени 36 с.*
*Координаты центра начального возмущения — (0 км; 730 км)*




*а)* *б)*

*Рис. 4. а) Распределение возмущения $N_e$ для момента модельного времени 36 с.*
*б) Распределение возмущения $T_i$ для момента модельного времени 36 с.*
*Координаты центра возмущения — (6 км; 730 км)*

Таблица 1

*Значения $\gamma^{-1}$, с, в зависимости от координаты $y_0$, км, центра возмущения*

| $y_0$ | 0 км | 3 км | 6 км | 9 км | 12 км | 15 км | 18 км | 21 км | 0 км, без $T_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma^{-1}$, с | 8.40 с | 7.93 с | 8.25 с | 16.61 с | 8.83 с | 7.68 с | 8.75 с | –65.12 с | 7.78 с |

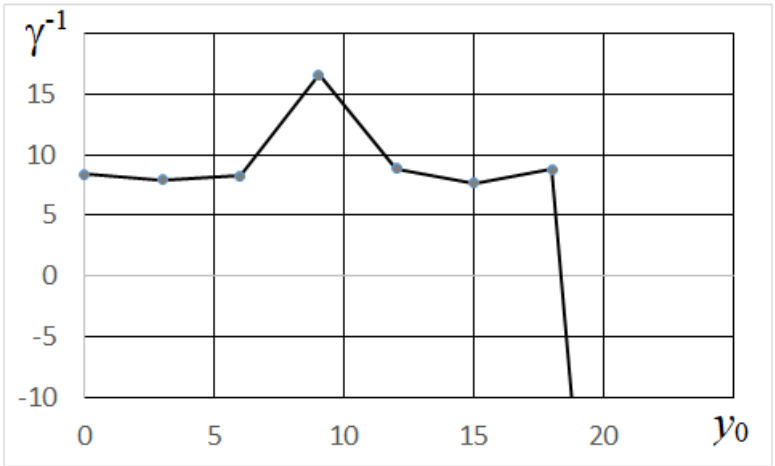



*Рис. 5. Значения $\gamma^{-1}$ в зависимости от координаты $y_0$ центра возмущения*

## Заключение

Данная работа является продолжением и развитием работ авторов [7–10]. В отличие от этих работ, целью являлось исследование температурных особенностей рассматриваемых процессов, в модели потенциала учтены градиенты температуры, изменена методика модельной оценки инкремента мелкомасштабной неустойчивости.

Приведенные результаты численных экспериментов показали, что для рассматриваемых условий учет температуры ионов качественно не изменил результаты, количественное изменение при этом составило от 10 % до 30 % в основном в сторону увеличения обратных значений инкремента. При этом возмущение температурного поля в основном повторяет возмущения электронной концентрации, что объясняется наличием джоулева нагрева в уравнении (10).

Численные эксперименты показали также, что в этой модели происходит «отбор» гармоник возмущения с волновыми числами, для которых инкремент близок к максимальным значениям.

Еще одной особенностью в рассмотренных экспериментах является генерация возмущения в области, для которой начальное возмущение было равно нулю, что на рис. 4А показано стрелочкой 2 и которое появляется по истечении времени примерно 3 $\gamma^{-1}$. Это происходит вследствие нелокальности потенциала.

Наряду с описанными численными экспериментами был выполнен также эксперимент по изучению возможности инициализации возмущения заданием возмущения в распределении температуры. Этот эксперимент показал, что для появления значимого возмущения электронной концентрации необходимо значительное по сравнению с рассматриваемыми процессами время, порядка 200 с.

Также, как и в предыдущих работах авторов, получены большие значения инкремента, гораздо больше инкремента дрейфово-диссипативной неустойчивости и сравнимые с инкрементом неустойчивости Кельвина — Гельмгольца во внешней ионосфере, полученном в работе [15].

Представленные выше результаты численных экспериментов, позволяют сделать следующие выводы:

1. Возмущения электронной концентрации вследствие джоулева нагрева приводят к генерации возмущения ионной а, следовательно, и электронной температуры, по структуре сходных с возмущениями $N_e$.

2. Особенностью в рассмотренных экспериментах является генерация возмущения в области, для которой начальное возмущение было равно нулю, что происходит вследствие нелокальности потенциала.

3. Градиенты электронной концентрации и скорости дрейфового переноса в верхней части развитых ионосферных плазменных пузырей могут быть эффективным механизмом усиления мелкомасштабных неоднородностей плазмы.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 25-21-00107.

## Литература

1. *Панченко В. А., Телегин В. А., Воробьев В. Г., Жбанков Г. А., Ягодкина О. И., Рождественская В. И.* F-рассеяние в среднеширотной ионосфере по данным ионозонда DPS-4 // Геомагнетизм и аэрономия. – 2018. – Т. 58, № 2. – С. 241–249.

2. *Reinisch B. W., Abdu M., Batista I., Sales G. S., Khmyrov G., Bullett T. A., Chau J., Rios V.* Multistation digisonde observations of equatorial spread in South America // Ann. Geophys. – 2004. – V. 22. – P. 3145.

3. *Гершман Б. Н.* Динамика ионосферной плазмы. – М. : Наука, 1974.

4. *Гдалевич Г. Л., Депуева А. Х., Ижовкина Н. И., Озеров В. Д.* Неустойчивые плазменные неоднородные структуры в верхней ионосфере и f-рассеяние // Геомагнетизм и аэрономия. – 2010. – Т. 50, № 1. – С. 72–81.

5. *Tulasi Ram S. [et al.]* Vertical rise velocity of equatorial plasma bubbles estimated from Equatorial Atmosphere Radar (EAR) observations and HIRB model simulations // Ibid. – June 2017. – Vol. 122(6). – P. 6584–6594.

6. *Yokoyama T., Shinagawa H., Jin H.* Nonlinear growth, bifurcation, and pinching of equatorial plasma bubble simulated by three-dimensional high-resolution bubble model // Ibid. — 2014. – Vol. 119(12). – P. 10,474–10,482.

7. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Зубков Е. В., Зинин Л. В.* Исследование градиентно-дрейфовой неустойчивости в области развитых экваториальных плазменных пузырей // Математическое моделирование. – 2024. – Т. 36, № 3. – С. 87–95.

8. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Зубков Е. В., Квитко Г. В.* Численное исследование дрейфово-диссипативной неустойчивости в области экваториальных плазменных пузырей для разных геофизических условий // ЖВМиМФ. – 2025. – Т. 65, № 4. – С. 548–557.

9. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Зубков Е. В., Ставицкая Е. П.* Численное исследование неустойчивости дрейфового типа в области верхнего фронта экваториальных плазменных пузырей. // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 2-4 декабря 2024 г. – Воронеж, 2025. – С. 556–561.

10. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Мациевский С. В.* Развитие неустойчивости Рэлея — Тейлора в экваториальной ионосфере и геометрия начальной неоднородности // Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30(9). – С. 21–32.

11. *Hedin A. E., Salah J. E., Evans J. E. [et al.]* A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data MSIS 1. N2 density and temperature // J. Geophys. Res. – 1977. – V. 82(A1). – P. 2139–2147.

12. *Hedin A. E., Reber C. A., Newton G. P. [et al.]* A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data MSIS 2. Composition // Ibid. – P. 2148–2156.

13. *Сафронов А. В.* Оценка точности и сравнительный анализ разностных схем сквозного счета повышенного порядка // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11(1). – С. 137–143.

14. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Зинин Л. В., Мациевский С. В.* Численный метод решения двумерного уравнения переноса при моделировании ионосферы Земли на основе монотонизированной Z-схемы // Компьютерные исследования и моделирование. – 2020. – 12 (1). – С. 43–58.

15. *Суковатов Ю. А.* Теоретическое исследование неустойчивости Кельвина — Гельмгольца во внешней ионосфере // Известия АлтГУ. – 2012. – № 1-1. – С. 219–221.

УДК 004.932.2

# РЕАЛИЗАЦИЯ И СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ВИЗУАЛЬНОЙ ОДОМЕТРИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МОБИЛЬНОГО ОБЪЕКТА

**Е. С. Кенина, С. Н. Медведев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье предлагается алгоритм оценки относительного перемещения мобильного объекта на основе визуальной одометрии путем анализа пар последовательных кадров видеопотока. Рассматриваются бинарные детекторы ключевых точек ORB, BRISK и AKAZE. Алгоритм включает этапы обнаружения особенностей, сопоставления с фильтрацией Lowe's Ratio Test и RANSAC, а также извлечение параметров движения (смещение, поворот, масштаб) из матрицы гомографии. Экспериментальный анализ на тестовых изображениях выявил оптимальность ORB для задач реального времени. Результаты подтверждают эффективность подхода для автономных мобильных платформ.
**Ключевые слова:** визуальная одометрия, ключевые точки, ORB, BRISK, AKAZE, матрица гомографии, RANSAC, мобильные объекты, бинарные дескрипторы, позиционирование.

## Введение

В последнее десятилетие наблюдается стремительный рост применения мобильных робототехнических платформ и беспилотных летательных аппаратов в различных сферах: от мониторинга промышленных объектов и сельского хозяйства до логистики. Фундаментальной задачей для автономного функционирования подобных мобильных объектов является позиционирование, то есть определение положения объекта в пространстве.

Для решения задачи позиционирования могут быть использованы методы визуальной одометрии — оценки движения объекта путем анализа последовательности изображений, поступающих с его камеры. Цифровые изображения содержат огромный объем информации о структуре окружающей среды, в связи с чем анализ смещения характерных текстурных признаков между последовательными кадрами может позволить восстановить траекторию движения камеры. Однако обработка видеопотока требует значительных вычислительных ресурсов, что является ограничивающим фактором для компактных объектов. Следовательно, возникает необходимость разработки и исследования алгоритмов, которые обеспечивали бы баланс между точностью позиционирования и вычислительной эффективностью.

Целью данной работы является разработка программного алгоритма для оценки относительного перемещения мобильного объекта на основе анализа пар последовательных кадров видеопотока.

## 1. Постановка и анализ задачи

Сформулируем задачу следующим образом. Пусть в моменты времени $t-1$ и $t$ с камеры получено два изображения $I_{prev}$ (рис. 1а) и $I_{curr}$ (рис. 1б) соответственно. Предполагается, что сцена является статической, а изменения на изображении вызваны исключительно движением камеры. Необходимо определить параметры геометрического преобразования, переводящего точки изображения $I_{prev}$ в $I_{curr}$.

Искомыми параметрами движения являются:

1. Вектор смещения $(\Delta x, \Delta y)$, характеризующий сдвиг объекта в плоскости кадра.
2. Угол поворота $\Delta\theta$, характеризующий вращение камеры вокруг оптической оси.

*а* *б*

*Рис. 1. Изображения, полученные с камеры мобильного объекта*

3. Коэффициент масштабирования $S$, характеризующий изменение дистанции до объектов сцены (приближение/удаление).

Для решения поставленной задачи необходимо реализовать алгоритм, включающий следующие этапы:

1. Автоматическое обнаружение на изображениях информативных локальных особенностей (ключевых точек) и формирование компактного математического описания для каждой найденной точки.

2. Поиск соответствий (пар точек) между кадрами $I_{prev}$ и $I_{curr}$.

3. Вычисление матрицы гомографии $H$, описывающей преобразование плоскости, и извлечение физических параметров движения.

Поскольку ключевым требованием к разрабатываемой системе является скорость работы, необходимо провести сравнительный анализ эффективности использования различных детекторов и дескрипторов. В данной работе будут рассмотрены три алгоритма:

– ORB (Oriented FAST and Rotated BRIEF) [1];

– AKAZE (Accelerated KAZE) [2];

– BRISK (Binary Robust Invariant Scalable Keypoints) [3].

Выбор именно этих алгоритмов обусловлен их принадлежностью к классу методов с бинарными дескрипторами, которые позволяют достичь более высокой скорости сопоставления по сравнению с классическими методами (SIFT [4] или SURF [5]). Путем сравнительного анализа результатов тестирования будет выбран оптимальный метод для использования в системе управления мобильным объектом.

## 2. Предлагаемый подход

Задача определения перемещения мобильного объекта решается путем анализа видеопотока. В данной работе рассматривается базовый алгоритм, который принимает на вход два последовательных изображения (кадра видео) и вычисляет геометрическое преобразование между ними.

### *2.1. Выявление и описание особенностей*

Рассмотрим первый этап предлагаемого алгоритма, идея которого заключается в поиске на изображениях уникальных точек (углов, перепадов яркости) и создании их описаний (дескрипторов). Для работы системы в реальном времени критически важна скорость, поэтому вместо классических ресурсоемких алгоритмов SIFT и SURF, использующих операции с плавающей точкой, в данной работе применяются методы, основанные на бинарных дескрипторах: ORB, BRISK и AKAZE.

### *2.1.1. Алгоритм ORB*

Алгоритм ORB (Oriented FAST and Rotated BRIEF) объединяет детектор точек FAST и дескриптор BRIEF.

Чтобы определить, является ли пиксель $p$ ключевой точкой, алгоритм анализирует его окрестность. Для этого используется окружность Брезенхэма радиуса 3. Пиксель $p$ с интенсивностью (яркостью) $I_p$ считается ключевой точкой, если существует последовательность из $N$ (обычно $N = 12$) подряд идущих пикселей на этой окружности, которые все либо значительно светлее, либо значительно темнее центра. Формально условие записывается так:

$$\left|I_x - I_p\right| > t, \tag{2.1}$$

где $I_x$ — яркость пикселя на окружности, а $t$ — пороговое значение контраста.

Чтобы алгоритм узнал точку даже в случае поворота камеры, необходимо вычислить угол ориентации точки. Для этого используется метод центроида интенсивности. Сначала вычисляются моменты изображения $m_{pq}$ для окрестности точки (взвешенные суммы яркостей):

$$m_{pq} = \sum_{x,y} x^p y^q I(x, y), \tag{2.2}$$

где $I(x, y)$ — яркость пикселя в окрестности точки $p$;

$x, y$ — координаты внутри окрестности относительно центра $p$;

$m, n$ — порядки момента вдоль осей $x$ и $y$.

Затем находится «центр тяжести» (центроид) яркости $C$:

$$C = \left( \frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}} \right). \tag{2.3}$$

Угол ориентации $\theta$ определяется как направление вектора от геометрического центра к центроиду яркости:

$$\theta = \operatorname{arctg} 2(C_y, C_x), \tag{2.4}$$

где $\operatorname{arctg} 2(C_y, C_x)$ — функция арктангенса в четырех квадрантах, возвращающая значение в диапазоне $(-\pi, \pi]$ с учетом знаков $C_x$ и $C_y$.

Дескриптор ключевой точки представляет собой бинарную строку (набор нулей и единиц), описывающую окрестность этой точки. Для формирования дескриптора фиксируется набор, состоящий из $N$ пар точек $(a_i, b_i)$ вокруг центра $p$ (обычно $N = 256$). Каждая пара точек поворачивается на угол ориентации $\theta$, чтобы сделать дескриптор устойчивым к вращению. Затем для каждой пары $(a_i, b_i)$ сравниваются яркости соответствующих пикселей, и бит дескриптора $D_i$ принимает значение:

$$D_i = \begin{cases} 1, \text{ если } I(a) < I(b) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \tag{2.5}$$

В результате получается вектор $D = [D_1, D_2, \ldots D_N]$ — уникальный код точки, устойчивый к изменениям освещения и поворотам.

### *2.1.2. Алгоритм BRISK (Binary Robust Invariant Scalable Keypoints)*

Алгоритм BRISK также является бинарным, но использует более сложную схему выбора точек. Для поиска ключевых точек используется масштабное пространство (пирамида изображений), что позволяет находить объекты разного размера. При построении дескриптора используется паттерн из концентрических колец. Выбираются пары точек: «длинные пары» (далеко друг от друга) используются для определения ориентации, «короткие пары» (близко друг к другу) — для формирования бинарного кода по формуле, аналогичной BRIEF (2.5).

### *2.1.3. Алгоритм AKAZE (Accelerated KAZE)*

В отличие от ORB и BRISK, которые работают с гауссовым размытием (линейным), AKAZE использует нелинейную диффузию. Идея заключается в том, чтобы размывать изображение для подавления шума, но при этом сохранять четкие границы объектов. Это описывается уравнением нелинейной диффузии:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \text{div}(c(x, y, t) \cdot \nabla L), \tag{2.6}$$

где $L$ — яркость изображения;

$t$ — параметр масштаба (время диффузии);

$\nabla L$ — градиент (скорость изменения) яркости;

div — дивергенция (расхождение потока);

$c(x, y, t)$ — функция проводимости.

Функция проводимости зависит от градиента следующим образом: на участках изображения, где градиент большой (граница объекта), проводимость стремится к нулю и размытие прекращается, что делает AKAZE более точным, но при этом более медленным, чем ORB.

### *2.1.4. Сравнение выбранных алгоритмов с SIFT и SURF*

При использовании алгоритма SIFT или SURF точка описывается вектором из 128 или 64 вещественных чисел (float). Для сравнения таких векторов необходимо вычислять Евклидово расстояние, что требует достаточно большого количества времени.

В отличие от SIFT и SURF, выбранные методы (ORB, AKAZE, BRISK) генерируют бинарные дескрипторы — последовательности нулей и единиц фиксированной длины $L$ (например, 256 бит для ORB). Мерой различия между двумя бинарными дескрипторами $D_1$ и $D_2$ служит расстояние Хэмминга. Математически оно определяется как сумма битов, различающихся в двух векторах, что реализуется через операцию «исключающее ИЛИ» (XOR):

$$d_{\text{Hamming}}(D_1, D_2) = \sum_{i=1}^{L} (D_{1,i} \oplus D_{2,i}), \tag{2.7}$$

где $L$ — длина дескриптора в битах;

$D_{k,i}$ — значение $i$-го бита в $k$-м дескрипторе;

$\oplus$ — логическая операция XOR.

На современных процессорах операция XOR выполняется за один такт, что обеспечивает высокий прирост скорости сопоставления по сравнению с вычислениями с плавающей точкой.

## *2.2. Сопоставление и фильтрация*

На втором этапе предлагаемого алгоритма происходит сопоставление полученных наборов дескрипторов для двух кадров. Используется метод k-ближайших соседей с $k = 2$. Это означает, что для каждой точки первого кадра находятся два самых похожих кандидата на втором кадре. Чтобы отсеять ошибочные совпадения, применяется тест отношения (Lowe's Ratio Test) [4]. Пусть $d_1$ — расстояние Хэмминга до самого лучшего кандидата, а $d_2$ — до второго по похожести. Совпадение считается надежным только в том случае, если:

$$d_1 < T \cdot d_2, \tag{2.8}$$

где $T$ — некоторый коэффициент. Смысл условия заключается в том, что, если лучший кандидат лишь немного лучше второго $(d_1 \approx d_2)$, значит, такую точку лучше отбросить.

### *2.3. Вычисление параметров движения*

Имея набор надежных пар точек, соответствующих одинаковым точкам интереса на двух кадрах, оценим преобразование, связывающее эти кадры. Рассмотрим пару кадров из видеопотока. Преобразование между кадрами описывается матрицей гомографии $H$, которая переводит точки первого изображения в точки второго. Пусть для $j$-го надежного совпадения:

$(x_1^{(j)}, y_1^{(j)})^{\mathrm{T}}$ — координаты точки на первом кадре,

$(x_2^{(j)}, y_2^{(j)})^{\mathrm{T}}$ — координаты соответствующей точки на втором кадре. Тогда:

$$\begin{pmatrix} x_2^{(j)} \\ y_2^{(j)} \\ 1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ y_1^{(j)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } H = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Для исключения выбросов (неверно сопоставленных точек) используется итеративный алгоритм RANSAC [6]. Он выбирает 4 случайные точки, строит гипотезу матрицы, проверяет ее на остальных точках и выбирает ту модель, которая подтверждается наибольшим числом точек.

Из найденной матрицы $H$ извлекаются следующие параметры движения:

1. Смещение. Показывает, насколько сдвинулся кадр по горизонтали и вертикали (элементы последнего столбца матрицы):

$$dx = h_{02}, \quad dy = h_{12} \tag{2.10}$$

2. Масштаб. Показывает удаление или приближение объекта. Вычисляется как средняя длина базисных векторов (первые два столбца матрицы):

$$s_x = \sqrt{h_{00}^2 + h_{01}^2}, \quad s_y = \sqrt{h_{10}^2 + h_{11}^2}, \quad Scale = \frac{s_x + s_y}{2}. \tag{2.11}$$

Если $Scale > 1$, камера приблизилась к объектам (или объекты увеличились).

3. Поворот. Угол поворота камеры вокруг оптической оси вычисляется через арктангенс элементов первого столбца матрицы:

$$\phi = \operatorname{arctg} 2(h_{10}, h_{00}) \cdot \frac{180}{\pi}, \tag{2.12}$$

где $\operatorname{arctg} 2(h_{10}, h_{00})$ — функция арктангенса в четырех квадрантах. Полученный результат переводится из радиан в градусы для удобства интерпретации.

Таким образом, алгоритм позволяет восстановить траекторию движения мобильного объекта путем анализа изменений в наборах ключевых точек между кадрами.

## 3. Сравнительный анализ результатов тестирования

На основе предложенного алгоритма было разработано программное обеспечение на языке C++. Для оценки эффективности программного обеспечения и сравнительного анализа детекторов (ORB, AKAZE, BRISK) была проведена серия экспериментов. Тестирование выполнялось на наборе пар изображений, моделирующих следующие маневры мобильного объекта: линейное перемещение, изменение высоты (масштабирование) и вращение вокруг вертикальной оси.

В качестве входных данных использовались изображения разрешения $800 \times 460$ пикселей. Оценивались следующие показатели:

1. Количество обнаруженных ключевых точек. Показывает чувствительность детектора.

2. Количество верных совпадений. Число пар точек, прошедших проверку алгоритмом RANSAC, что характеризует надежность алгоритма.

3. Время обработки. Суммарное время на детекцию, описание и сопоставление (критично для задач реального времени).

4. Точность оценки движения: отклонение вычисленных значений смещения, поворота и масштаба от эталонных.

В ходе тестирования реализованные алгоритмы показали особенности, обусловленные их математическими основами. Усредненные результаты испытаний представлены в табл. 1.

Таблица 1

*Сравнительные характеристики алгоритмов*

| Алгоритм | Среднее кол-во точек | Процент верных совпадений | Среднее время (мс) | Устойчивость к размытию |
|---|---|---|---|---|
| ORB | 500 | 65–75 % | 12–18 | Низкая |
| BRISK | 900 | 55–65 % | 25–35 | Средняя |
| AKAZE | 400 | 80–90 % | 60–90 | Высокая |

Алгоритм ORB продемонстрировал максимальную производительность. Использование детектора FAST позволяет находить особенности за минимальное время. Однако было замечено, что ORB склонен к «кластеризации» точек — нахождению множества особенностей в одной контрастной области, игнорируя другие части кадра. Это может снижать точность вычисления матрицы гомографии, если точки распределены неравномерно. Тем не менее, для задач навигации, где важна частота обновления данных (FPS), ORB является предпочтительным кандидатом.

Алгоритм BRISK показал промежуточный результат по скорости. Благодаря масштабно-инвариантному детектору AGAST и специфическому паттерну выборки (концентрические кольца), он генерирует большое количество точек. Эксперименты показали, что BRISK лучше справляется со значительными изменениями масштаба (например, при резком снижении объекта), чем ORB, но уступает ему в скорости на 40–50 %.

Алгоритм AKAZE продемонстрировал наилучшее качество сопоставления. Высокий процент верных совпадений (до 90 %) объясняется использованием нелинейной диффузии, которая сохраняет границы объектов четкими даже при изменении масштаба. Дескрипторы AKAZE оказались наиболее устойчивыми к сложным условиям (например, наклонным поверхностям). Однако высокая вычислительная сложность построения нелинейного масштабного пространства может сделать его применение затруднительным при обработке видеопотока с высокой частотой.

Программа корректно определяла параметры движения во всех тестовых сценариях при наличии достаточного количества текстурных признаков. Фильтрация методом RANSAC с порогом ошибки 3.0 пикселя успешно отсеивала ложные срабатывания (выбросы).

На рис. 2, 3 и 4 представлены результаты работы программы при использовании алгоритмов ORB (286 совпадений), AKAZE (260 совпадений) и BRISK (1009 совпадений) соответственно.

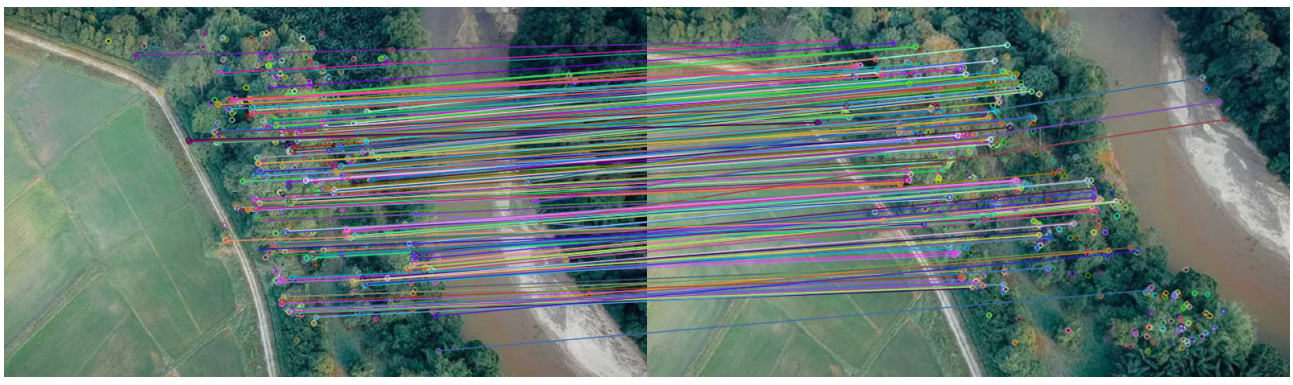


*Рис. 2. Результаты работы программы при использовании алгоритма ORB*

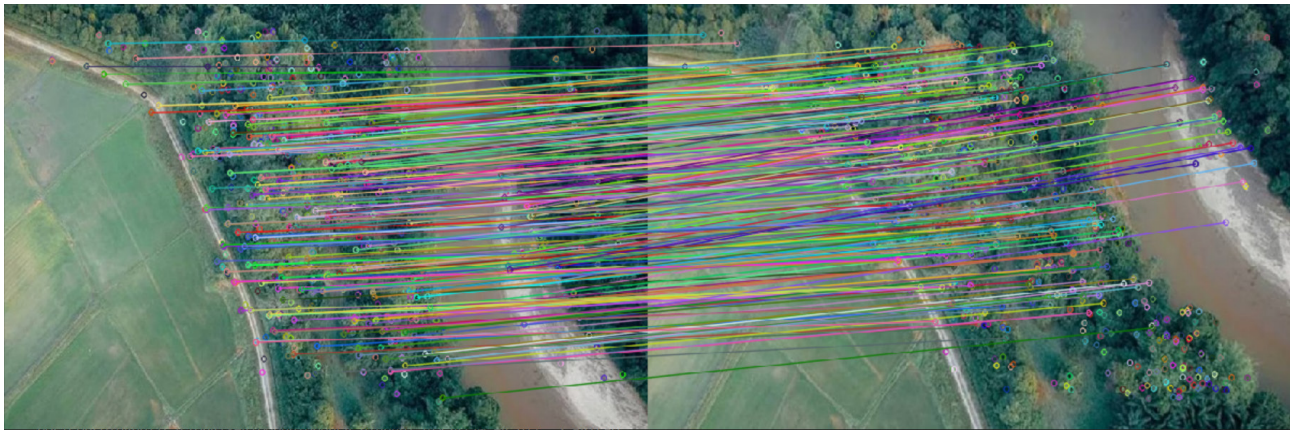


*Рис. 3. Результаты работы программы при использовании алгоритма AKAZE*

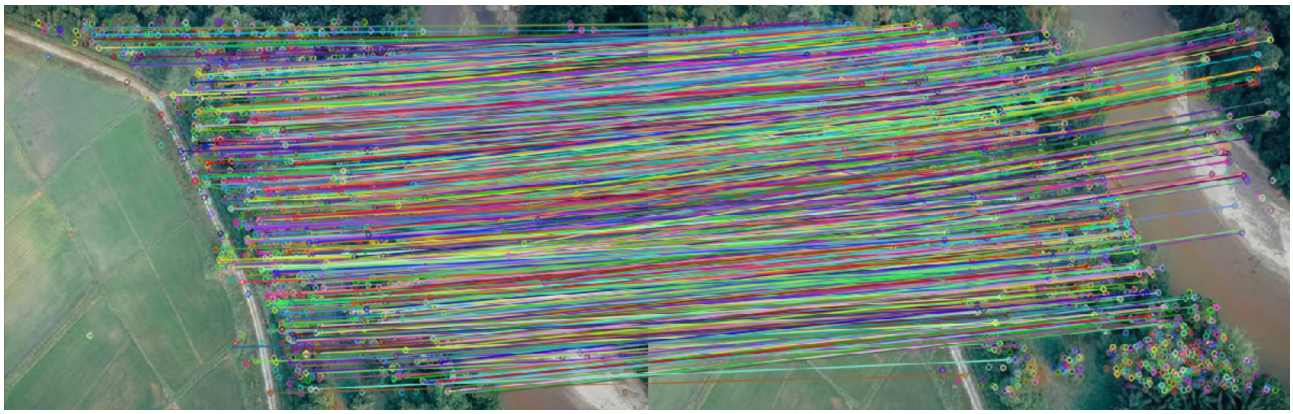


*Рис. 4. Результаты работы программы при использовании алгоритма BRISK*

Вычисленные параметры движения:

1. Вектор смещения: (–85.6179, 19.3202).
2. Угол поворота: –13.1632 градусов.
3. Коэффициент масштабирования: 1.13631.

Таким образом, можно сформулировать основные выводы.

1. Для систем реального времени с ограниченными вычислительными ресурсами наиболее целесообразно использование алгоритма ORB, поскольку он обеспечивает оптимальный баланс между скоростью и точностью позиционирования.

2. Алгоритмы AKAZE и BRISK рекомендуется использовать в качестве вспомогательных методов в ситуациях, когда объект находится в режиме стабилизации или в условиях плохой видимости, где качество признаков важнее скорости обработки.

## Заключение

В данной работе был рассмотрен и исследован алгоритм определения перемещения мобильного объекта на основе анализа видеопотока. Реализованный подход, основанный на поиске локальных особенностей и вычислении проекционного преобразования, доказал свою эффективность для задач визуальной одометрии.

## Литература

1. *Rublee E.* ORB: An Efficient Alternative to SIFT or SURF / E. Rublee, V. Rabaud, K. Konolige, G. Bradski // Proc. of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). – 2011. – P. 2564–2571.

2. *Alcantarilla P. F.* KAZE Features / P. F. Alcantarilla, A. Bartoli, A. J. Davison // Proc. of the European Conference on Computer Vision (ECCV). – 2012.

3. *Leutenegger S.* BRISK: Binary Robust Invariant Scalable Keypoints / S. Leutenegger, M. Chli, R. Y. Siegwart // Proc. of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). – 2011. – P. 2548–2555.

4. *Lowe D. G.* Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints / D. G. Lowe // International Journal of Computer Vision (IJCV). – 2004. – Vol. 60, No 2. – P. 91–110.

5. *Bay H.* SURF: Speeded Up Robust Features / H. Bay, A. Ess, T. Tuytelaars, L. Van Gool // Computer Vision and Image Understanding (CVIU). – 2008. – Vol. 110, No 3. – P. 346–359.

6. *Fischler M. A.* Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography / M. A. Fischler, R. C. Bolles // Communications of the ACM. – 1981. – Vol. 24, No 6. – P. 381–395.

УДК 004.89

# АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУХА ОТ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ПЛАТФОРМЕ LOGINOM

**П. С. Кленников, А. Д. Крынецкая**

*МИРЭА – Российский технологический университет*

**Аннотация.** В статье исследуется влияние демографических факторов на уровень загрязнения воздуха на основе анализа данных, выполненного в среде Loginom. Работа включает изучение взаимосвязей между параметрами, построение интерпретируемой модели, анализ сложных зависимостей, выделение структурных типов территорий и прогнозирование временной динамики загрязняющего вещества. Показано, что плотность населения и расстояние до промышленных зон оказывают устойчивое и статистически значимое влияние на уровень загрязнения. Результаты различных моделей демонстрируют согласованность, что подтверждает их надёжность и прикладную ценность.
**Ключевые слова:** загрязнение воздуха, демографические факторы, моделирование, прогнозирование, нейронные сети, кластеризация, Loginom.

## Введение

В современных городах демографические характеристики выступают важными факторами формирования уровня загрязнения атмосферы. Плотность населения, характер расселения и пространственная близость к промышленным зонам определяют интенсивность антропогенной нагрузки [1, 2]. Несмотря на очевидную связь между численностью населения и экологическим состоянием воздуха, количественные закономерности этой связи требуют комплексной оценки.

Для достижения этой цели в работе используются инструменты анализа данных и моделирования, реализованные в среде Loginom. Это позволяет объединить статистические методы и модели машинного обучения, получить целостную картину влияния демографии на загрязнение воздуха и описать устойчивые сценарии его формирования.

## 1. Исходные взаимосвязи между параметрами

На первом этапе была изучена общая структура зависимостей между демографическими характеристиками и загрязняющими веществами. Матрица коэффициентов корреляции представлена на рис. 1.

| # | ab Поле1.Имя | ab Поле2.Имя | 9.0 Пирсона | 9.0 Спирмена |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Air_Quality | CO | 0,62 | 0,75 |
| 2 | Air_Quality | NO2 | 0,52 | 0,61 |
| 3 | Air_Quality | Temperature | 0,50 | 0,59 |
| 4 | Air_Quality | SO2 | 0,50 | 0,61 |
| 5 | Air_Quality | Population_Density | 0,43 | 0,46 |
| 6 | Air_Quality | Humidity | 0,43 | 0,46 |
| 7 | Air_Quality | PM10 | 0,37 | 0,52 |
| 8 | Air_Quality | PM2_5 | 0,27 | 0,33 |
| 9 | Air_Quality | Proximity_to_Industrial_Areas | -0,72 | -0,73 |

*Рис. 1. Коэффициенты связей между параметрами*

Матрица показывает, что плотность населения положительно связана с концентрациями CO, $NO_2$, $SO_2$ и PM10. Наибольшая связь наблюдается для CO (0,62). Ещё более выраженной является зависимость от расстояния до промышленной зоны: отрицательные коэффициенты порядка –0,72 отражают резкий рост загрязнения при приближении к источникам выбросов. Эти результаты служат обоснованием для использования демографических переменных в дальнейших моделях.

## 2. Оценка влияния факторов

Для количественного измерения влияния параметров были построены модели, позволяющие оценить вклад каждого фактора в результирующую величину. Пример входных данных модели представлен на рис. 2.

| # | 9.0 encoding | 9.0 encoding\|Регрессия |
|---|---|---|
| 1 | 1,00 | 0,97 |
| 2 | 1,00 | 1,28 |
| 3 | 1,00 | 1,13 |
| 4 | 0,00 | 0,00 |
| 5 | 0,00 | 0,17 |
| 6 | 3,00 | 2,39 |
| 7 | 2,00 | 1,90 |
| 8 | 1,00 | 0,97 |
| 9 | 2,00 | 1,96 |
| 10 | 2,00 | 1,61 |
| 11 | 0,00 | -0,02 |
| 12 | 1,00 | 1,11 |
| 13 | 0,00 | 0,32 |
| 14 | 0,00 | 0,26 |
| 15 | 0,00 | 0,21 |
| 16 | 1,00 | 1,06 |
| 17 | 0,00 | -0,09 |
| 18 | 2,00 | 2,35 |

*Рис. 2. Пример входных данных для оценки влияния факторов*

Полученные оценки параметров и их статистическая значимость приведены на рис. 3.

Модель показывает высокую объясняющую способность ($R^2$ = 0,93). Наибольшее влияние оказывают CO, $NO_2$, $SO_2$ и PM10, что отражает прямую роль этих веществ в формировании итогового показателя загрязнённости [3]. Демографические факторы также значимы: плотность населения положительно влияет на загрязнение, а расстояние до промышленной зоны — отрицательно. Таким образом, влияние демографических параметров является статистически подтверждённым и устойчивым.

| # | Имена входных полей | Метки входных полей | Уникальные значения | encoding\|Коэффициенты | encoding\|Стд. ошибка | encoding\|T-статистика | encoding\|P-значение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | <Константа> | *null* | *null* | -1,65 | 0,04 | -42,63 | 0,00 |
| 2 | Temperature | Temperature | *null* | 0,02 | 0,00 | 20,33 | 9,62e-88 |
| 3 | Humidity | Humidity | *null* | 0,00 | 0,00 | 14,51 | 1,37e-46 |
| 4 | PM2_5 | PM2.5 | *null* | -0,02 | 0,00 | -17,69 | 1,31e-67 |
| 5 | PM10 | PM10 | *null* | 0,02 | 0,00 | 19,44 | 1,03e-80 |
| 6 | NO2 | NO2 | *null* | 0,02 | 0,00 | 25,02 | 5,77e-129 |
| 7 | SO2 | SO2 | *null* | 0,02 | 0,00 | 19,13 | 2,59e-78 |
| 8 | CO | CO | *null* | 0,69 | 0,01 | 47,30 | 0,00 |
| 9 | Proximity_to_Industrial_Areas | Proximity_to_Industrial_Areas | *null* | -0,04 | 0,00 | -21,79 | 6,98e-100 |
| 10 | Population_Density | Population_Density | *null* | 0,00 | 0,00 | 14,15 | 1,84e-44 |

*Рис. 3. Оценки коэффициентов и статистические показатели модели*

### 3. Моделирование сложных зависимостей

Для выявления нелинейных закономерностей была использована модель сложных зависимостей [4]. Её сводная характеристика представлена на рис. 4.

Значения G-критерия показывают, что важнейшими переменными являются расстояние до промышленной зоны и концентрация CO. Эти результаты подтверждают выводы интерпретируемой модели, что свидетельствует о согласованности методов [5].

| № | Имя | Метка | Значение |
|---|---|---|---|
| 1 | TotalSamples | Всего примеров | 5 000 |
| 2 | TotalSelectedSamples | Всего отобранных примеров | 5 000 |
| 3 | TrainSamples | Примеров в обучающем множестве | 4 250 |
| 4 | TrainRMSError | Среднеквадратическая ошибка на обучающем множестве | 0,52 |
| 5 | TrainAvgError | Средняя абсолютная ошибка на обучающем множестве | 0,37 |
| 6 | TrainAvgRelError | Средняя относительная ошибка на обучающем множестве | 0,36 |
| 7 | TestSamples | Примеров в тестовом множестве | 750 |
| 8 | TestRMSError | Среднеквадратическая ошибка на тестовом множестве | 0,51 |
| 9 | TestAvgError | Средняя абсолютная ошибка на тестовом множестве | 0,37 |
| 10 | TestAvgRelError | Средняя относительная ошибка на тестовом множестве | 0,35 |
| 11 | GTest_Temperature | Temperature\|G-тест | 3 749,78 |
| 12 | GTestDF_Temperature | Temperature\|Число степеней свободы G-теста | 625 |
| 13 | GTestPValue_Temperature | Temperature\|P-значение G-теста | 0,00 |
| 14 | MutualInf_Temperature | Temperature\|Взаимная информация | 0,55 |
| 15 | GTest_Humidity | Humidity\|G-тест | 2 748,55 |
| 16 | GTestDF_Humidity | Humidity\|Число степеней свободы G-теста | 625 |
| 17 | GTestPValue_Humidity | Humidity\|P-значение G-теста | 5,07e-263 |
| 18 | MutualInf_Humidity | Humidity\|Взаимная информация | 0,41 |
| 19 | GTest_PM2_5 | PM2.5\|G-тест | 1 649,22 |
| 20 | GTestDF_PM2_5 | PM2.5\|Число степеней свободы G-теста | 625 |
| 21 | GTestPValue_PM2_5 | PM2.5\|P-значение G-теста | 2,62e-93 |
| 22 | MutualInf_PM2_5 | PM2.5\|Взаимная информация | 0,24 |
| 23 | GTest_PM10 | PM10\|G-тест | 3 366,42 |
| 24 | GTestDF_PM10 | PM10\|Число степеней свободы G-теста | 625 |
| 25 | GTestPValue_PM10 | PM10\|P-значение G-теста | 0,00 |
| 26 | MutualInf_PM10 | PM10\|Взаимная информация | 0,50 |
| 27 | GTest_NO2 | NO2\|G-тест | 5 516,85 |
| 28 | GTestDF_NO2 | NO2\|Число степеней свободы G-теста | 625 |
| 29 | GTestPValue_NO2 | NO2\|P-значение G-теста | 0,00 |
| 30 | MutualInf_NO2 | NO2\|Взаимная информация | 0,82 |

*Рис. 4. Показатели модели сложных зависимостей и важность факторов*

## 4. Структурные типы территорий

Для выявления укрупнённых типов территорий был проведён анализ структуры данных. Координаты центров полученных групп представлены на рис. 5.

| 12 Номер кластера | 9.0 Temperature | 9.0 Humidity | 9.0 PM2.5 | 9.0 PM10 | 9.0 NO2 | 9.0 SO2 | 9.0 CO | 9.0 Proximity_to_Industrial_Areas | 12 Population_Density |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 38,71 | 86,33 | 46,30 | 64,16 | 37,14 | 18,95 | 2,28 | 5,12 | 660 |
| 1 | 30,88 | 72,85 | 16,59 | 27,78 | 28,37 | 11,32 | 1,67 | 6,67 | 521 |
| 2 | 24,70 | 61,20 | 10,70 | 16,30 | 20,02 | 4,99 | 1,04 | 12,06 | 412 |

*Рис. 5. Параметры центров выделенных групп*

Результаты кластеризации показывают, что одна из групп включает территории с высокой плотностью населения и минимальным расстоянием до промышленных объектов; эта группа характеризуется наибольшими концентрациями загрязнителей. Вторая группа представляет промежуточные территории, а третья — относительно благополучные зоны с меньшей плотностью населения и значительным расстоянием до источников выбросов. Это подтверждает, что демографические факторы определяют структурную типологию территории по уровню экологической нагрузки.

## 5. Прогнозирование временной динамики

Для изучения изменения уровня загрязнения во времени была построена модель прогнозирования. Пример прогнозных значений и доверительных интервалов представлен на рис. 6.

| # | SO2 | 9.0 CO | 9.0 Proximity_to_Industrial_Areas | 12 Population_Density | 9.0 encoding | ab Кодировка данных | 9.0 encoding\|Прогноз | 9.0 encoding\|Нижняя граница | 9.0 encoding\|Верхняя граница |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9,20 | 1,72 | 6,30 | 319 | 1,00 | 1 | | | |
| 2 | 9,70 | 1,64 | 6,00 | 611 | 1,00 | 1 | 1,01 | -0,95 | 2,97 |
| 3 | 12,60 | 1,63 | 5,20 | 619 | 1,00 | 1 | 1,01 | -0,95 | 2,97 |
| 4 | 5,30 | 1,15 | 11,10 | 551 | 0,00 | 0 | 1,05 | -0,91 | 3,01 |
| 5 | 5,60 | 1,01 | 12,70 | 303 | 0,00 | 0 | 0,94 | -1,02 | 2,90 |
| 6 | 17,90 | 1,82 | 3,10 | 674 | 3,00 | 3 | 0,96 | -1,00 | 2,92 |
| 7 | 12,70 | 1,80 | 4,60 | 735 | 2,00 | 2 | 1,06 | -0,90 | 3,02 |
| 8 | 13,60 | 1,38 | 6,30 | 443 | 1,00 | 1 | 0,97 | -0,99 | 2,93 |
| 9 | 11,80 | 2,03 | 5,40 | 486 | 2,00 | 2 | 1,00 | -0,96 | 2,96 |
| 10 | 15,30 | 1,69 | 4,90 | 535 | 2,00 | 2 | 1,06 | -0,90 | 3,03 |
| 11 | 5,90 | 0,85 | 13,00 | 529 | 0,00 | 0 | 1,04 | -0,92 | 3,00 |
| 12 | 19,30 | 1,53 | 5,90 | 519 | 1,00 | 1 | 0,94 | -1,02 | 2,90 |
| 13 | 6,60 | 1,09 | 10,20 | 538 | 0,00 | 0 | 0,96 | -1,00 | 2,92 |
| 14 | 4,50 | 1,02 | 11,00 | 508 | 0,00 | 0 | 1,00 | -0,96 | 2,96 |
| 15 | 6,30 | 1,18 | 10,40 | 232 | 0,00 | 0 | 0,97 | -0,99 | 2,94 |
| 16 | 11,80 | 1,48 | 7,90 | 444 | 1,00 | 1 | 0,99 | -0,97 | 2,95 |
| 17 | 3,70 | 0,96 | 14,40 | 359 | 0,00 | 0 | 1,00 | -0,96 | 2,96 |
| 18 | 13,70 | 1,85 | 4,10 | 560 | 2,00 | 2 | 0,96 | -1,00 | 2,92 |
| 19 | 7,10 | 1,52 | 6,10 | 437 | 1,00 | 1 | 1,05 | -0,91 | 3,01 |
| 20 | 11,70 | 1,13 | 7,70 | 803 | 2,00 | 2 | 1,00 | -0,96 | 2,96 |
| 21 | 9,40 | 0,97 | 8,00 | 338 | 1,00 | 1 | 0,99 | -0,97 | 2,95 |
| 22 | 1,70 | 1,04 | 14,40 | 520 | 0,00 | 0 | 1,04 | -0,92 | 3,00 |
| 23 | 4,50 | 0,98 | 10,00 | 536 | 0,00 | 0 | 0,91 | -1,05 | 2,87 |
| 24 | 4,60 | 1,03 | 11,20 | 461 | 0,00 | 0 | 0,97 | -0,99 | 2,93 |
| 25 | 2,30 | 0,94 | 17,90 | 581 | 0,00 | 0 | 0,98 | -0,98 | 2,94 |
| 26 | 4,80 | 0,93 | 11,50 | 324 | 0,00 | 0 | 0,90 | -1,06 | 2,86 |
| 27 | 5,20 | 1,09 | 10,10 | 297 | 0,00 | 0 | 1,00 | -0,96 | 2,96 |
| 28 | 6,30 | 1,85 | 3,50 | 637 | 2,00 | 2 | 0,95 | -1,01 | 2,91 |
| 29 | 2,90 | 1,03 | 10,20 | 452 | 0,00 | 0 | 1,04 | -0,92 | 3,00 |

*Рис. 6. Прогноз динамики загрязняющего вещества с учётом демографических факторов*

Модель показывает, что динамика загрязнения чувствительна к изменениям плотности населения, расстояния до промышленных зон и концентрации CO. Узкие доверительные интервалы подтверждают стабильность прогноза.

## Заключение

Проведённое исследование демонстрирует, что демографические характеристики являются ключевыми факторами, определяющими уровень загрязнения воздуха. Плотность населения оказывает положительное влияние на концентрации загрязняющих веществ, а увеличение расстояния до промышленных зон приводит к снижению уровней загрязнения. Эти зависимости подтверждаются интерпретируемой моделью, моделью сложных зависимостей и структурной типологией территорий.

Итоги анализа позволяют сформировать целостный сценарий понимания влияния демографических факторов. Базовые статистические связи, количественные оценки и результаты нелинейных моделей свидетельствуют о системном характере влияния. Кластеризация показывает, что демография формирует устойчивые типы территорий, а прогнозирование подтверждает влияние факторов и во временной динамике. Это делает демографические показатели не только объясняющими переменными, но и инструментами прогнозирования, которые могут применяться для планирования городской среды и управления экологическими рисками. На рис. 7 представлен итоговый сценарий в программе Loginom.

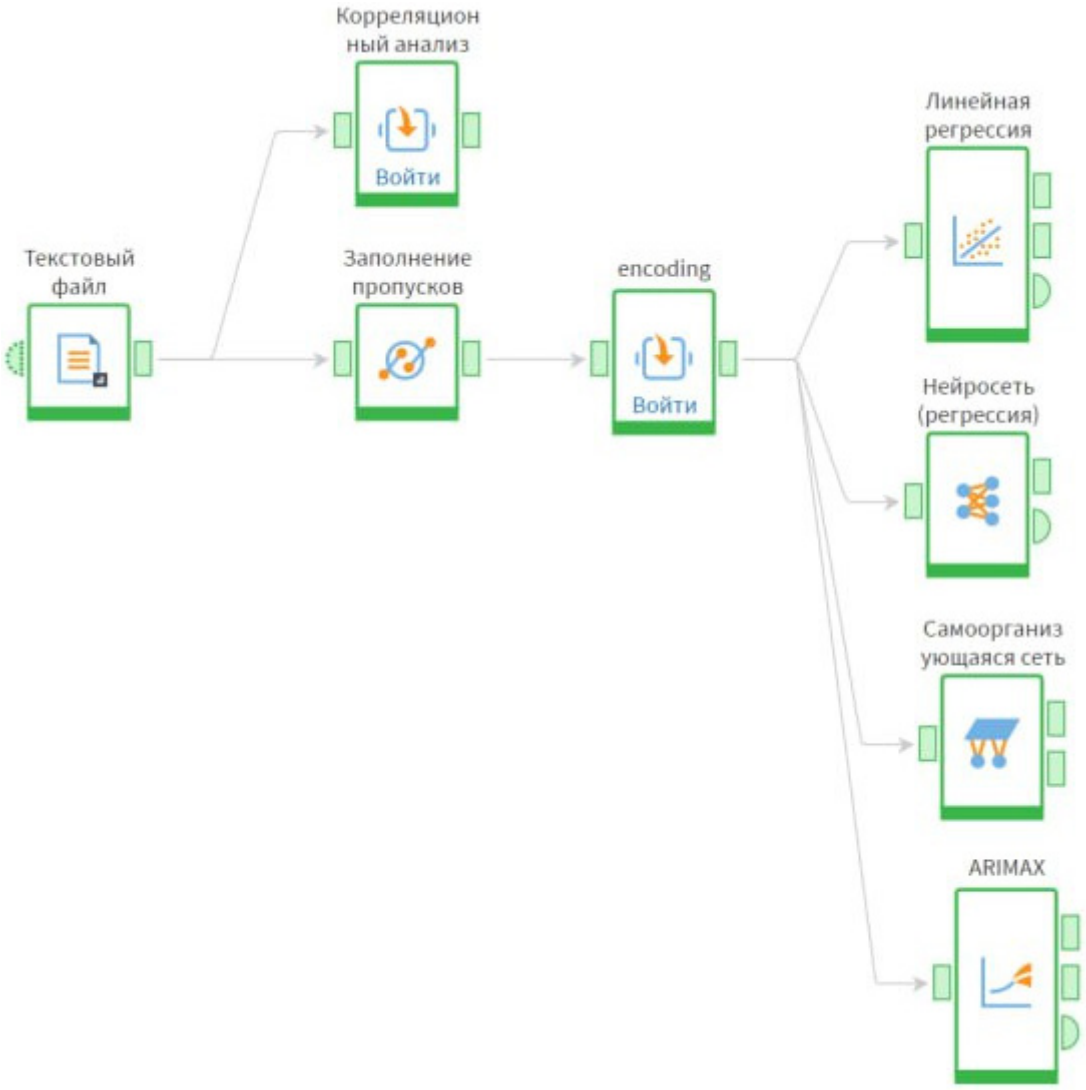



*Рис. 7. Итоговый сценарий Loginom*

**Литература**

1. *Битюкова В. Р.* Современные тенденции изменения экологической ситуации в российских городах разной людности в 2009-2019 гг / В. Р. Битюкова // Многообразие городских миров: история, теория, практика : Сборник статей Всероссийской научной конференции с международным участием, посвященной 90-летию со дня рождения профессора Е.Н. Перцика, Москва, 23–24 марта 2021 года. – Москва : Географический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 2021. – С. 59–66. – EDN GKYXDJ.

2. *Мариев О. С.* Моделирование влияния урбанизации на загрязнение атмосферы в российских регионах / О. С. Мариев, Н. Б. Давидсон, И. А. Борзова // Журнал экономической теории. – 2021. – Т. 18, № 4. – С. 627–641. – DOI 10.31063/2073-6517/2021.18-4.11. – EDN CRYYOO.

3. Прогнозирование опасного загрязнения воздуха круизными судами и автотранспортными средствами в зонах их совместного влияния в Севастополе, Владивостоке и Санкт-Петербурге / В. Н. Ложкин, О. В. Ложкина, С. А. Селиверстов, М. Н. Крипак // Вода и экология: проблемы и решения. – 2020. – № 1(81). – С. 38–50. – DOI 10.23968/2305-3488.2020.25.1.38-50. – EDN BUKSRQ.

4. *Щербатов И. А.* Математическое моделирование сложных многокомпонентных систем / И. А. Щербатов, И. О. Проталинский // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 17–26. – EDN SAUGOB.

5. *Лемешко Б. Ю.* Использование статистического моделирования для решения проблем применения критериев согласия / Б. Ю. Лемешко // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Всероссийской научно-технической конференции с международным участием, Новосибирск, 19–20 апреля 2023 года. – Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. – С. 172-178. – DOI 10.55648/978-5-91434-085-5-2023-117-123. – EDN HAHOKE.

6. *Китова О. В.* Обзор моделей и методов прогнозирования временных рядов / О. В. Китова, А. С. Алексеева // Цифровизация общества: состояние, проблемы, перспективы : Материалы VIII ежегодной всероссийской научно-практической конференции, Москва, 03 июня 2021 года. Том I. – Москва : ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2021. – С. 147–156. – EDN UTMJRH.

УДК 624.21:533.6; 699.83

# УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЛЬНЫХ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ

**В. А. Козлов, А. В. Козлова**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** При расчете пролетных строений стальных мостов большую сложность представляет расчет устойчивости, особенно для моносимметричных двутавровых балок. Авторами статьи проведены натурные испытания, аналитические расчеты по нормативным методикам, а также численные расчеты с применением метода конечных элементов. Разница полученных результатов связана с начальными несовершенствами формы и с фактической нелинейностью работы конструкции.
**Ключевые слова:** металлические балки, расчет мостов, устойчивость, методы расчета, начальные несовершенства.

## Введение

В мостах стальными чаще всего выполняют пролетные строения (как классические стальные, так и сталежелезобетонные при расчете стадии монтажа — до устройства железобетонной плиты) и гораздо реже опоры. Таким образом, в смысле расчетных схем, речь идет об изгибаемых шарнирно-опертых балках и неразрезных многопролетных, в том числе с длинными консолями (при продольной надвижке пролетного строения). Расчет прочности не представляет сложности, а вот методика расчета устойчивости моносимметричных двутавров сложна, изложена в действующих нормах в сокращенной форме, а в большинстве сертифицированных программных комплексов вовсе не представлена. Для расчета удобно использовать конечноэлементные модели, однако при обычном линейном расчете идеализированной модели получаются завышенные значения несущей способности по устойчивости.

В данной статье описаны расчеты по первой группе предельных состояний двух стальных двутавровых балок. Натурные испытания этих балок на плоский изгиб были проведены в «Центре коллективного пользования имени профессора Борисова» на базе ВГТУ. После сравнения результатов испытаний с результатами аналитического и конечноэлементного расчета приведены рекомендации по объему принятых в расчете начальных несовершенств и учету геометрической нелинейности.

## 1. Натурные испытания

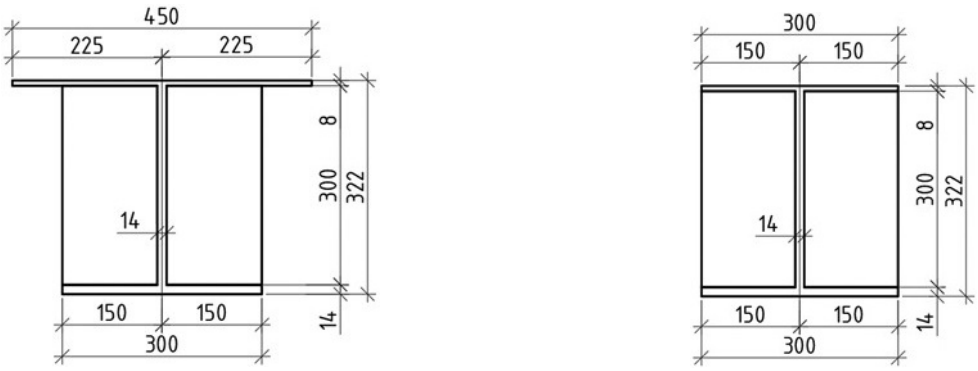
### *1.1. Испытуемые модели и оборудование*

Испытания были проведены на гидравлической машине HDX, Instron 1500HDX-G4-G7B зав. № 1500DXL2076 с максимальной нагрузкой 50 тс, что определило размеры образцов (табл. 1). Схемы поперечных сечений приведены на рис. 1. Балки выполнены из стали 09Г2С (класс прочности С325) и имеют расчетный пролет 5800 мм при полной длине 6000 мм.

Таблица 1

*Геометрические параметры моделей для натурных испытаний*

| № модели | Верхний пояс, мм | Нижний пояс, мм | Стенка, мм | Опорные ребра, мм | Длина, мм |
|---|---|---|---|---|---|
| Модель № 1 | 450 × 8 | 300 × 14 | 300 × 14 | 300 × 143 × 14 | 6000* |
| Модель № 2 | 300 × 8 | 300 × 14 | 300 × 14 | 300 × 143 × 14 | |




*Модель №1* *Модель №2*

*Рис. 1. Схемы поперечных сечений моделей балок для испытаний*

### *1.2. Ход испытаний*

Испытательная нагрузка прикладывалась в середине пролета балки через стальной брус длиной 40 см, уложенный на верхний пояс вдоль стенки по оси. Загружение производилось ступенями. Согласно принятой методике испытания на начальном этапе нагрузка прикладывалась циклами «нагрузка» — «разгрузка». Постепенное увеличение нагрузки при циклическом загружении продолжали до появления в сечении пластических деформаций или потери местной устойчивости. Контроль деформаций тензорезисторами 20 мм и фотофиксация осуществлялись в течение всего времени испытаний (рис. 2, 3). Тензодатчики устанавливались в середине пролета по схемам с рис. 4, 7.

### *1.3. Результаты испытаний*

По результатам испытаний были построены графики зависимости зафиксированных деформаций от приложенной нагрузки. Наибольший интерес представляют деформации верхнего пояса, графики приведены на рис. 5–6, 8–9.

В результате испытаний модели 1 в первую очередь была зафиксирована потеря устойчивости сжатой полки. О потере устойчивости свидетельствует смена знака перемещений и заметные волнообразные деформации верхнего пояса. Потеря общей устойчивости не зафиксирована.

В ходе испытаний модели № 2 наблюдались значительные деформации верхнего пояса. Потеря общей устойчивости зафиксирована при нагрузке 208 кН.

*Рис. 2. Модель № 1 после испытаний*

*Рис. 3. Модель № 2 после испытаний*

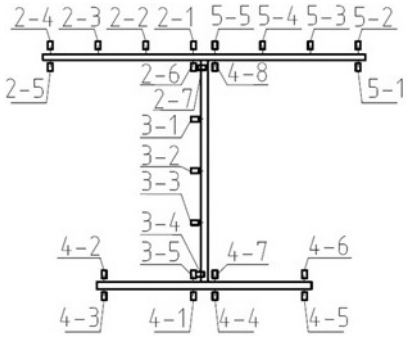



*Рис. 4. Схема установки тензодатчиков в поперечном сечении балки Модель № 1*

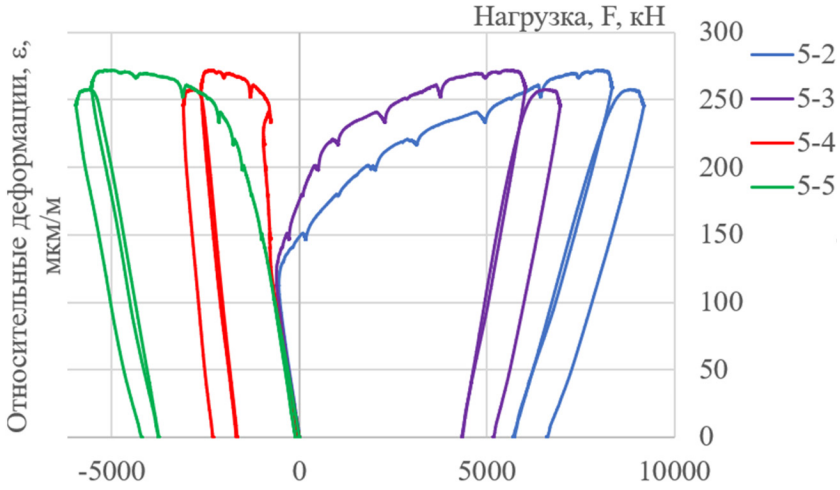



*Рис. 5. График Нагрузка-Деформации для модели №1 (справа). Потеря устойчивости по датчику 5-2 при нагрузке 113 кН, по датчику 5-3 при нагрузке 118 кН*

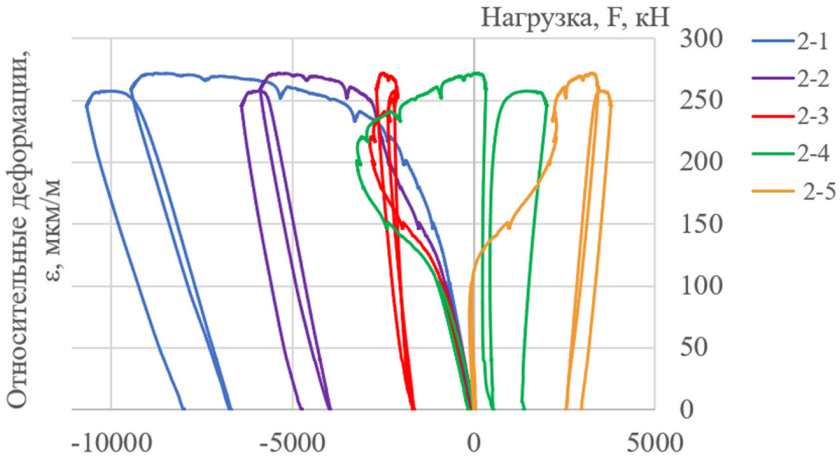



*Рис. 6. График Нагрузка-Деформации для модели №1 (слева). Потеря устойчивости по датчику 2-5 при нагрузке 75кН, по датчику 2-4 при нагрузке 210кН*

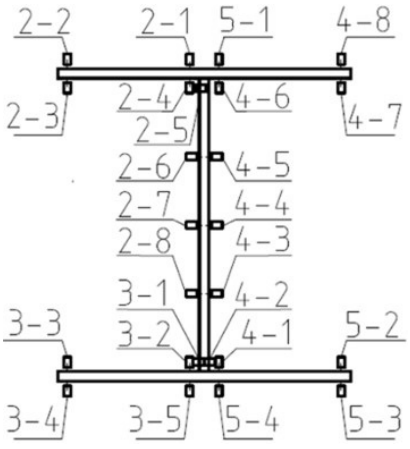



*Рис. 7. Схема установки тензодатчиков в поперечном сечении балки Модель № 2*

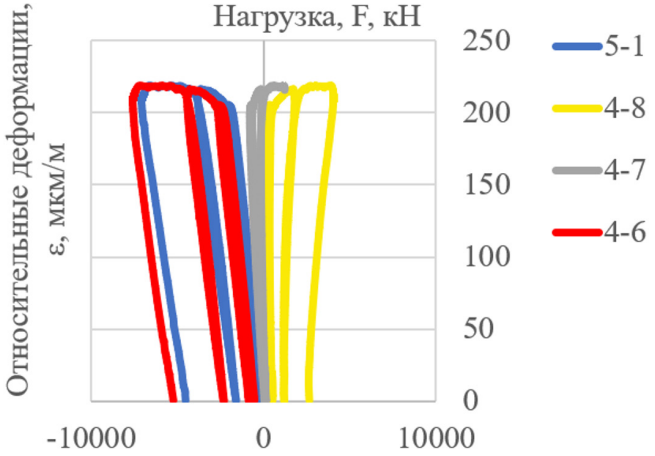



*Рис. 8. График Нагрузка-Деформации для модели №2 (справа). Потеря устойчивости по датчикам 4-7, 4-8 при нагрузке 180 кН*

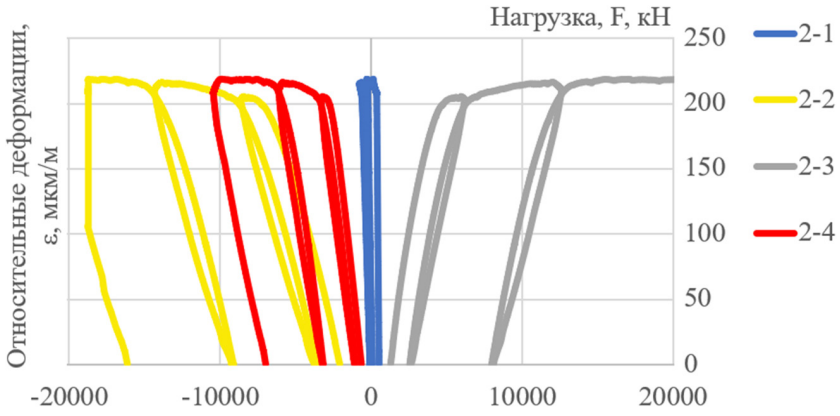



*Рис.9. График Нагрузка-Деформации для модели №2 (слева). Потеря устойчивости по датчику 2-1 при нагрузке 200 кН*

## 2. Аналитический расчет общей устойчивости

### *2.1. Общая информация*

При расчете в соответствии с СП16.13330, Приложение Ж, обнаруживается, что методика расчета общей устойчивости для разрезной балки двутаврового сечения с одной осью симметрии сложна, а для неразрезной — отсутствует. СП 35.13330 п.8.41 не ограничивает применение методики в зависимости от симметрии, однако часть расчета опущена: для определения коэффициента устойчивости при изгибе требуется гибкость, которая в свою очередь вычисляется через критический изгибающий момент в пределах расчетной длины сжатого пояса балки. Критический момент должен быть определен по теории тонкостенных упругих стержней, но как именно в методике не прописано. Популярное решение — использовать полученные Потапкиным А. А. на основании теории Власова В. З. для наиболее распространенных расчетных случаев. Еврокод дает рекомендации при более сложных граничных условиях определять значение критического момента с использованием свободно распространяемой программы LTBeam (Lateral Torsional Buckling of Beams Software), разработанной CTICM (Le Centre Technique Industriel de la Construction Métallique).

### *2.2. Результаты расчета*

Результаты расчета критической силы для испытуемых моделей приведены в табл. 2.

Таблица 2

*Результаты расчета критической силы по нормативным методикам для испытуемых моделей*

| Условие проверки | Предельная сосредоточенная сила F, кН | |
|---|---|---|
| | Модель 1 | Модель 2 |
| Условие прочности (упругая работа) | 268,06 | 203,86 |
| Условие общей устойчивости СП16.13330.2017 | 268,06 | 179,60 |
| Условие общей устойчивости СП35.13330.2011 | 227,74 | 168,09 |
| Условие местной устойчивости СП16.13330.2017 | не обеспечена | не обеспечена |
| Условие местной устойчивости СП35.13330.2011 | не обеспечена | не обеспечена |

## 3. Расчет общей устойчивости с привлечением метода конечных элементов

### *3.1. Общая информация*

Расчеты в линейной постановке были выполнены в ПК MIDAS FEA NX и в ЛИРА-САПР для верификации. Стержневая модель не подходит для оценки устойчивости конкретного элемента, требуется модель из плоских или объемных КЭ. Крупность сетки составила в пластинчатой модели 5 см, в объемной — 2,5 см. Расчет выполняется на действие нагрузки, приложенной в центре пролета по оси балки распределенной вдоль оси балки на длине 0,4 м. Вкладом собственного веса в потерю устойчивости в силу малости пренебрегаем.

### *3.2. Результаты расчета*

Результаты приведены в табл. 3 и на рис. 10–11.

Таблица 3

*Результаты расчета устойчивости методом конечных элементов*

| Тип конечных элементов | Вид потери устойчивости | Модель № 1 | Модель № 2 |
|---|---|---|---|
| Пластинчатые | общая устойчивость | 677,62 кН | 299,16 кН |
| | местная устойчивость | 271,05 кН | 435,60 кН |
| Объемные | общая устойчивость | 761,05 кН | 307,37 кН |
| | местная устойчивость | 310,95 кН | 504,69 кН |

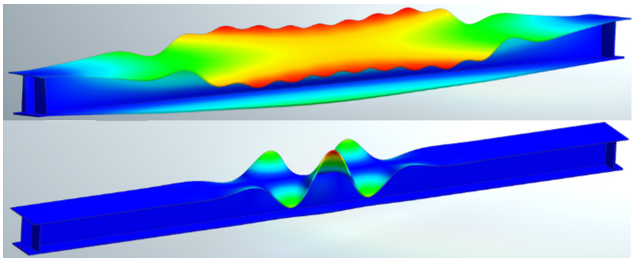


*Рис. 10. Потеря общей и местной устойчивости Модели № 1*

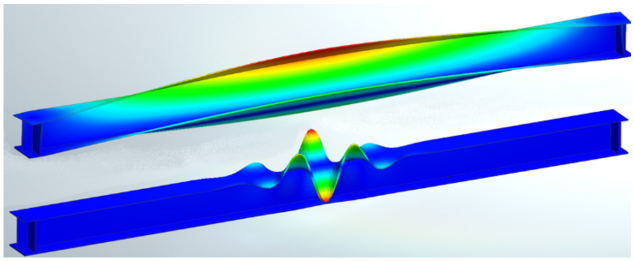


*Рис. 11. Потеря общей и местной устойчивости Модели № 2*

Независимо от способа моделирования величина напряжений совпадает, однако имеется большая количественная разница между критической силой, вычисленной МКЭ и аналитически. Качественно картина потери устойчивости совпадает.

Методика аналитического расчета стальных конструкций косвенно учитывает несовершенство материала и формы, значит конечноэлементную модель необходимо дополнить в этой части. Кроме того, при больших нагрузках и значительных деформациях элемента большой вклад вносит учет нелинейности второго рода – геометрической.

## 4. Расчет с прямым учетом начальных несовершенств МКЭ

### *4.1. Общая информация*

СП 294.1325800 регламентирует учет начальных несовершенств для стальных центрально-сжатых элементов, а методика для плоского изгиба в действующей нормативной базе отсутствует. Еврокод DIN EN 1993-1-1 в 2010 году был дополнен в части рекомендаций по назначению несовершенств двутавровых изгибаемых элементов и предлагает назначать кривизну в зависимости от длины элемента в п. 5.3.2.

Фактически несовершенства имеют случайный характер. Но для расчетов на стадии проектирования надо задаться некоторым предельным допустимым отклонением линейных размеров и формы в соответствии с документом, регламентирующим данный вид изделий (например, ГОСТ на сварные двутавры). Наибольший эффект для двутавра при расчете на устойчивость будут иметь отклонения, вызывающие ассиметрию приложения нагрузки: смещение верхней полки относительно стенки, выгиб элемента, перекос верхнего пояса.

Для уточнения результатов были проведены расчеты моделей из объемных КЭ с учетом вышеперечисленных начальных несовершенств в линейной постановке, а также с учетом физической и геометрической нелинейности.

### *4.2. Результаты расчета*

Результаты приведены на рис. 12–13 и в табл. 4.

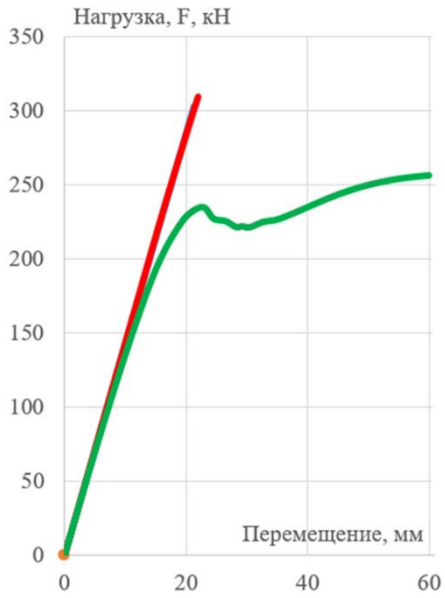



*Рис. 12. График зависимости перемещений от нагрузки для модели № 1*

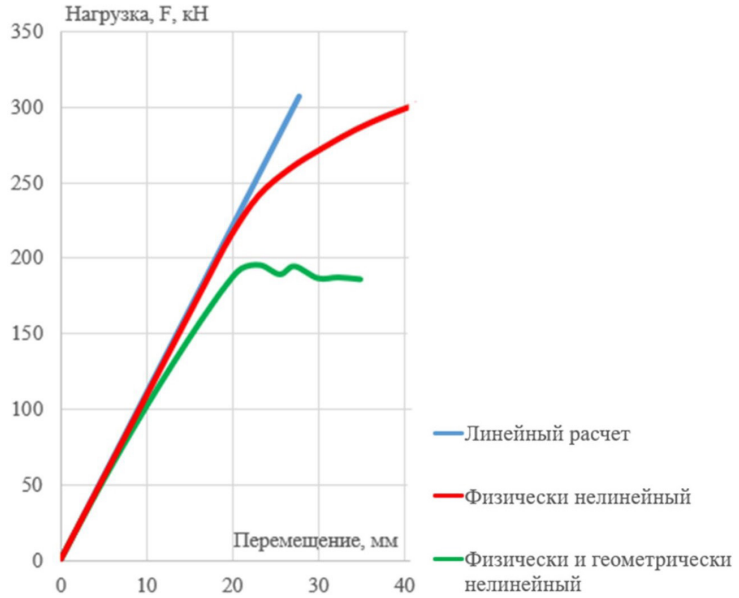



*Рис. 13. График зависимости перемещений от нагрузки для модели № 2*

Таблица 4

*Результаты расчетов устойчивости с учетом геометрической и физической нелинейности, а также начальных несовершенств*

| | Модель № 1 | | Модель № 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | общая | местная | общая | местная |
| 1. Аналитический расчет | 268 кН | 179 кН | 180 кН | 190 кН |
| 2. Эксперимент | > 270 кН | 75 кН | 208 кН | 180 кН |
| 3. Линейный расчет | 761 кН | 311 кН | 307 кН | 505 кН |
| 4. Расчет с учетом физ. и геом. нелинейности | | 258 кН (83% от п.3) | 261 кН (51% от п.3) | |
| 5. Расчет с учетом физ. и геом. нелинейности и начальных несовершенств | | 230 кН (89% от п. 4; 74% от п. 3) | 196 кН (74% от п. 4; 38% от п. 3) | |

Несущая способность по устойчивости по результатам расчета с учетом физической и геометрической нелинейности снизилась на 18 % для модели 1, на 30 % для модели 2 относительно расчета без учета несовершенств и нелинейности.

## Заключение

На основании проведенного исследования можно сделать вывод, что расчет общей устойчивости изгибаемых элементов дает результаты, сопоставимые с результатами конечноэлементного расчета. Но для получения корректных значений критически важно учитывать геометрическую нелинейность работы балки при больших нагрузках и начальные несовершенства конструкции в объеме, указанном в документе, регламентирующем данный вид изделий.

Следует провести ряд дополнительных расчетов, чтобы оценить зависимость отклонения результатов расчета общей устойчивости аналитическими и численными методами от компактности сечения — обеспечения сохранения местной устойчивости полок и стенки под большими нагрузками.

## Литература


1. *Потапкин А. А.* Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. – М. : Транспорт, 1984.

2. *Корнеев М. М.* Стальные мосты. Теоретическое и практическое пособие по проектированию мостов. – Киев : Академпресс, 2010.

3. *Белый Г. И., Гарипов А. И.* Запредельные НДС в поперечных сечениях элементов стальных конструкций // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 4. – С. 16–30.

4. *Белый Г. И., Гарипов А. И.* Запредельная несущая способность стержневых элементов стальных конструкций после потери общей устойчивости // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 5. – С. 5–19.

5. *Phe Van Pham, Thi Doan-Tan, Dung Le-Dang, Nguyen Xuan-Huy*. Inelastic moment resistances of welded steel beams with initial shape imperfections. – Hanoi, Vietnam // Civil and Environmental Engineering. – 2024. – № 20. – P. 632–653.

6. *Thiebaud R., Lebet J. P., Beyer A., Boissonnade N.* Lateral torsional buckling of steel bridge girders // Proceedings of the Annual Stability Conf. Structural Stability Research Council Orlando, Florida, 2016. – 19 p.

7. *Thiebaud R.* Lateral Torsional Buckling of Steel Bridges, 2014. //https://memento.epfl.ch/event/lateral-torsional-buckling-of-steel-bridges/.

8. *Pham Van PHE, Xuan Huy Nguyen*. Moment Resistances of wide flange beams with initial imperfection and residual stresses. – Hanoi, Vietnam // Journal of Materials and Engineering Structures «JMES». – 2020. – № 4 – P. 651–658.

9. *Graziano Fiorillo, Michel Ghosn*. Failure Analysis of Continuous Highway Steel I-Multigirder Bridges under the Combined Effect of Fatigue and Overloading Events. – J Bridge Eng. – 2025. – № 1.

УДК 536.2

# РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ВНЕШНИМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА МЕТОДАМИ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Е. Е. Колганова, Т. В. Сумина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассмотрена задача математического моделирования нестационарного теплообмена в прямоугольной пластине при различной интенсивности внутреннего источника тепла и переменных граничных условиях. Для описания процесса использовано уравнение теплопроводности с объемным тепловыделением и краевыми условиями третьего рода. Построена конечно-разностная схема на равномерной сетке по пространственным координатам и времени, обеспечивающая аппроксимацию исходной краевой задачи с заданной точностью. Проведено численное исследование влияния параметров теплоотдачи и мощности источника на пространственно-временное распределение температуры в пластине. Представлены результаты вычислительных экспериментов в виде температурных полей и характерных сечений, иллюстрирующие динамику установления теплового режима. Показано, что изменение коэффициентов теплоотдачи и интенсивности источника приводит к существенной трансформации температурных профилей и времени выхода на квазистационарное состояние. Полученные результаты могут быть использованы при тепловом расчете элементов конструкций и выборе режимов их эксплуатации.

**Ключевые слова:** нестационарный теплообмен, уравнение теплопроводности, прямоугольная пластина, внутренний источник тепла, краевая задача, конечно-разностная схема, численное моделирование, температурное поле, коэффициент теплоотдачи, тепловой режим, тепловое нагружение, установившийся режим, граничные условия третьего рода, сеточно-разностный метод, вычислительный эксперимент.

## Введение

Задачи теплопроводности занимают центральное место в математическом моделировании тепловых процессов, возникающих в различных технических системах. Распределение температуры в твердых телах при наличии внешних тепловых источников имеет практическое значение для энергетики, криогенной техники, теплообменников и аэрокосмической промышленности [1–3].

Классическое уравнение теплопроводности, сформулированное Жаном-Батистом Жозефом Фурье в 1822 году, описывает нестационарное распределение температурного поля в пространстве и времени. Однако аналитическое решение таких задач с неоднородными граничными условиями второго рода требует применения специальных математических методов.

В данной работе рассматривается нестационарная задача теплопроводности в двумерной квадратной области с неоднородными граничными условиями второго рода и внешним источником тепла. Для её решения применяется комбинированный подход, включающий замену переменных и метод конечных интегральных преобразований Фурье. Полученное аналитическое решение верифицируется численным методом конечных разностей. Такой подход позволяет получить точные результаты и обеспечивает надёжность математической модели.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается квадратная область $\Omega = [0, h] \times [0, h]$ с теплопроводной средой, характеризуемой коэффициентом теплопроводности $\lambda$, плотностью $\rho$ и теплоёмкостью $c$. На границах

области действует внешний источник тепла с плотностью теплового потока $q = \text{const}$ на трёх границах, и отсутствует тепловой поток на четвёртой границе.

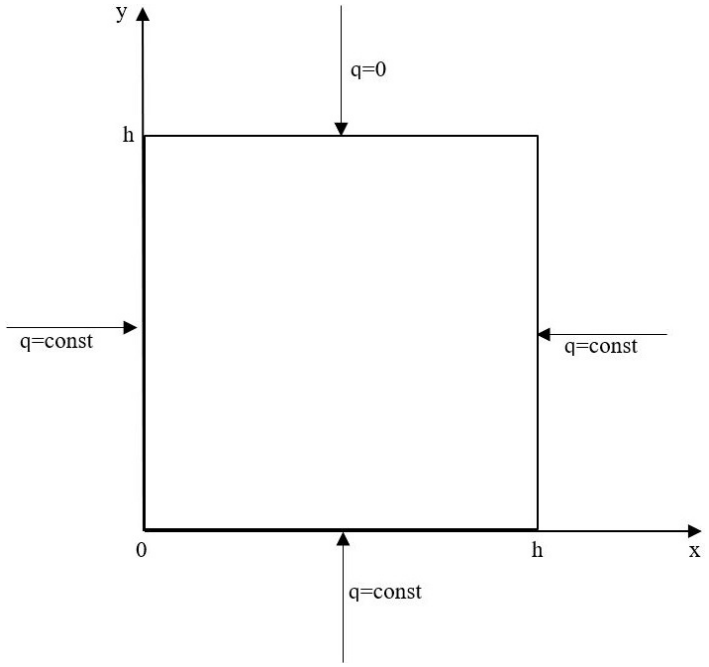



*Рис. 1. Схема постановки задачи*

Математическая постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{\partial T(X,Y,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial^2 T(X,Y,\theta)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T(X,Y,\theta)}{\partial Y^2}\right], \tag{1}$$

где $T$ — безразмерная температура, $\theta = \dfrac{at}{h^2}$ — безразмерное время, $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\alpha}$ — число Прандтля, $X = \dfrac{x}{h}$, $Y = \dfrac{y}{h}$ — безразмерные координаты.

Начальное условие:

$$T(X,Y,0) = 0, \tag{2}$$

Граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T(0,Y,\theta)}{\partial X} &= 1, \\ \frac{\partial T(1,Y,\theta)}{\partial X} &= 1, \\ -\frac{\partial T(X,0,\theta)}{\partial Y} &= 1, \\ \frac{\partial T(X,1,\theta)}{\partial Y} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

## 2. Аналитическое решение

Для упрощения граничных условий и приведения их к однородному виду применяется двойная замена переменных.

### *2.1. Первая замена переменных*

$$T(X,Y,\theta)=\Omega(X,Y,\theta)+X^2-X+\frac{1}{2}(Y-1)^2, \tag{4}$$

Эта замена позволяет преобразовать исходные неоднородные граничные условия в однородные.

### *2.2. Вторая замена переменных*

$$\Omega(X,Y,\theta)=\Gamma(X,Y,\theta)+\frac{3\theta}{\mathrm{Pr}}, \tag{5}$$

После применения обеих замен получается однородное уравнение с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial\Gamma(X,Y,\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial^2\Gamma(X,Y,\theta)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Gamma(X,Y,\theta)}{\partial Y^2}\right], \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Gamma(0,Y,\theta)}{\partial X}=0,\\
&\frac{\partial\Gamma(1,Y,\theta)}{\partial X}=0,\\
&\frac{\partial\Gamma(X,0,\theta)}{\partial Y}=0,\\
&\frac{\partial\Gamma(X,1,\theta)}{\partial Y}=0.
\end{aligned} \tag{7}$$

### *2.3. Метод конечных интегральных преобразований Фурье*

Для решения этой системы применяется метод конечных интегральных косинус-преобразований Фурье. Последовательное применение преобразования по координатам $X$ и $Y$ преобразует задачу в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{d\Gamma_{nm}(\theta)}{d\theta}=-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\lambda_n^2+\mu_m^2\right)\Gamma_{nm}(\theta), \tag{8}$$

где $\lambda_n=n\pi,\ \mu_m=m\pi$ для $n,m=1,2,3...$

Решение этого уравнения имеет экспоненциальный вид:

$$\Gamma_{nm}(\theta)=B_{nm}e\left(-\frac{\lambda_n^2+\mu_m^2}{\mathrm{Pr}}\theta\right), \tag{9}$$

где коэффициенты $B_{nm}$ определяются из начальных условий путём разложения в ряд Фурье.

### *2.4. Окончательное решение*

Применяя обратные преобразования, окончательное решение исходной задачи имеет вид:

$$T(X,Y,\theta)=X^2-X+\frac{1}{2}(Y-1)^2+\frac{3\theta}{\mathrm{Pr}}+\Gamma(X,Y,\theta), \tag{10}$$

где $\Gamma(X,Y,\theta)$ представляется в виде двойного ряда Фурье:

$$\Gamma(X,Y,\theta) = B_{00} + 2\sum_{m=1}^{\infty} B_{0m} e^{-\frac{\mu_m^2}{\mathrm{Pr}}\theta} \cos(\mu_m Y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} B_{n0} e^{-\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pr}}\theta} \cos(\lambda_m X) + \\ +4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} e^{-\frac{\lambda_n^2+\mu_m^2}{\mathrm{Pr}}\theta} \cos(\mu_m Y)\cos(\lambda_m X), \tag{11}$$

## 3. Численное решение

Для верификации аналитического решения применяется метод конечных разностей с явной схемой крест. Расчётная область дискретизируется равномерной сеткой с шагом $h$, временная эволюция реализуется с шагом $\Delta\theta$.

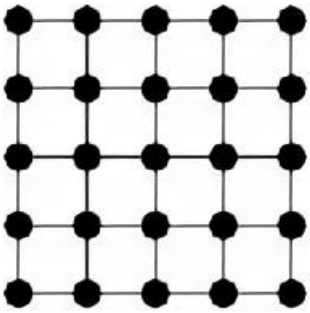


*Рис. 2. Сетка пространственной дискретизации. Узлы расчётной сетки для метода конечных разностей с равномерным распределением по обеим координатам*

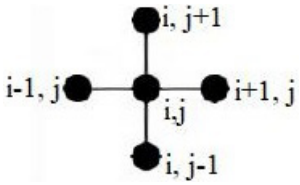



*Рис. 3. Схема аппроксимации (шаблон крест). Узлы шаблона для аппроксимации производных: центральный узел $(i, j)$ и соседние узлы в направлениях $X$ и $Y$*

### *3.1. Аппроксимация производных*

$$\frac{\partial T}{\partial X} \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta\theta}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \approx \frac{T_{i+1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \approx \frac{T_{i,j+1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n}}{h^2}. \tag{13}$$

### *3.2. Конечно-разностная схема*

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \frac{\Delta\theta}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{T_{i+1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n}}{h^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n}}{h^2}\right], \tag{14}$$

### *3.3. Условие устойчивости*

Граничные условия реализуются через аппроксимацию производных. Для устойчивости решения применяется условие Куранта — Фридрихса — Леви:

$$\Delta\theta \le \frac{\mathrm{Pr}\cdot h}{4}, \tag{15}$$

## 4. Результаты и анализ

Численное моделирование проведено для квадратной области $[0,1]\times[0,1]$ с числом Прандтля $\mathrm{Pr} = 0,7$ на временном интервале $\theta \in [0,1]$. Использовалась сетка $100\times100$ узлов с временным шагом $\Delta\theta = 1.75\times10^{-4}$, обеспечивающим устойчивость вычислений.

### *4.1. Аналитическое решение*

Распределение температурного поля, полученное аналитическим методом, демонстрирует ярко выраженную зависимость от времени и пространственных координат.

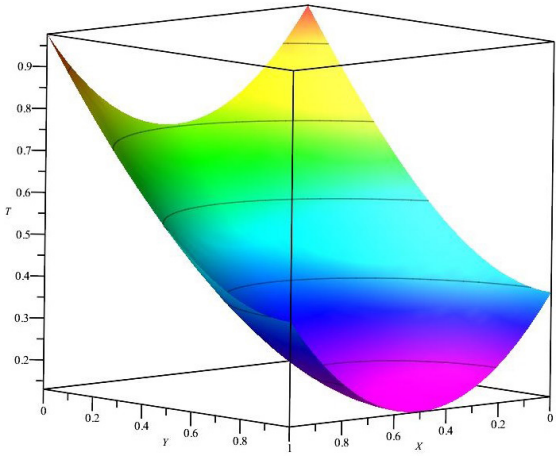



*Рис. 4. Аналитическое решение при $\theta = 0.1$. Начальная стадия процесса накопления тепла. Максимальная температура составляет около 0.8. Распределение демонстрирует влияние граничных условий со всех сторон*

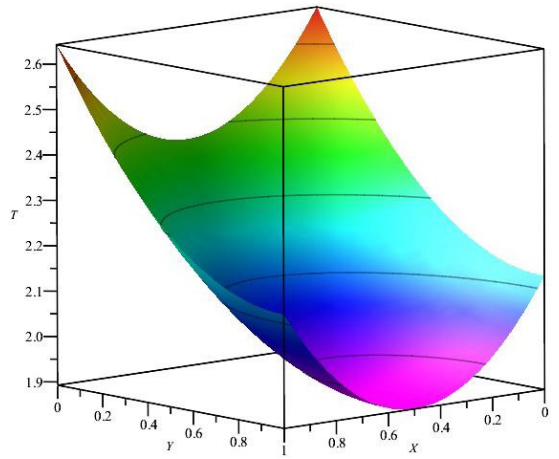



*Рис. 5. Аналитическое решение при $\theta = 0.5$. Промежуточная стадия. Максимальная температура возрастает до значения приблизительно 2.5. Четко видно пространственное распределение температурного поля с максимумом в центре области*

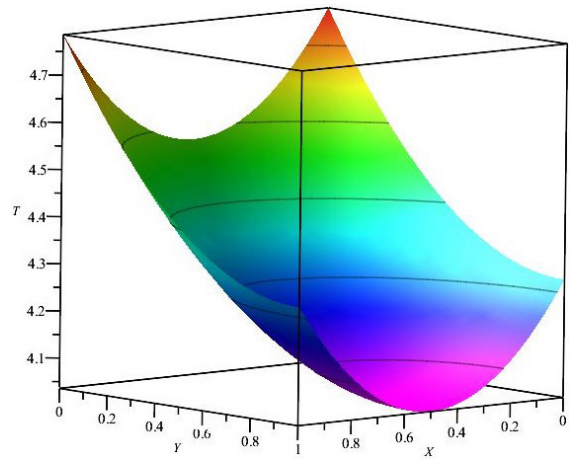



*Рис. 6. Аналитическое решение при $\theta = 1.0$. Поздняя стадия процесса. Максимальная температура достигает порядка 4.7. Температурное поле достигает квазиустановившегося состояния с продолжающимся монотонным ростом*

### *4.2. Численное решение*

Метод конечных разностей позволяет проследить эволюцию температурного поля с высокой точностью.

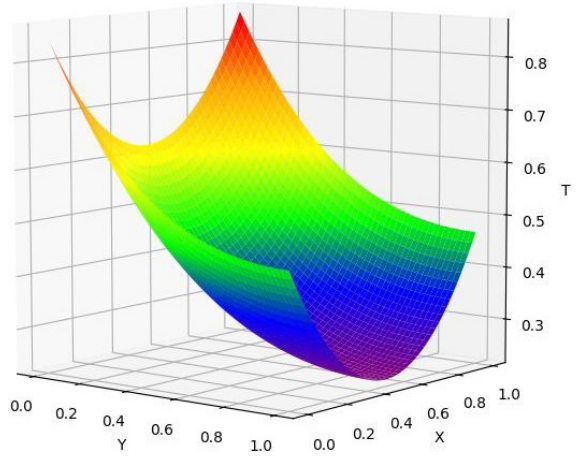



*Рис. 7. Численное решение при $\theta = 0.1$. Соответствует аналитическому решению на начальной стадии, подтверждая корректность численной схемы*

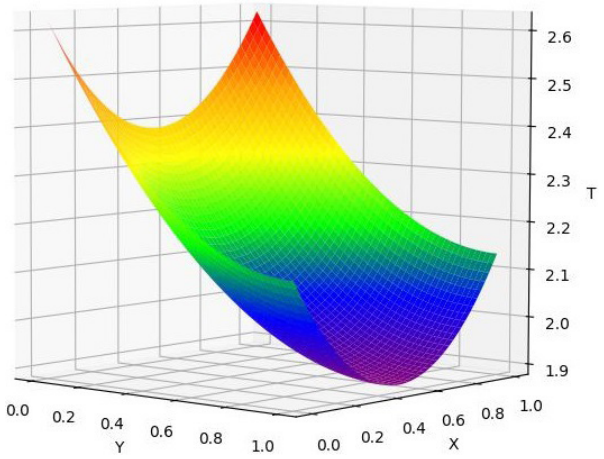



*Рис. 8. Численное решение при $\theta = 0.5$. Промежуточный временной слой. Численные результаты практически совпадают с аналитическим решением, различия находятся в пределах погрешности аппроксимации*

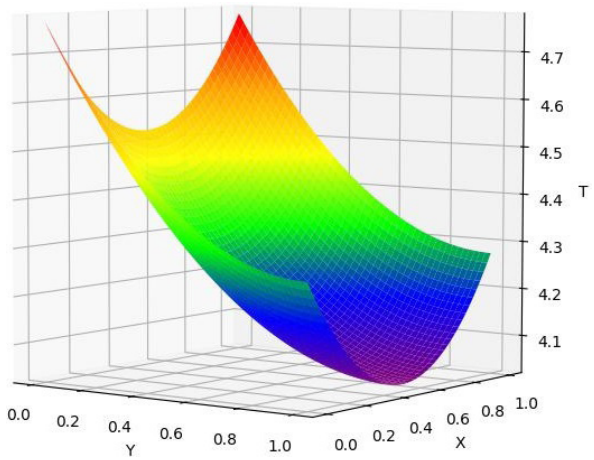



*Рис. 9. Численное решение при $\theta = 1.0$. Финальный временной слой. Высокая степень согласования с аналитическим решением подтверждает надёжность численной схемы и правильность выбора параметров сетки*

### *4.3. Сравнительный анализ*

Графики аналитического и численного решений демонстрируют высокую степень согласования. Совпадение профилей температурного поля подтверждает корректность обоих подходов и надёжность численной схемы.

Ключевые наблюдения:

1. Динамика температурного поля: С увеличением безразмерного времени $\theta$ происходит монотонный рост максимальной температуры в системе. При $\theta = 0.1$ максимальная температура составляет около 0.8, при $\theta = 0.5$ — приблизительно 2.5, при $\theta = 1.0$ — порядка 4.7. Это соответствует физической природе задачи накопления тепла внешними источниками.

2. Пространственное распределение: Температурное поле неравномерно распределено в области. Максимальные значения концентрируются вблизи границ, где действуют тепловые источники, что отражает геометрию граничных условий.

3. Влияние граничных условий: Асимметричные граничные условия (тепловой поток равен нулю на верхней границе) приводят к асимметричному распределению температуры.

4. Точность численного метода: Совпадение аналитического и численного решений на всех временных слоях подтверждает выполнение начального условия и граничных условий.

## Заключение

В работе получено точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности в двумерной области с неоднородными граничными условиями второго рода. Применённый комбинированный подход, включающий замену переменных и метод конечных интегральных преобразований Фурье, показал эффективность при решении такого класса задач.

Численное моделирование методом конечных разностей обеспечило верификацию аналитического решения. Высокая степень согласования результатов подтверждает надёжность обоих методов и возможность их применения к более сложным задачам.

Полученные результаты могут применяться:

- при моделировании тепловых процессов в теплообменниках;
- в криогенной технике для оптимизации процессов хранения и транспортировки;
- в системах терморегулирования и теплозащиты;
- как основу для решения более сложных многомерных задач теплопередачи.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на рассмотрение нелинейных эффектов, учёт неоднородности материалов и решение задач в областях более сложной геометрии.

**Литература**

1. *Барочкин Е. В.* Общая энергетика : учебное пособие / Е. В. Барочкин, М. Ю. Зорин, А. Е. Барочкин ; под ред. д. т. н., проф. Е. В. Барочкина. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. – 316 с.

2. *Беккер Р.* Теория теплоты : пер. с нем. / Р. Беккер ; пер. А. М. Гармизо, В. С. Ефремцева. – Москва : Энергия, 1974. – 504 с.

3. *Михеев М. А.* Основы теплопередачи : учебное пособие / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – 2-е изд., стереотип. – Москва : Энергия, 1977. – 344 с.

4. *Кудинов В. А.* Теплотехника : учебное пособие / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, Е. В. Стефанюк. – Москва : КУРС ; ИНФРА-М, 2020. – 424 с.

5. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики : учебное пособие / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – 5-е изд., стереотип. – Москва : Наука, 1977. – 736 с.

6. *Самарский А. А.* Численные методы : учебное пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин ; под ред. акад. РАН А. А. Самарского. – Москва : Наука, 1989. – 432 с.

7. *Кудрявцев В. Д.* Методы численного решения двумерных задач теплопроводности / В. Д. Кудрявцев, П. В. Харламов // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 1. – С. 93–98.

8. *Мешков В. З.* Численное моделирование нестационарных тепловых процессов / В. З. Мешков // Теплофизика и аэромеханика. – 2014. – Т. 21, № 3. – С. 70–76.

9. *Сидоров Е. А.* Математическое моделирование теплопереноса в двумерных областях / Е. А. Сидоров // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2019. – Т. 27, № 3. – С. 112–120.

10. *Панченко А. Г.* Применение метода конечных разностей к уравнению теплопроводности / А. Г. Панченко // Прикладная математика и моделирование. – 2016. – Т. 10, № 2. – С. 45–52.

УДК 519.854

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ С РАЗРЕЖЕННОЙ МАТРИЦЕЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ МЕТОДОМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА

**К. Р. Корчагина, О. В. Авсеева**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается задача, возникающая в процессе организации массовых рассылок сообщений в компьютерных сетях крупных организаций. Данная задача представляет собой вариацию задачи о назначениях, главной особенностью которой является сильная разреженность исходной матрицы. Исследуется применимость использования метода полного перебора для решения задачи. Разработан алгоритм и реализована программа для решения задачи, проведены численные эксперименты, которые показали, что при размерности матрицы более $30 \times 30$ использование метода полного перебора нецелесообразно.

**Ключевые слова:** задача о назначении, математическая модель, матрица стоимости, дополнительные ограничения, разреженная матрица, целевая функция, затраты назначения, метод полного перебора, сложность алгоритма, выбор маршрутизаторов, организации массовых рассылок сообщений.

## Введение

Задача о назначениях — это классическая задача оптимизации, цель которой найти наилучшее соответствие между двумя группами объектов. Она находит свое применение во множестве сфер [1]. В современном мире всё чаще появляются вариации данной задачи, которые требуют разработки эффективных алгоритмов для их решений. Для этого необходимо использовать специальные подходы.

Существует множество алгоритмов решения задачи о назначениях. Но они могут быть неэффективными, например, когда объемы данных велики или добавляются новые ограничения. Поэтому разработка новых и усовершенствование уже имеющихся алгоритмов является крайне востребованной. Ситуация, когда матрица стоимости, которая связана с назначениями, является разреженной и возникают дополнительные ограничения, существенно усложняет поиск наилучшего решения [2–4].

В настоящей статье исследуется применимость метода полного перебора для решения задачи о назначении с сильно разреженной матрицей.

## 1. Математическая постановка задачи

Задача организации массовых рассылок сообщений в компьютерных сетях крупных организаций рассматривается во многих работах [5–8]. Предполагается, что существует большое количество подсетей, доступ к которым осуществляется при помощи компьютеров, которые имеют свойства маршрутизаторов, то есть имеют доступ как к серверу, обеспечивающему рассылку информации, так и к компьютерам в подразделениях организации, объединённым в подсети. При этом также предполагается, что сервер не имеет технической возможности получения прямого доступа ко всем компьютерам, находящимся в подразделениях. Необходимо выбрать минимальное число маршрутизаторов, обеспечивающих передачу широковещательных сообщений всем объектам-компьютерам организации. Каждый объект должен получить сообщение. Считается, что $j$-й маршрутизатор может обслуживать $i$-ю сеть, если он принадлежит данной сети.

Задача может быть математически формализована в виде [5]:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \to \min \tag{1}$$

$$\sum_{j \notin J_i}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,m} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j, \quad j = \overline{1,n} \tag{3}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Матрица принадлежности $A$ представляет собой структурированное представление топологии сети. Считается, что $j$-й маршрутизатор может обслуживать $i$-ю сеть, если он принадлежит данной сети. Исходные данные задачи можно представить в виде булевой матрицы $A = (a_{ij})$:

$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, 1 — если $j$-й компьютер принадлежит $i$-й сети, 0 — в противном случае.

Целевая функция (1) минимизирует суммарную стоимость использования выбранных компьютеров в качестве маршрутизаторов. Функция $\operatorname{sgn}(x)$ возвращает 1, если $x > 0$, и 0, если $x = 0$. В данном случае эта функция указывает, что компьютер $j$ используется, если он выбран для обслуживания хотя бы одной сети. Также функция гарантирует, что в общую стоимость будут включены только те компьютеры, которые фактически используются для обслуживания какой-либо сети. Параметр $c_j$ вносит в модель экономический аспект, принимая во внимание различные затраты, связанные с использованием каждого компьютера в качестве маршрутизатора. Эти расходы могут включать электроэнергию, техническое обслуживание, лицензирование программного обеспечения и другие операционные расходы.

Первое ограничение (2) обеспечивает, что каждая сеть будет обслуживаться ровно одним компьютером, который принадлежит этой сети. Это гарантирует доставку сообщений всем узлам сети. Суммирование выполняется по $j \in J_i$, где $J_i$ — это все компьютеры, которые принадлежат сети $i$.

Второе ограничение (3) принимает во внимание ограничения на мощность компьютеров. Параметр $d_j$ ограничивает возможности каждого компьютера обслуживать сети.

Третье ограничение (4) устанавливает бинарный параметр $x_{ij}$. Значение $x_{ij} = 1$ указывает на то, что компьютер $j$ выбран для обслуживания сети $i$, что обеспечивает связь между выбором компьютера и покрытием сети, и $x_{ij} = 0$ в противном случае.

## 2. Реализация метода полного перебора

Рассмотрим реализацию метода полного перебора для решения задачи выбора маршрутизаторов в компьютерной сети [9, 10]. Алгоритм представляет собой метод решения оптимизационных задач, основанный на переборе всех возможных вариантов решений. В контексте данной задачи алгоритм перебирает все возможные подмножества компьютеров и оценивает каждое подмножество в соответствии с целевой функцией и ограничениями.

Алгоритм работает следующим образом:

1. Генерируются все возможные комбинации компьютеров, от пустого множества, когда ни один компьютер не выбран, до множества, которое будет включать все компьютеры. Это достигается путем перебора от 0 до $2n-1$, где $n$ — это количество компьютеров.

2. Для каждого подмножества проверяется, покрыты ли все сети. Необходимо убедиться, что для каждой сети $i$ существует хотя бы один компьютер $j$ из подмножества, который сможет обслуживать эту сеть. Если сеть не покрыта, то данное подмножество неприемлемо, поэтому необходимо перейти к следующему подмножеству.

3. Если подмножество удовлетворяет ограничению по покрытию, то теперь его необходимо проверить на ограничение по мощности компьютеров. Для каждого компьютера $j$ нужно вычислить количество сетей, которые он обслуживает в текущем подмножестве. Если это количество будет превышать его мощность $d_j$, то подмножество считается неприемлемым.

4. Если подмножество удовлетворяет ограничениям по покрытию и по мощности, то вычисляется его стоимость с помощью целевой функции. Вычисляется сумма стоимостей $c_j$ для всех компьютеров, которые входят в подмножество и обслуживают хотя бы одну сеть.

5. Обновление лучшего решения: если стоимость текущего подмножества меньше стоимости наилучшего решения, найденного на данный момент, то текущее подмножество и его стоимость сохраняются как новое лучшее решение.

6. Оптимальное решение: после перебора всех возможных подмножеств алгоритм возвращает оптимальное подмножество компьютеров (то, которое обеспечивает покрытие всех сетей, удовлетворяет ограничениям по мощности и имеет минимальную стоимость).

На рис. 1 приведена общая блок-схема алгоритма.

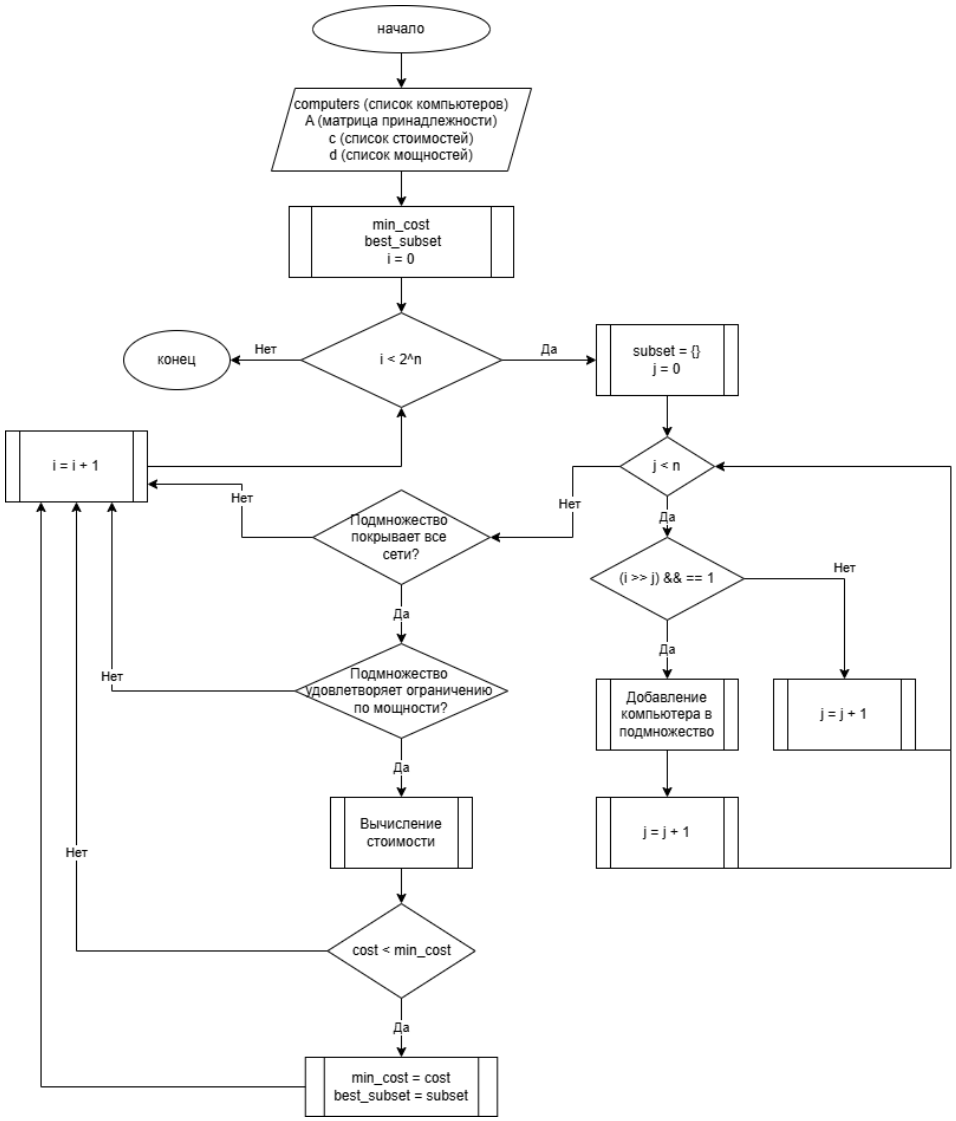



*Рис. 1. Общая блок-схема*

Рассмотрим простой пример, где определяется 3 компьютера, задается матрица принадлежности $A$, список стоимостей $c$ и список мощностей $d$. Результат работы программы представлен на рис. 2.

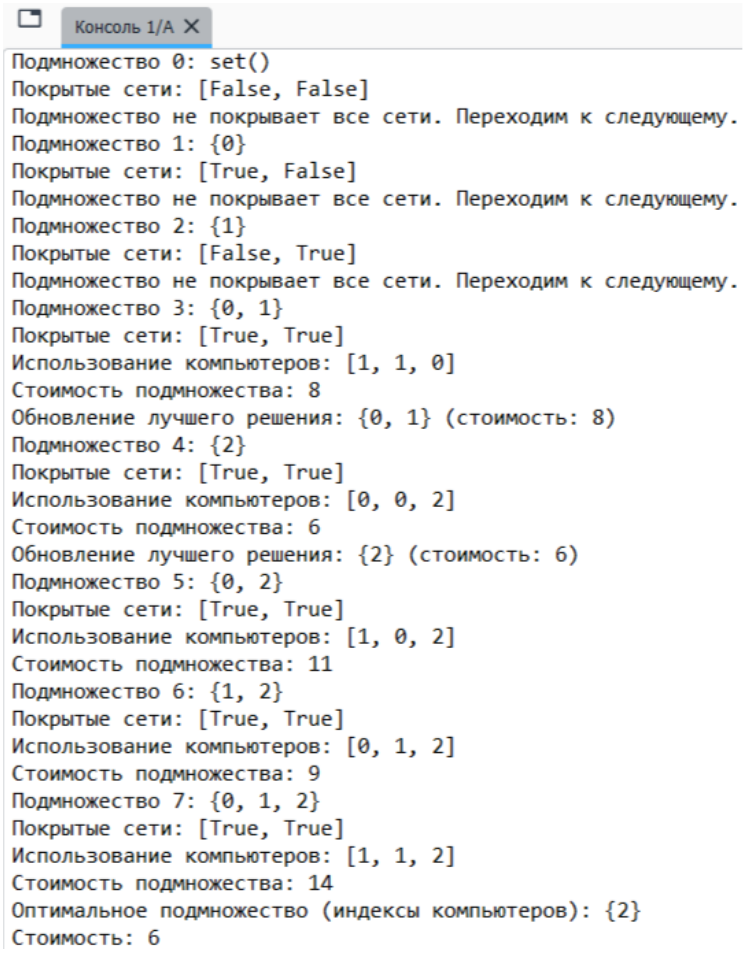



*Рис. 2. Результат работы*

Общая сложность алгоритма $O(2^n \cdot m)$. На рис. 3 представлена диаграмма, на которой изображена зависимость времени выполнения программы от количества компьютеров, которое подается на вход.

*Рис. 3. Диаграмма*

На диаграмме видно, что время выполнения алгоритма полного перебора возрастает с увеличением количества компьютеров $n$. Это означает, что для больших значений $n$, например, больше 20–30, алгоритм становится практически неприменимым из-за огромного времени вычислений.

## Заключение

В данной статье была рассмотрена математическая постановка задачи выбора оптимального набора маршрутизаторов в компьютерной сети. Был разработан алгоритм полного перебора для решения этой задачи. Был проведен анализ, который показал, что вычислительная сложность алгоритма делает его неприменимым для задач большой размерности. В дальнейшем предлагается модифицировать венгерский алгоритм для учета сильной разреженности матрицы.

## Литература


1. *Таха Хемди А.* Гл. 5.4 Задача о назначениях. Введение в исследование операций. 7-е изд. / пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2005.

2. *Вагнер Г.* Приложение 1.2 Решение задачи о назначениях. Основы исследования операций. – М. : Издательство «Мир», 1972.– Т. 1. / пер. с англ.

3. *Акоф Р., Сасиени М.* Глава 5. Распределительные задачи: назначение и размещение ресурсов. Основы исследования операций. – М. : Издательство «Мир», 1971.

4. *Burkard Rainer, Dell'Amico M., Martello S.* Assignment Problems (Revised reprint). SIAM. – 2012.

5. *Чернышов М. К.* Оптимизация процесса массовой рассылки сообщений в компьютерных сетях / М. К. Чернышов, Г. Д. Чернышова // В сборнике: Информатика: проблемы, методология, технологии. Материалы шестой международной научно-методической конференции. Федеральное агентство по образованию Российской Федерации, Воронежский государственный университет, НОЦ «Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах». – 2006. – С. 487–489.

6. *Манкрес Дж.* Алгоритмы для задачи о назначениях и транспортировке // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1957. – 5(1). – P. 32–38.

7. *Castanon D. A.* New assignment algorithms for data association // In Proc. SPIE. – 1992. – Vol. 1693. – P. 313–323.

8. *Kuhn H. W.* The Hungarian method for the assignment problem // Naval Research Logistics Quarterly. – 1955. – 2(1-2). – P. 83–97.

9. *Dantzig G. B.* Linear programming and extensions. Princeton, NJ : Princeton University Press. – 1963.

10. *Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. – 3-е изд. – Москва : Вильямс, 2014. – 1328 с.

11. *Вирт Н.* Алгоритмы и структуры данных. – Москва : ДМК Пресс, 2010. – 272 с.

УДК 004.056

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ НЕЧЕТКОЙ МЕТРИКИ

**А. Е. Кручинин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается задача построения нечетких метрик для использования в алгоритмах анализа данных, в частности, в задачах нечеткой кластеризации. Классические метрические пространства зачастую оказываются недостаточно гибкими для адекватного моделирования неопределенности и размытости, присущих реальным данным. В качестве альтернативы предлагается подход, основанный на теории нечетких метрических пространств. В статье детально описано построение нечеткой метрики с использованием аддитивных генераторов треугольных норм и конорм. Представлен конкретный пример генератора на основе параметризованной логарифмической функции, позволивший получить новые варианты T-норм, S-конорм и, как следствие, нечеткой метрики. Приведены аналитические выражения и графическая визуализация полученных функций. Целью работы является создание математического аппарата для последующей разработки и апробации алгоритмов нечеткой кластеризации, устойчивых к неопределенности исходных данных. Результаты могут найти применение в таких областях, как компьютерное зрение, обработка изображений и анализ текстовой информации.
**Ключевые слова:** нечеткое множество, нечеткая метрика, метрическое пространство, мера несходства, треугольная норма, треугольная конорма, аддитивный генератор, нечеткая кластеризация.

## Введение

Современные задачи анализа данных часто характеризуются высокой степенью неопределенности, неточности измерений и размытости границ между классами объектов. Традиционные методы классификации, требующие размеченных данных, не всегда применимы на практике из-за высокой стоимости или временных затрат на создание обучающих выборок. В этом контексте задача кластеризации (обучения без учителя) приобретает особую актуальность, позволяя выявлять скрытые структуры в данных на основе меры близости между объектами.

Однако классические метрики, такие как евклидово расстояние, оперируют четкими, детерминированными значениями, что может быть недостатком при работе с «зашумленными» или принципиально нечеткими данными (например, изображениями низкого разрешения, текстами с многозначной семантикой). Ответом на это ограничение стало развитие теории нечетких метрических пространств [1, 2].

В нечетком метрическом пространстве расстояние между точками $x$ и $y$ задается не числом, а функцией $d(x, y, \alpha)$, интерпретируемой как степень уверенности в том, что «расстояние» между объектами меньше некоторого порога $\alpha$. Такой подход позволяет более адекватно и естественно моделировать реальные ситуации.

Целью данной работы является разработка метода построения нечетких метрик на основе аппарата аддитивных генераторов треугольных норм (T-норм) и конорм (S-конорм). Полученные метрики предназначены для интеграции в алгоритмы нечеткой кластеризации (такие как *fuzzy k-means* и *fuzzy k-medoids*), что позволит повысить их эффективность при работе с нечеткими данными.

## 1. Описание используемого математического аппарата

### *1.1. Треугольные нормы и конормы*

Фундаментальным инструментом для построения нечетких операций являются треугольные нормы и конормы [1, 3], которые обобщают логические операции конъюнкции и дизъюнкции на единичный интервал $[0,1]$.

Треугольной нормой (Т-нормой) называется бинарная операции $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая для любых $x,y,z\in[0,1]$ следующим аксиомам:

1. Коммутативность: $T(x,y)=T(y,x)$.
2. Ассоциативность: $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$.
3. Ограниченность: $T(x,1)=x$.
4. Монотонность: $(x\le t)\wedge(y\le z)\Rightarrow T(x,z)\le T(y,z)$.

Треугольная конорма (S-конорма) — бинарная операции $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, также монотонная, коммутативная и ассоциативная, но условие ограниченности для нее задается в виде $S(x,0)=x$.

Заметим, что Т-нормы и S-конормы связаны соотношениями, которые представляют собой соответствующие законы де Моргана с операцией отрицания $n(x)=1-x$. Если для пары $(T,S)$ выполняется *закон де Моргана*, то норма $T$ и конорма $S$ называются *двойственными*.

Возможно представление треугольных норм и конорм на основе аддитивных генераторов, так как Т-нормы и S-конормы являются коммутативными и ассоциативными бинарными операциями.

### *1.2. Аддитивные генераторы*

Эффективным инструментом для построения Т-норм и S-конорм является использование аддитивных генераторов [3, 5].

**Определение 3.** Возрастающим генератором называется непрерывная строго возрастающая функция $\varphi_{\uparrow}:[0,1]\to[0,\infty)$, такая что $\varphi_{\uparrow}(1)=0$. Функция $\varphi_{\uparrow}^{-1}:[0,\infty)\to[0,1]$, такая что

$$\varphi_{\uparrow}^{-1}=\begin{cases}(\varphi_{\uparrow})^{-1}(x), & x\in\left[0,\varphi_{\uparrow}(1)\right],\\ 1, & x\in(\varphi_{\uparrow}(1),\infty),\end{cases}$$

называется псевдообратной для $\varphi_{\uparrow}(x)$.

**Определение 4.** Убывающим генератором называется непрерывная строго убывающая функция $\varphi_{\downarrow}:[0,1]\to[0,\infty)$, такая что $\varphi_{\downarrow}(1)=0$. Функция $\varphi_{\downarrow}^{-1}:[0,\infty)\to[0,1]$, такая что

$$\varphi_{\downarrow}^{-1}=\begin{cases}(\varphi_{\downarrow})^{-1}(x), & x\in\left[0,\varphi_{\downarrow}(0)\right],\\ 0, & x\in(\varphi_{\downarrow}(0),\infty),\end{cases}$$

называется псевдообратной для $\varphi_{\downarrow}(x)$.

Заметим, что на $[0,1]$ $\varphi_{\uparrow}^{-1}(\varphi_{\uparrow}(x))=x$ и $\varphi_{\downarrow}^{-1}(\varphi_{\downarrow}(x))=x$.

Так как треугольные норма и конорма обладают свойством ассоциативности, то имеет место их представление в виде [5]:

$$T(x,y)=\varphi_{\downarrow}^{-1}(\varphi_{\downarrow}(x)+\varphi_{\downarrow}(y)),$$
$$S(x,y)=\varphi_{\uparrow}^{-1}(\varphi_{\uparrow}(x)+\varphi_{\uparrow}(y)).$$

### *1.3. Понятие нечеткой метрики*

Пусть $a$ и $b$ — объекты заданного множества $U$, $d: U^2 \to [0,\infty)$ — функция, которая используется для оценки близости объектов (метрика). Такая функция должна удовлетворять следующим условиям:

1. $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
2. $\forall a,b \in U\ (d(a,b) = d(b,a))$;
3. $\forall a,b,c \in U\ (d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b))$;

Пусть $T$ — треугольная норма, $S$ — треугольная конорма, $d$: $X \times X \times (0,\infty) \to [0,1]$ — отображение, удовлетворяющее следующим условиям для любых $x, y, z \in X$ и $\alpha, \beta > 0$ [2]:

1. a) $d(x,y,\alpha) \in [0,1)$;
   b) $d(x,y,\alpha) \in (0,1]$;
2. a) $d(x,y,\alpha) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
   b) $d(x,y,\alpha) = 1 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x,y,\alpha) = d(y,x,\alpha)$;
4. a) $S(d(x,y,\alpha), d(y,z,\beta)) \ge d(x,z,\alpha+\beta)$;
   b) $T(d(x,y,\alpha), d(y,z,\beta)) \le d(x,z,\alpha+\beta)$;
5. $d(x,y,\cdot): (0,\infty) \to [0,1]$ есть непрерывная функция.

Отображение $d$ называется:

a) нечеткой S-*метрикой*, а тройка $(X,d,S)$ — S-метрическим пространством, если $d$ удовлетворяет условиям 1)–4) (a) и 5);

b) нечеткой T-*метрикой*, а тройка $(X,d,T)$ — T-метрическим пространством, если $d$ удовлетворяет условиям 1)–4) (b) и 5).

## 2. Построение метрики на основе аддитивного генератора

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = -\ln\left(\frac{\alpha x}{1+\alpha x}\right) + C,$$

где $C$ — произвольная константа. Исходя из определения убывающего генератора

$$\varphi(1) = 0 \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{\alpha x}{1+\alpha x}\right) + C = 0,$$

получим выражение для константы следующего вида:

$$C = \ln\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right).$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi$ является строго убывающей и непрерывной на $(0,1]$ при $\alpha > -1$. Таким образом, имеем убывающий генератор

$$\varphi_{\downarrow}(x) = \ln\left(\frac{1+\alpha x}{(1+\alpha)x}\right).$$

На рис. 1 приведен график функции $\varphi_{\downarrow}(x)$.

Используя представление через генератор, получаем параметрическую T-норму вида

$$T(x,y,\alpha) = \frac{(1+\alpha)xy}{1+\alpha(x+y)-\alpha xy}.$$

Данная треугольная норма $T$ непрерывна при $x \in [0,1]$, $\alpha > -1$, и для нее выполняется:

$$T(x,1,\alpha) = T(1,x,\alpha) = \frac{(1+\alpha)x}{1+\alpha(x+1)-\alpha x} = x.$$

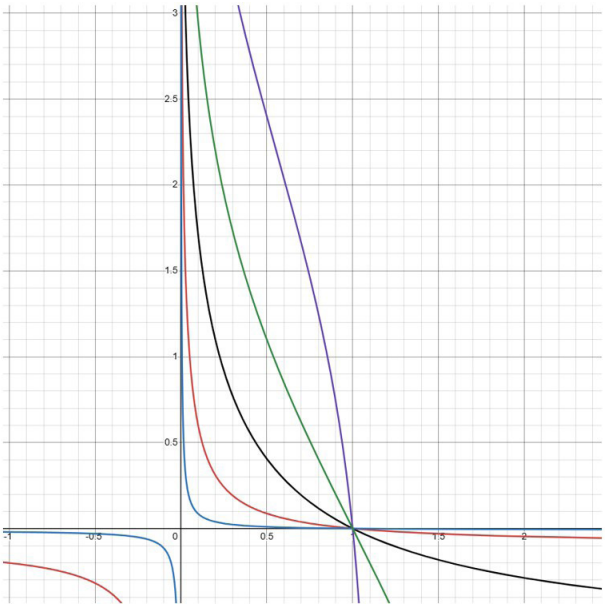


*Рис. 1. График функции $\varphi_{\downarrow}(x)$ при различных значениях параметра $\alpha$*

Применяя закон де Моргана, найдем S-конорму, двойственную полученной Т-норме

$$S(x,y,\alpha)=1-T(1-x,1-y,\alpha),$$

$$S(x,y,\alpha)=\frac{(1+\alpha)(x+y)-(1+2\alpha)xy}{1+\alpha-\alpha xy}.$$

Полученная треугольная норма $T(x,y,\alpha)$ не идемпотентна. К тому же, $T(x,y,\alpha)$ не субидемпотентна, а, следовательно, не является архимедовой, что указывает на ее специфические свойства и потенциальные области применения, отличные от стандартных.

Для построения метрики введем операцию сходства — *эквиваленцию*, моделируемую с помощью Т-нормы и импликации (так как Т-нормы и S-конормы моделируют операции типа умножения (конъюнкции) и сложения (дизъюнкции)):

$$E(x,y,\alpha)=T(I(x,y,\alpha),I(x,y,\alpha),\alpha),$$

где

$$I(x,y,\alpha)=1-T(x,1-y,\alpha)=\frac{1+\alpha+2\alpha xy+xy-\alpha y-\alpha x-x}{1+\alpha+\alpha xy-\alpha y}.$$

Тогда нечеткая метрика (мера несходства) может быть определена с помощью отрицания в виде

$$d(x,y,\alpha)=1-E(x,y,\alpha).$$

На рис. 2 представлен график полученной Т-нормы, на рис. 3 — график полученной S-конормы, на рис.4 — график полученной меры сходства (нечеткой эквиваленции).

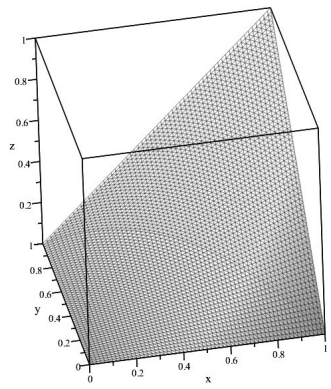


*Рис. 2. График функции $T(x,y,\alpha)$*

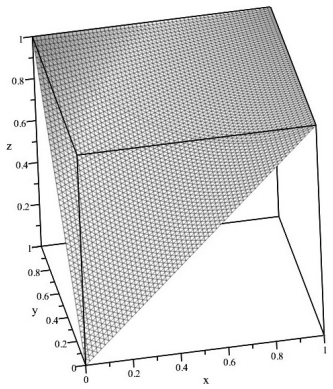


*Рис. 3. График функции $S(x,y,\alpha)$*

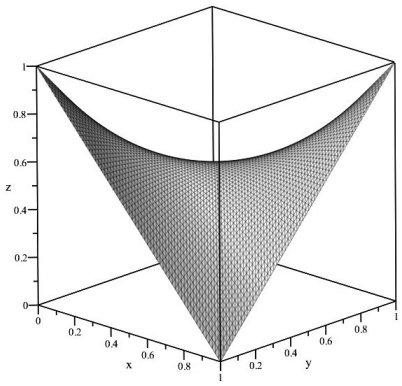



*Рис. 4. График функции* $E(x, y, \alpha)$

**Заключение**

В работе предложен метод построения нечетких метрик на основе аддитивных генераторов треугольных норм. На конкретном примере логарифмического генератора получены параметрические T-норма и S-конорма, а на их основе — нечеткая метрика $d(x, y, \alpha)$. Полученная на основе операции эквиваленции метрика представляет сложный, но концептуально интересный подход к определению несходства. Перспективой данной работы является интеграция разработанных нечетких метрик в алгоритмы нечеткой кластеризации (fuzzy k-means, fuzzy k-medoids) и их всесторонняя апробация на реальных данных, в частности, в задачах обработки изображений и анализа текстов, где учет неопределенности является критически важным.

**Литература**

1. *Леденева Т. М.* Основы нечеткого моделирования: учебно-методическое пособие. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2022. – 129 с.

2. *Ralević N. M., Paunović M., Iričanin B.* Fuzzy Metric Space and Applications in Image Processing // Mathematica Montisnigri. – 2020. – Vol. XLVIII. – P. 103–117.

3. *Klement E. P., Mesiar R., Pap E.* Triangular Norms. – Springer, 2000.

4. *Zhang H., Wei H., Wang B.* A New Fuzzy Smoothing Term Model For Stereo Matching // The Computer Journal. – 2024. – Vol. 67. – P. 746–761.

5. Construction of t-norms // electronic resource. URL: https://dev.abcdef.wiki/wiki/Construction_of_t-norms (дата обращения: 22.05.2025)

УДК 004.942

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

**П. И. Кудрявцев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье представлена динамическая модель распространения эпидемии на основе, учитывающая пространственное движение индивидов и их взаимодействие в реальном времени. Модель позволяет анализировать влияние различных краевых режимов — таких как использование средств индивидуальной защиты, обращение в медицинские учреждения и введение карантина — на динамику эпидемии. Проведены три вычислительных эксперимента, демонстрирующих, как изменение поведенческих параметров индивидов влияет на скорость и масштабы распространения инфекции. Результаты показывают, что сознательное поведение, включая соблюдение карантина и обращение за медицинской помощью, значительно снижает количество заражённых. Разработанная модель может быть адаптирована для оптимизации стратегий борьбы с эпидемиями, включая планирование карантинных мер и распределение ресурсов.
**Ключевые слова:** моделирование эпидемии, SEIR-модель, пространственное распространение, карантинные меры, индивидуальная защита, сознательность, численный эксперимент, область интереса, моделирование поведения, индивид.

## Введение

Объектом рассмотрения настоящей статьи является модель распространения крупной эпидемии, численные эксперименты на её основе и анализ влияния различных краевых режимов на итоговый результат.

В качестве основы для модели распространения эпидемии выбрана SEIR модель [1, 2]. Она разделяет всех индивидов на 4 категории: восприимчивые к болезни (Susceptible), находящиеся в инкубационном периоде (Exposed), инфицированные (Infected) и выздоровевшие (Recovered). Этот подход позволит смоделировать процесс распространения эпидемии для различных сценариев при относительно небольшом количестве входных данных. Однако, разработанный алгоритм моделирования поведения людей позволяет использовать и другие подобные модели распространения эпидемии.

## 1. Описание задачи

### *1.1. Карта симуляции, объекты, население*

Для моделирования процесса распространения эпидемии используется представленная карта территории на рис. 1, имитирующая отдельный район города.

### *1.2. Условия и ограничения*

В решении задачи используются следующие условия и ограничения:

1. Параметры эпидемии, такие как заразность и шансы на выздоровление, не изменяются на протяжении всей эпидемии и не зависят от климатических и прочих условий (не происходит мутаций и адаптаций, болезнь одинаково распространяется в любом климате).

2. Выздоровевшие индивиды приобретают иммунитет и не могут повторно заразиться.

3. Все индивиды восприимчивы, имеют одинаковые параметры вероятности заражения и выздоровления.

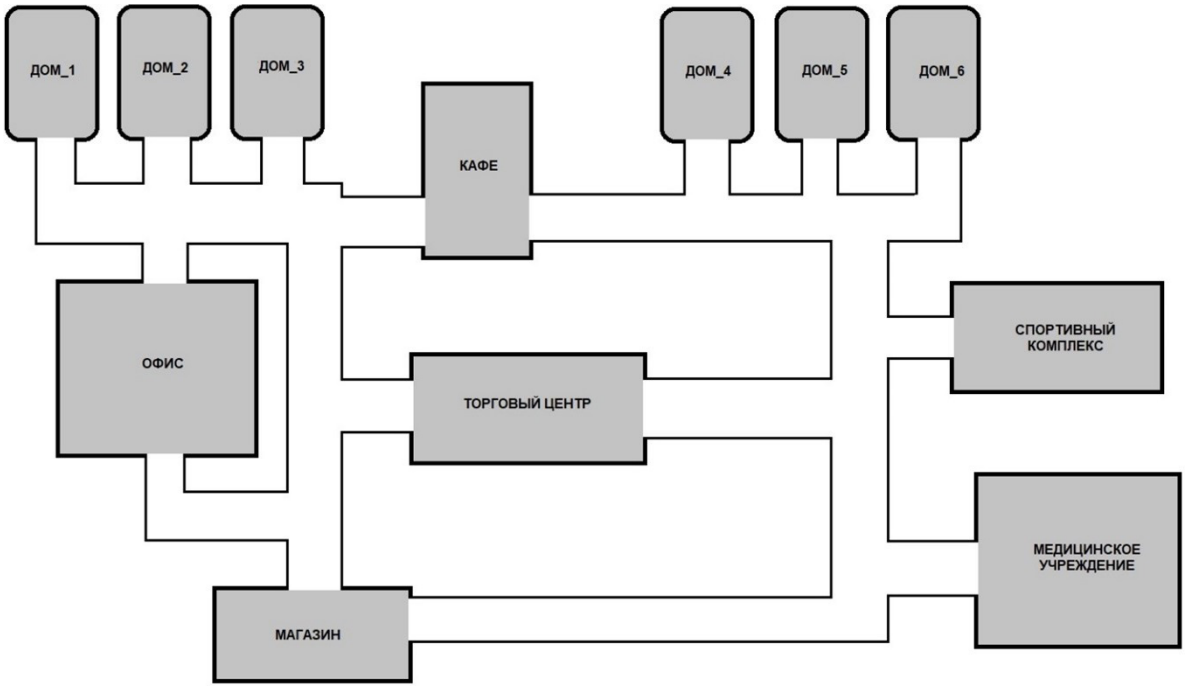



*Рис. 1. Используемая в программе карта территории*

4. Индивиды имеют разное значение параметра «сознательности» — вероятности направится в медицинское учреждение в случае заболевания и использования средств индивидуальной защиты при введении карантина (использование этих средств уменьшает шансы заражения индивида и его заразность для остальных).

### *1.3. Рассматриваемые эксперименты*

Для изучения и сравнения поведения и решения будут моделироваться следующие ситуации распространения эпидемии с одинаковыми начальными данными:

1. Индивиды не используют средства индивидуальной защиты, не обращаются в медицинское учреждение в случае заболевания, карантин не вводится.

2. Индивиды не используют средства индивидуальной защиты, но обращаются в медицинское учреждение в случае заболевания в соответствии с параметром «сознательности», карантин не вводится.

3. Индивиды начинают использовать средства индивидуальной защиты после введения карантина в соответствии с параметром «сознательности», обращаются в медицинское учреждение в случае заболевания так же в соответствии с параметром «сознательности», карантин вводится при заражении более 20 % индивидов.

По результатам экспериментов будут оцениваться количество зараженных индивидов за 21 день.

## 2. Используемая модель распространения эпидемии и модель поведения индивидов

### *2.1. Модель распространения эпидемии*

Модель распространения эпидемии основана на 4 классах SEIR модели:

– Susceptible (*S*) — восприимчивые к инфекции индивиды, которые могут заразиться, обозначены зеленым цветом;

– Exposed ($E$) — индивиды, которые подверглись воздействию инфекции, проявляются симптомы, но не могут передавать инфекцию, обозначены желтым цветом;

– Infected ($I$) — инфицированные индивиды, которые могут передавать инфекцию другим, обозначены красным цветом;

– Recovered ($R$) — выздоровевшие индивиды, которые приобрели иммунитет и больше не могут заразиться или передавать инфекцию, обозначены синим цветом.

Вероятность передачи инфекции между индивидами при их непосредственном контакте:

$$P(S_a \to E_a) = \beta, \tag{1}$$

если $\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \le r$, где $(x_a, y_a)$ — координаты индивида $S_a$, $(x_b, y_b)$ — координаты индивида $I_b$, $r$ — радиус передачи инфекции.

После заражения индивид $I_a$ находится в состоянии инкубационного периода случайное время из промежутка $t \sim Uniform(t_{\min}, t_{\max})$, после чего переходит в состояние $I$.

Во время нахождения в состоянии $I$ индивид может выздороветь с вероятностью $\gamma$ на каждой итерации симуляции и перейти в состояние $R$.

Так же индивиды обладают параметром сознательности $m$, который определяет вероятность использования ими средств индивидуальной защиты и обращения в медицинское учреждение в случае заболевания во втором и третьем экспериментах.

### *2.2. Модель поведения индивидов*

Индивиды перемещаются по двухмерной карте, представляющей собой лабиринт, содержащей «области интереса», такие как дома, офисы, торговые центры и т.д., и улицы, соединяющие эти объекты. Каждый индивид выбирает себе случайный объект и стремится достичь его [3].

Индивид движется в направлении целевой точки с постоянной скоростью. Вектор движения нормализуется:

$$\vec{v} = \left( \frac{x_2 - x_1}{d}, \frac{y_2 - y_1}{d} \right), \tag{2}$$

где $\vec{v}$ — единичный вектор направления движения, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — Евклидово расстояние, $(x_1, y_1)$ — координаты индивида, $(x_2, y_2)$ — координаты центра целевого объекта.

Обнаружение препятствий (стен лабиринта) используется следующий алгоритм:

– для каждой стены с точками $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$ вектор стены $\vec{w}$ определяется как:

$$\vec{w} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1); \tag{3}$$

– вектор стены нормализуется для получение единичного вектора направления:

$$\left\| \vec{w} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{4}$$

$$\vec{n} = \left( -\frac{y_2 - y_1}{\| \vec{w} \|}, \frac{x_2 - x_1}{\| \vec{w} \|} \right); \tag{5}$$

– определяется нормальный вектор $\vec{n}$ к стене:

$$\vec{w}_{normalized} = \left( \frac{x_2 - x_1}{\| \vec{w} \|}, \frac{y_2 - y_1}{\| \vec{w} \|} \right), \tag{6}$$

– определяется расстояние от индивида до стены:

$$d_{wall} = \frac{| (y_2 - y_1) \cdot x_a - (x_2 - x_1) \cdot y_a + x_2 \cdot y_1 - y_2 \cdot x_1 |}{\| \vec{w} \|}; \tag{7}$$

– если $d_{wall} \le d_r$, то стена найдена. Параметр $d_r$ задается случайным образом и необходим для того, чтобы индивиды ходили по улицам не вдоль стен.

Далее происходит выбор оптимального направления движения вдоль стены в сторону выбранного объекта. Для этого используется скалярное произведение нормализованного вектора стены $\vec{w}_{normalized}$ и вектора от текущей позиции $P_a = (x_a, y_a)$ к цели $P_t = (x_t, y_t)\vec{t} = (x_t - x_a, y_t - y_a)$:

$$dp = \vec{w}_{normalized} \cdot \vec{t} = \frac{(x_2 - x_1)(x_t - x_a) + (y_2 - y_1)(y_t - y_a)}{\| \vec{w} \|}. \quad (8)$$

Если $dp > 0,$ то движение вдоль стены в направлении $\vec{w}_{normalized}$ приближает индивида к цели, иначе удаляет.

Корректировка позиции во время движения вдоль стены:

$$P_a = (x_a, y_a) = (x_{wall} + d_{wall} \cdot n_x, y_{wall} + d_{wall} \cdot n_y). \quad (9)$$

После прохождения стены снова вычисляется вектор $\vec{v}$ прямолинейного движения к цели.

При достижении цели индивид находится внутри и совершает хаотичные перемещения по области объекта случайное количество времени из диапазона, заданного для каждого объекта, что моделирует нахождение индивидов в различных местах. Например, для объекта «Офис» время пребывания составляет от 6 до 10 часов, для объекта «Торговый центр» от 30 минут до 4 часов.

По истечению времени пребывания индивида в «области интереса», он покидает её и выбирает новую случайную цель. Во втором и третьем экспериментах индивиды в соответствии с параметром сознательности $m$ в случае заражения могут менять свою цель на «Медицинское учреждение». Нахождение индивида внутри увеличивает коэффициент выздоровления $\gamma$ на 100 %. Индивид так же может покинуть его до своего выздоровления в соответствии с параметром сознательности.

В случае введения карантина, использование средств индивидуальной защиты снижает радиус передачи заболевания $r$ на 30 % и коэффициент передачи инфекции $\beta$ на 50 %.

## 3. Моделирование

Параметры эпидемии:
- $\beta = 0.1,$
- $\gamma = 0.05,$
- начальное число инфицированных $I_0 = 2,$
- начальное число индивидов $I = 100,$
- радиус передачи заболевания $r = 10$ px.

### *3.1. Вычислительный эксперимент 1*

Условия: индивиды не используют средства индивидуальной защиты, не обращаются в медицинское учреждение в случае заболевания, карантин не вводится.

Результат: за 21 день было инфицировано 97 из 100 индивидов.

На рис. 2 представлен интерфейс разработанной программы и визуализация начала распространения эпидемии, на рис. 3 — визуализация распространения эпидемии на 8 день.

### *3.2. Вычислительный эксперимент 2*

Условия: индивиды не используют средства индивидуальной защиты, но обращаются в медицинское учреждение в случае заболевания в соответствии с параметром «сознательности», карантин не вводится.

Результат: за 21 день было инфицировано 81 из 100 индивидов.

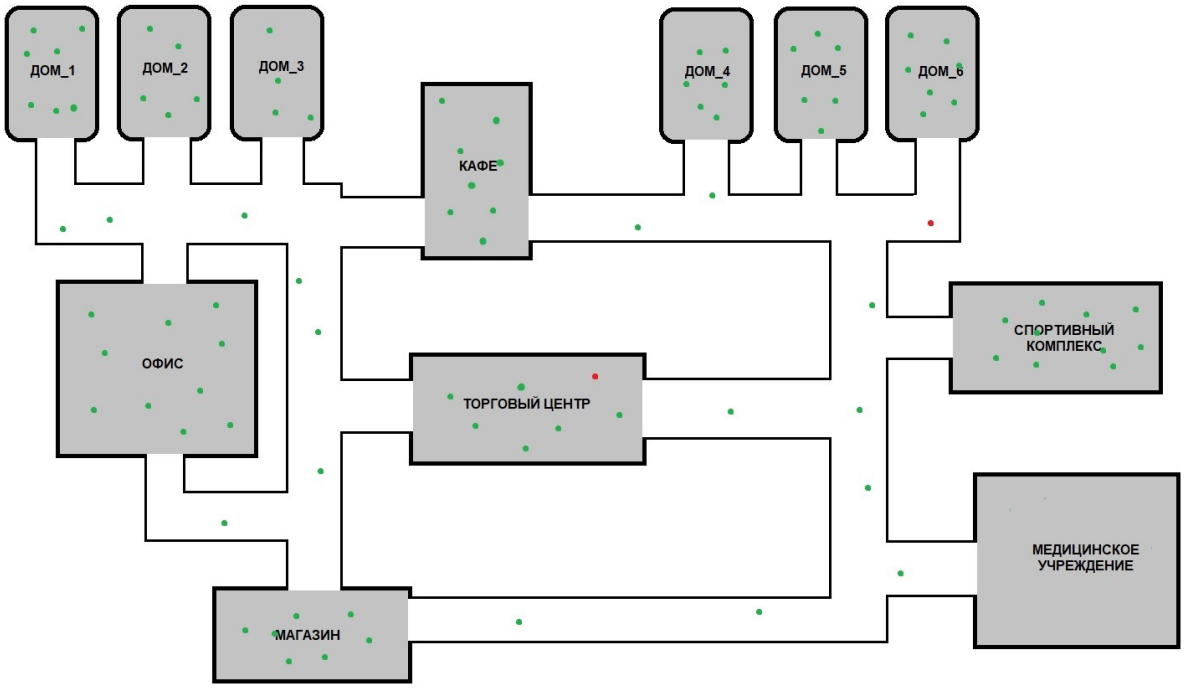



*Рис. 2. Визуализация распространения эпидемии в начале симуляции*

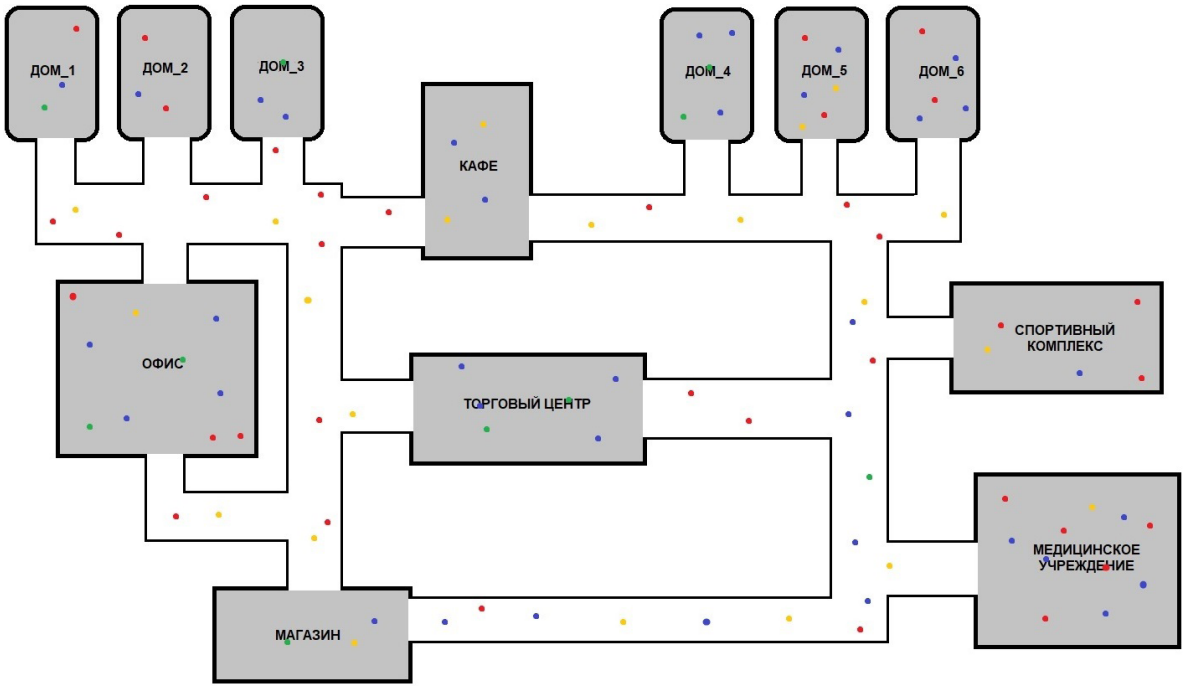



*Рис. 3. Визуализация распространения эпидемии на 8 день*

В сравнение с экспериментом 1 количество инфицированных снизилось, однако большая часть людей так же успела заразиться.

### *3.3. Вычислительный эксперимент 3*

Условия: индивиды начинают использовать средства индивидуальной защиты после введения карантина в соответствии с параметром «сознательности», обращаются в медицинское учреждение в случае заболевания так же в соответствии с параметром «сознательности», карантин вводится при заражении более 20 % индивидов.

Результат: за 21 день было инфицировано 54 из 100 индивидов.

Сравнивая полученный результат с результатами экспериментов 1 и 2, можно сделать вывод о том, что введение карантина, использование средств индивидуальной защиты и сознательное обращение в медицинское учреждение существенное снижает скорость распространения эпидемии.

## Заключение

Реализованная динамическая модель распространения эпидемии, учитывающая пространственное движение индивидов и их взаимодействие в реальном времени, в отличие от классической SEIR-модели, предлагает более реалистичный подход к моделированию распространения эпидемий. Это позволяет более точно моделировать распространение заболеваний в условиях, приближенных к реальным социальным системам.

Численные эксперименты продемонстрировали, как краевые режимы (например, ограничение передвижений, изменение радиуса заражения или вероятности передачи инфекции) влияют на динамику эпидемии. Полученные результаты подчеркивают важность учета пространственной и временной изменчивости при моделировании эпидемических процессов. Разработанная модель может быть адаптирована для анализа различных сценариев, включая введение карантинных мер, изменение плотности населения или оценку эффективности вакцинации.

Использование подобных динамических моделей позволяет не только прогнозировать масштабы и скорость распространения эпидемий, но и оптимизировать стратегии борьбы с ними, включая распределение ресурсов, планирование карантинов и разработку целевых медицинских мероприятий. Это даёт возможность заблаговременно подготовиться к потенциальным угрозам и минимизировать их последствия для общества.

Работа выполнена под руководством профессора, д-ра физ.-мат. наук, профессора кафедры математического и прикладного анализа ВГУ, Половинкина Игоря Петровича.

## Литература

1. *Fred Brauer* The Final Size of a Serious Epidemic/ Fred Brauer // Bulletin of Mathematical Biology. – 2018. – 81:869–877 – С. 869–871.

2. Компартментарные модели в эпидемиологии. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology – (Дата обращения: 18.10.2025).

3. Crowd simulation. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Crowd_simulation – (Дата обращения: 20.10.2025).

УДК 519.6

# МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГОЛОГРАММЫ ШУМОИЗЛУЧЕНИЯ ПОДВОДНОГО АППАРАТА

**В. М. Кузькин[1], С. А. Переселков[2], В. А. Башкарев[2], В. Н. Ладыкин[2], А. С. Переселков[2]**

*[1]Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Исследовано поведение параметров функции углового распределения спектральной плотности голограммы гидроакустического сигнала от параметров движущегося источника в мелководном акустическом волноводе. Параметрами функции обнаружения были приняты координаты максимума и ширина полосы на уровне полумаксимума. Проведен анализ выявленных аналитических закономерностей с результатами численного эксперимента на основе модового подхода.
**Ключевые слова:** интерферограмма, голограмма, угловое распределение спектральной плотности, гидроакустический волновод, интерференционный инвариант, оценка параметров источника.

## Введение

Повышение требований по точности (и скорости) оценки параметров в задаче гидролокации инициируют разработку новых подходов в обработке акустических сигналов. Одним из таких подходов является метод на основе интерферометрической обработки – голографический метод. Голографическая обработка сигналов позволяет производить оценки интересующих параметров с повышенной точностью при малом входном отношении сигнал/помеха (с/п) и в отсутствие априорного знания о передаточной функции акватории. Принимаемый акустический сигнал последовательно преобразуется в интерферограмму, голограмму — спектральную плотность интерферограммы, функцию обнаружения — угловое распределение спектральной плотности на голограмме. Интересующая для гидролокации информация извлекается из конфигурации спектральной плотности голограммы. Использование голограммы и функции обнаружения позволяют оценивать дистанцию до объекта, скорость, пеленг, разрешать нескольких источников. В связи с этим важным является выяснить закономерности формирования функции обнаружения от параметров движущегося источника и параметров обработки сигналов в мелководных волноводах. Аналитическим методом и методом численного эксперимента выявлены зависимости между координатой максимума и шириной полосы функции обнаружения на уровне ее полумаксимума. Проведено сравнение результатов аналитических методов и численного эксперимента.

## 1. Интерферометрическая обработка

Детализируем последовательность действий по обработке принимаемого сигнала. На входе имеем сигнал в виде изменений звукового давления принимаемого посредствам скалярного приемника. Из зафиксированные приемником реализации звукового давления состоящий из полезного сигнала и аддитивной помехи

$$p(f,t) = s(f,t) + n(f,t). \tag{1}$$

формируется интерферограмма $I(f,t)$ звукового давления

$$I(f,t) = p(f,t)\,p(f,t)^* = \left|s(f,t)\right|^2 + \left|n(f,t)\right|^2 + \left[s^*(f,t)n(f,t) + [n^*(f,t)s(f,t)]\right]. \tag{2}$$

где верхний индекс «*» обозначает комплексно-сопряженную величину. Первые два слагаемые (2) дают интерферограммы сигнала и помехи, а третье — взаимную корреляционную функцию сигнала и помехи. Сигнал и помеха некоррелированы, поэтому третье слагаемое имеет вид слабоконтрастного фона и им можно пренебречь. Интерферограммы сигнала и помехи определяют выходное отношение с/п.

Применением к интерферограмме (2) двумерного преобразования Фурье вычисляется голограмма $F_1(\tau,\nu)$ реализации звукового давления. Спектральная плотность голограммы, пренебрегая в (2) третьим слагаемым по сравнению с первыми двумя слагаемыми, равна сумме голограмм сигнала и помехи

$$F_1(\tau,\nu) \approx \int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} [|s(f,t)|^2 + |n(f,t)|^2]\exp[i2\pi(\nu t - f\tau)]dfdt = F_s(\tau,\nu) + F_n(\tau,\nu), \tag{3}$$

где $\nu$ и $\tau$ — частота и время голограммы; $f_{1,2} = f_0 \mp (\Delta f/2)$, $f_0$ — средняя частота спектра.

В приближении линейной волноводной дисперсии (линейной зависимости фазовой скорости от частоты) и при выполнении условия

$$r_0 \gg |w|\Delta t \tag{4}$$

радиальная скорость источника $w$ и начальное расстояние $r_0$ в момент времени $t = 0$ связаны с координатами пиков фокальных пятен зависимостями

$$\dot{w} = -2\pi\kappa_{w\mu}\nu_\mu, \;\; \dot{r}_0 = \kappa_{r\mu}\tau_\mu, \tag{5}$$

где

$$\kappa_{w\mu} = \left|h_{m(m+\mu)}(f_0)\right|^{-1}, \;\; \kappa_{r\mu} = 2\pi\left|dh_{m(m+\mu)}(f_0)/df\right|^{-1}. \tag{6}$$

Здесь $h_{mn} = h_m - h_n$, $h_m$ — горизонтальное волновое число (постоянная распространения) $m$-й моды. Восстановленные параметры источника, в отличие от их истинных значений, отмечены точкой сверху. Черта сверху означает усреднение по номерам мод.

Функция обнаружения голограммы, определяющая дальность обнаружения, пеленг и разрешение источников, равна

$$G_I(\chi) = \int_0^{\Delta\tau} |F_I(\tau,\chi\tau)|d\tau, \tag{7}$$

где $\Delta\tau$ — линейный размер области фокусировки по оси времени $\tau$; $\chi$ — варьируемое значение углового коэффициента при интегрировании вдоль прямых $\nu = \chi\tau$. При приближении источника к приемнику $0 < \chi < \infty$, при удалении $-\infty < \chi < 0$. В отсутствии помехи и возмущения среды максимум функции обнаружения достигается при значении $\chi = \varepsilon$.

Проанализируем поведение характеристик функции обнаружения в отсутствии помехи, когда $F_1(\tau,\chi\tau) = F_s(\tau,\chi\tau)$. Рассмотрим, как связаны величины $\varepsilon$ и $\Delta\chi$ с параметрами шумового источника и обработки сигналов. В акустике океана интерференционную структуру поля принято характеризовать интерференционным (волноводным) инвариантом (ИИ) $\beta$ [12]

$$\beta = \frac{\Delta f/f_0}{\Delta r/r_0}, \tag{8}$$

где $\Delta f = f - f_0$, $\Delta r = r - r_0$ — приращения частоты и расстояния, отвечающие сдвигу локального интерференционного максимума волнового поля на плоскости частота-расстояние; $f_0$, $r_0$ — координаты локального максимума поля. Альтернативная форма ИИ

$$\beta = -\frac{1}{f_0}\frac{h_{mn}(f_0)}{dh_{mn}(f_0)/df}. \tag{9}$$

Восстанавливаемые параметры источника (5) дают количественную формулировку этой зависимости. Для решения поставленной задачи ширину полосы $\Delta\chi$ функции обнаружения

определим как угловой размер между прямыми $v=[\varepsilon+(1/\Delta t\tau_{M-1})]\tau$ и $v=[\varepsilon-(1/\Delta t\tau_{M-1})]\tau$ в точках $(\tau_{M-1}, v_{M-1}+(1/\Delta t))$ и $(\tau_{M-1}, v_{M-1}-(1/\Delta t))$

$$\Delta\chi=\frac{v_{M-1}+(1/\Delta t)}{\tau_{M-1}}-\frac{v_{M-1}-(1/\Delta t)}{\tau_{M-1}}=\frac{2}{\tau_{M-1}\Delta t}. \tag{10}$$

Согласно (5) и (9) получаем искомые выражения для координаты максимума и ширины полосы функции обнаружения

$$\varepsilon=\frac{\dot{w}}{\dot{r}_0}f_0\beta, \tag{11}$$

$$\Delta\chi=4\pi\frac{f_0\beta}{\Delta t\dot{r}_0 h_{1M}(f_0)}=2\frac{f_0|\dot{w}|\beta}{\Delta t\dot{r}_0 v_{M-1}}. \tag{12}$$

Эти соотношения связывают характеристики функции обнаружения с парамтрами движущегося источника и обработки сигналов для мелководной акватории, характеризующейся ИИ $\beta$.

## 2. Численный эксперимент

Рассмотрим влияние параметров движущегося источника (расстояния $r_0$, радиальной скорости $w$) и параметров обработки (времени наблюдения $\Delta t$, частотного диапазона $\Delta f$) на характеристики функции обнаружения (координаты максимума $\varepsilon$, ширины $\Delta\chi$). Помеха отсутствует. Звуковые поля в точках приема рассчитывались в приближении модового подхода [15]. Результаты моделирования представлены на рис. 1–5. Ширина полосы функции обнаружения рассчитывалась на уровне половины от максимума. При численных оценках характеристик функции обнаружения в отсутствие помехи модельные и восстановленные параметры источника считаются равными, $\dot{r}_0=r_0$, $\dot{w}=w$.

На рис. 1 и рис. 2 представлены зависимости координаты максимума $\varepsilon$ и ширины полосы функции $\Delta\chi$ обнаружения от расстояния $r$ для различных частотных диапазонов $\Delta f_i$. Величины $|\varepsilon|$ и $\Delta\chi$ уменьшаются и возрастают с увеличением расстояния $r$ и частотного диапазона $\Delta f$.

При увеличении радиальной скорости $w$ и времени наблюдения $\Delta t$ наблюдается увеличение $|\varepsilon|$ и уменьшение $\Delta\chi$ соответственно. Рис. 3 и рис. 4 иллюстрируют зависимости $\varepsilon$ и $\Delta\chi$ от радиальной скорости $w$ при разных расстояниях для различных частотных диапазонов $\Delta f_i$. Величины $|\varepsilon|$ и $\Delta\chi$ возрастают с увеличением радиальной скорости источника, частотного

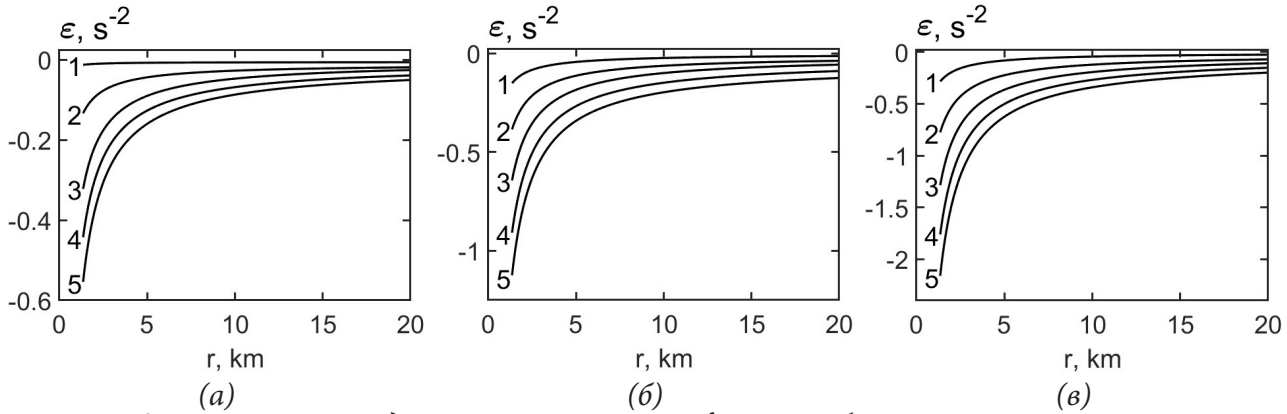



*Рис. 1. Зависимость координаты максимума $\varepsilon$ функции обнаружения от расстояния $r$ при различных значениях скорости $w$: (а) $w=1$ м/с, (б) $w=2$ м/с, (в) $w=4$ м/с. Кривая 1 — частотный диапазон $\Delta f_1$, кривая 2 — $\Delta f_2$, кривая 3 — $\Delta f_3$, кривая 4 — $\Delta f_4$, кривая 5 — $\Delta f_5$. Время наблюдения $\Delta t=60$ с*

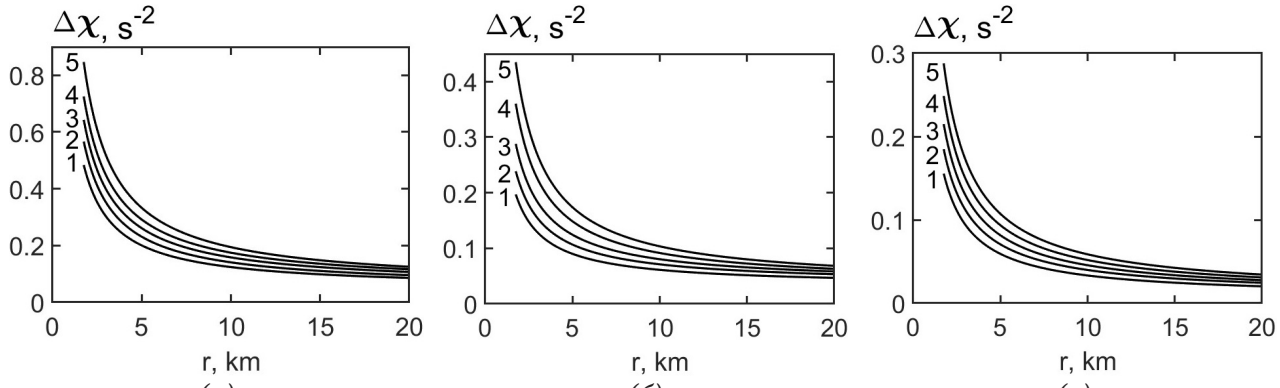



*Рис. 2. Зависимость ширины полосы $\Delta\chi$ функции обнаружения от расстояния $r$ при различных временах наблюдения $\Delta t$: (а) $\Delta t = 30$ с, (б) $\Delta t = 60$ с, (в) $\Delta t = 90$ с. Кривая 1 — частотный диапазон $\Delta f_1$, кривая 2 — $\Delta f_2$, кривая 3 — $\Delta f_3$, кривая 4 — $\Delta f_4$, кривая 5 — $\Delta f_5$. Радиальная скорость $w = 2$ м/с*

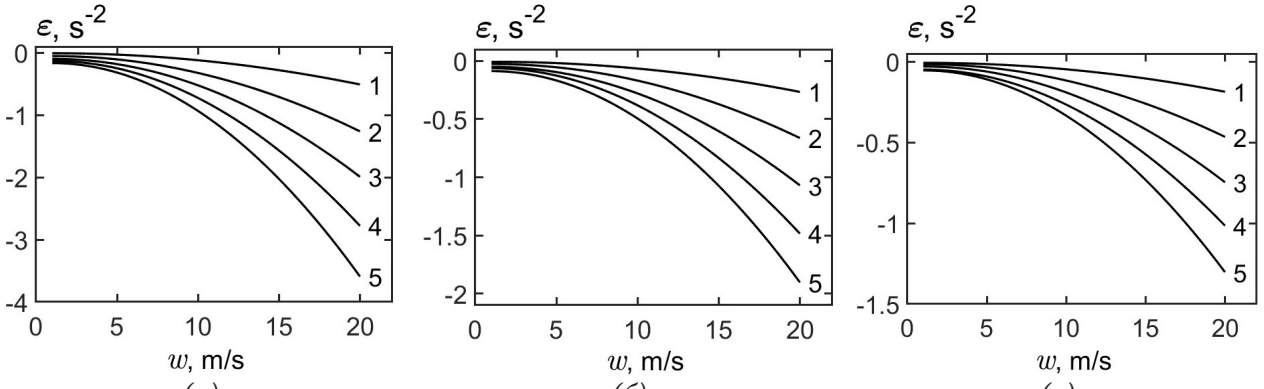



*Рис. 3. Зависимость координаты максимума $\varepsilon$ функции обнаружения $\varepsilon$ от радиальной скорости $w$ при различных расстояниях $r$: (а) $r = 5$ км, (б) $r = 10$ км, (в) $r = 15$ км. Кривая 1 — $\Delta f_1$, 2 — $\Delta f_2$, 3 — $\Delta f_3$, 4 — $\Delta f_4$, 5 — $\Delta f_5$. Время наблюдения $\Delta t = 60$ с*

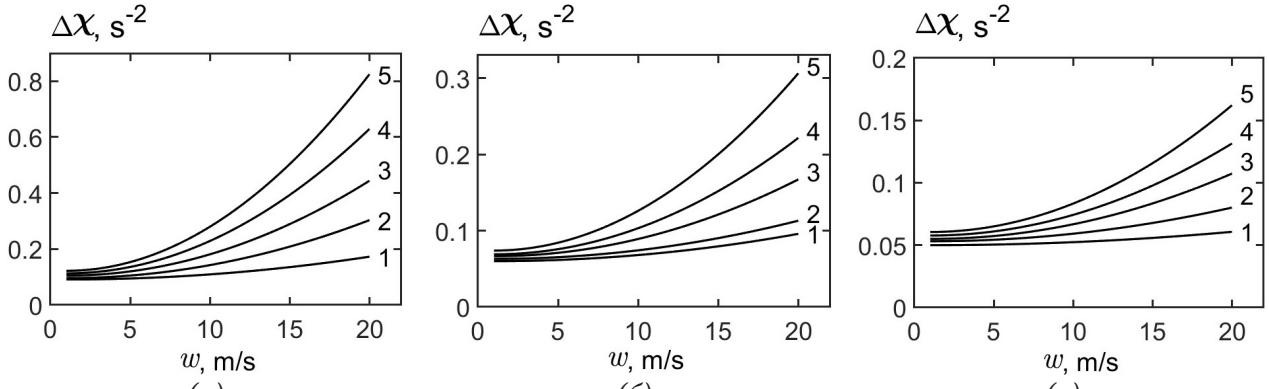



*Рис. 4. Зависимость ширины полосы $\Delta\chi$ функции обнаружения от радиальной скорости $w$ при различных расстояниях $r$: (а) $r = 5$ км, (б) $r = 10$ км, (в) $r = 15$ км. Кривая 1 — $\Delta f_1$, 2 — $\Delta f_2$, 3 — $\Delta f_3$, 4 — $\Delta f_4$, 5 — $\Delta f_5$. Время наблюдения $\Delta t = 60$ с*

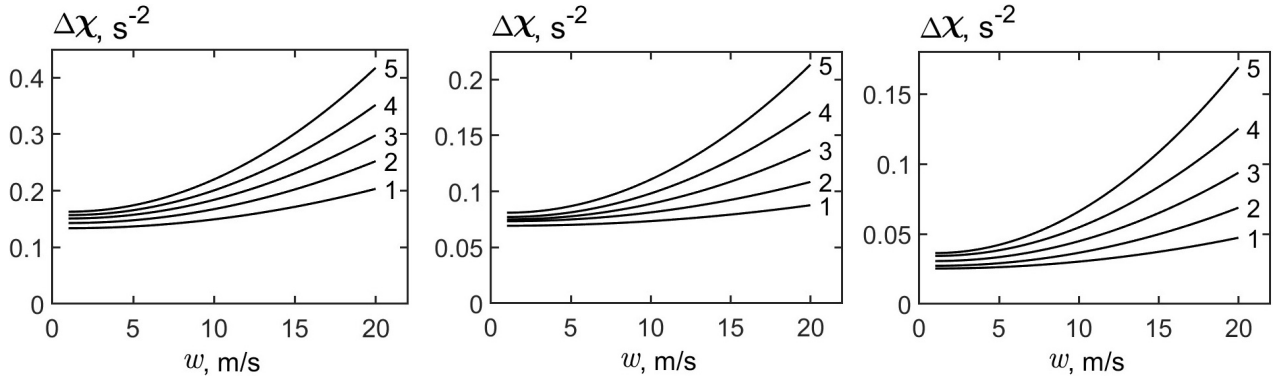



*Рис. 5. Зависимость ширины полосы $\Delta\chi$ функции обнаружения от радиальной скорости $w$ при различных временах наблюдения $\Delta t$: (а) $\Delta t = 30$ с, (б) $\Delta t = 60$ с, (в) $\Delta t = 90$ с. Кривая 1 — $\Delta f_1$, 2 — $\Delta f_2$, 3 — $\Delta f_3$, 4 — $\Delta f_4$, 5 — $\Delta f_5$. Расстояние $r = 10$ км*

диапазона и уменьшением расстояния. Рис. 5 демонстрирует поведение ширины полосы $\Delta\chi$ функции обнаружения при изменении радиальной скорости w для различных времен наблюдения $\Delta t$. Ширина полосы возрастет с увеличением радиальной скорости и уменьшается при увеличении времени наблюдения. Соответствие между характеристиками функции обнаружения, получаемые на основе данных моделирования и выражений (11), (12), проиллюстрируем на пяти примерах. При численных оценках ширины полосы (12) полагалось число мод $M = N$, что, естественно, должно приводить к заниженным оценкам. Величины $\varepsilon$ и $\Delta\chi$, определяемые численным моделированием, обозначаются нижним индексом «1», а определяемые по выражениям (11), (12) — нижним индексом «2». Первый пример рассмотрим на основе рис. 1б для расстояния $r = 5$ км. По результатам моделирования $\varepsilon_1 = -0.047, -0.32$ $c^{-2}$ для частотных диапазонов $\Delta f_1$, $\Delta f_5$ соответственно. Согласно соотношению (11) $\varepsilon_2(\Delta f_1) = -0.053$ $c^{-2}$ и $\varepsilon_2(\Delta f_5) = -0.30$ $c^{-2}$. Значения $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ близки между собой для существенно разных частотных диапазонов. Второй пример рассмотрим на основе рис. 2б для расстояния $r = 5$ км. Согласно результатам моделирования $\Delta\chi_1(\Delta f_1) = 0.096$ $c^{-2}$ и $\Delta\chi_1(\Delta f_5) = 0.18$ $c^{-2}$. На основании соотношения (12) получаем $\Delta\chi_2(\Delta f_1) = 0.16$ $c^{-2}$ и $\Delta\chi_2(\Delta f_5) = 0.042$ $c^{-2}$. Для низкочастотного диапазона $\Delta f_1$, когда номера мод $M \approx N$, значения ширины полосы сопоставимы между собой. В высокочастотном диапазоне $\Delta f_5$ численная оценка ширины полосы существенно меньше модельной, $\Delta\chi_2(\Delta f_5) \ll \Delta\chi_1(\Delta f_5)$. Это объясняется заметным различием между номерами мод $M$ и $N$. Проведенный анализ показал, что при малых радиальных скоростях, характерных для малогабаритных автономных необитаемых аппаратов, и расстояний порядка десяти километров, выражения (11), (12) правильно оценивают координаты максимума и ширины полосы функции обнаружения. Введенная ширина полосы (10), (12) примерно соответствует ширине на уровне полумаксимума.

## Заключение

Обнаружены и зафиксированы аналитические зависимости между координатой максимума и шириной полосы на уровне полумаксимума функции углового распределения спектральной плотности голограммы с параметрами движения источника и характеристиками приема. Показано, что зависимости связаны с интерференционным инвариантом. Характеристики функции исследованы в рамках численного эксперимента для акватории, характеризующейся ИИ $\beta \approx 1$. В приближении линейной волноводной дисперсии аналитические зависимости качественно и количественно правильно отображают результаты моделирования характеристик функции обнаружения, что представляет интерес для обнаружения и локализации малогаба-

ритных автономных необитаемых подводных аппаратов. Представленное исследование представляет собой очередной этап развития голографического метода, применяемого в океанической акустике. В последние годы он активно используется для обработки гидроакустических сигналов при обнаружении и идентификации малошумных подводных источников в мелководье [1–8, 11, 16–38]. Основы метода изложены в [1, 2], его дальнейшее развитие в [3, 4]. Работы [5, 7, 16–20] анализируют устойчивость метода в условиях неоднородности среды, вызванной внутренними волнами; влияние рельефа дна рассмотрено в [21]. Адаптивные элементы для работы без априорной информации разработаны в [22–24]. Применение метода к задаче разрешения шумовых сигналов в мелководных волноводах представлено в [25–27], а голографический метод пеленгации — в [28, 29]. Особое внимание конфигурации антенных систем уделено в [30–33]. Методы модовой селекции предложены в [34–36], а экспериментальная проверка — в [11, 37, 38]. Обзор существующих результатов приведён в [8]. В рамках голографического подхода для извлечения информации о характеристиках источника используется двумерное преобразование Фурье интерферограммы, обладающее более высокой фокусирующей способностью, чем обращение фронта или временное обращение волны [39].

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/.

## Литература

1. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

2. *Казначеев И. В., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

3. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

4. *Ehrhardt M., Pereselkov S., Kuz'kin V., Kaznacheev I., Rybyaners P.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

5. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11, No 10. – 1922.

6. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Matvienko Yu., Tkachenko S., Rybyanets P.* The formation of 2D holograms of a noise source and bearing estimation by a vector scalar receiver in the high-frequency band // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – Vol. 12. – P. 704.

7. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Influence of intense internal waves traveling along an acoustic path on source holographic reconstruction in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – Vol. 13. – P. 1409.

8. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Голографические методы обработки гидроакустических сигналов (Обзор) // Акуст. журн. 2025. – Т. 71, № 1. – С. 96–117.

9. *Weston D., Stevens K.* Interference of wide-band sound in shallow water // J. Sound Vibr. – 1972. – Vol. 21, No 1. – P. 57–64.

10. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. – Л. : Гидрометеоиздат, 1982. – 264 с.

11. *Глущенко М. Ю., Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Хворостов Ю. А., Ткаченко С. А.* Голографический метод идентификации шумового подводного источника в мелком море // Акуст. журн. – 2024. – Т. 70, № 3. – С. 67–77.

12. *Чупров С. Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // Акустика океана. Современное состояние. – М. : Наука, 1982. – С. 71–82.

13. *Кулаков В. Н., Мальцев Н. Е., Чупров С. Д.* О возбуждении групп мод в слоистом океане // Акуст. журн. – 1983. – Т. 29, № 1. – С. 74–79.

14. *Кузькин В. М., Переселков С. А.* Интерферометрическая диагностика гидродинамических возмущений мелкого моря. – М. : Ленанд, 2019. – 200 с.

15. *Kohler W., Papanicolaou G. C.* Wave propagation in a randomly inhomogeneous ocean // Wave Propagation and Underwater Acoustics, eds. by J. B. Keller and J. S. Papadakis. Springer : Berlin Heidelberg New York, 1977. – P. 153–223.

16. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Zvyagin V. G., Malykhin Yu., Prosovetskiy D. Yu.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 160–167.

17. *Badiey M., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu., Tkachenko S. A.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 4. – P. 313–319.

18. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2021. – Vol. 29, № 3. – P. 278–284.

19. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Ладыкин Н. В., Куцов М. В.* Голографический метод локализации движущегося подводного источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

20. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Badiey M., Ladykin N. V., Malykhin A. Yu., Tkachenko S. A.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 346–354.

21. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Косенко И. М., Ладыкин Н. В., Переселков А. С.* Локализация движущегося шумового источника в мелководной акватории с нерегулярной батиметрией // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 8. – С. 1081–1088.

22. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Tkachenko S. A.* Adaptive algorithms for interferometric processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 267–273.

23. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. F.* Adaptive method for holographic processing of broadband hydroacoustic signals // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 5. – P. 382–391.

24. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Адаптивный алгоритм локализации шумовых подводных источников в мелководных акваториях // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 533–544.

25. *Kuz'kin V. M., Kuznetsov G. N., Pereselkov S. A., Grigor'ev V. A.* Resolving power of the interferometric method of source localization // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

26. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

27. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. A.* Resolution of hydroacoustic noise signals under conditions of spatial-temporal variability of ocean environment // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 4. – P. 290–299.

28. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Direction finding of a noise sound source // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 3. – P. 237–241.

29. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kuznetsov G. N., Kaznacheev I. V.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

30. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Ткаченко С. А., Казначеев И. В.* Интерферометрическая обработка акустической информации с использованием протяжённых антенн в диспергирующих средах // РЭНСИТ. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 483–494.

31. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Matvienko Yu. V., Tkachenko S. A.* Detection of a noise signal in an oceanic waveguide using a vertical array // Phys. Wave Phenom. – 2021. – Vol. 30, No 4. – P. 323–329.

32. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А., Просовецкий Д. Ю.* Обнаружение шумового сигнала в океаническом волноводе горизонтальной антенной // РЭНСИТ. – 2022. – Т. 14, № 1. – С. 65–72.

33. *Kaznacheev I. V., Kuz'kin V. M., Kutsov M. V., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A.* Interferometry in acoustic-data processing using extended antennas. Space-time analogy // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 4. – P. 326–332.

34. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Prosovetskii D. Yu., Kaznacheeva E. S.* Mode selection in oceanic waveguides // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, № 2. – P. 111–118.

35. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Kaznacheeva E. S., Tkachenko S. A.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, № 5. – P. 314–320.

36. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 301–308.

37. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Логачев В. В., Косенко И. М.* Голографический метод обработки гидроакустических сигналов высокочастотного источника в мелком море // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 545–554.

38. *Матвиенко Ю. В., Кузькин В. М., Переселков С. А., Ладыкин Н. В., Грачев В. И.* Обнаружение и локализация шумового подводного источника в мелководной акватории на фоне интенсивного судоходства // РЭНСИТ. – 2025. – Т. 17, № 2. – С. 211–220.

39. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Use of interference patterns to control sound field focusing in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 559.

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ ПЕЛЕНГА ИСТОЧНИКА ШУМА ГОЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

**В. М. Кузькин[1], С. А. Переселков[2], И. М. Косенко[2], А. С. Переселков[2], Л. Н. Попова[2]**

*[1]Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Описан голографический метод пеленгования шумового подводного аппарата с использованием двух векторно-скалярных приемников. Приведены результаты численного моделирования пеленгования на фоне малого входного отношения сигнал/помеха.
**Ключевые слова:** голографическая обработка, векторно-скалярный приемник, пеленгование, помехоустойчивость, численное моделирование.

## Введение

В настоящее время активно развивается голографический метод обнаружения малошумных подводных источников звука в мелководных акваториях с использованием векторно-скалярных приемников (ВСП) [1–23]. Его бурному развитию предшествовали работы по описанию интерферограммы звуковых полей, формируемых источниками звука [24, 25]. Благодаря экспериментальной верификации [19–22] показано, что голографический подход, в отличие от известных методов обработки гидроакустических сигналов [26–30], выполняет пассивное наблюдение за подводной обстановкой: позволяет обнаруживать источник и оценивать его параметры: радиальную скорость, удаление, пеленг. Отдельным преимуществом голографической обработки является независимость от априорных знаний о среде. Это достигается благодаря адаптивным алгоритмам с использованием двух и более ВСП. В работе представлен один из таких методов, а также приведены результаты численного моделирования на фоне малого входного отношения сигнал/помеха.

## 1. Определение пеленга источника

Волновод предполагается горизонтально-однородным. Геометрия задачи показана на рис. 1. $S$ — источник сигнала, $Q_{1,2}$ — ВСП, расположенные на оси абсцисс. Источник движется с постоянной скоростью.

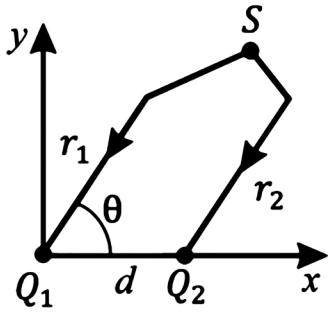



*Рис. 1. Схема расположения источника $S$ и ВСП $Q_{1,2}$*

За время наблюдения на ВСП накапливаются независимые временные шумовые реализации горизонтальных компонент колебательных скоростей частиц жидкости $V_{X,Y}(t)$. Когерентные, отличающиеся помехоустойчивостью, интерферограммы формируются на приемниках как $R(f,t)=V_X(f,t)V_X^*(f,t)$ и $L(f,t)=V_Y(f,t)V_Y^*(f,t)$. Для повышения контрастности из них

вырезаются средние значения. Затем для подробного извлечения информации на основе интерферограмм формируются голограммы. Достигается это путем двумерного преобразования Фурье, обладающего высокой фокусирующей способностью [33]:

$$F_R(\tau,\nu)=\int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} R(f,t)\exp[i2\pi(vt-f\tau)]dfdt, \tag{1}$$

$$F_L(\tau,\nu)=\int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} L(f,t)\exp[i2\pi(vt-f\tau)]dfdt. \tag{2}$$

Здесь $v$ и $t$ — частота и время голограммы. После перехода в новую область в значительной мере исчезают трудности, связанные с малым входным отношением с/п, влиянием неоднородностей среды. Для перехода к функции одной переменной строится угловое распределение голограммы как интеграл вдоль лучей, выходящих из начала координат:

$$G_{R,L}(\chi)=\int_0^{\Delta\tau}\left|F_{R,L}(\tau,\chi\tau)\right|d\tau \tag{3}$$

Пеленг (угол в горизонтальной плоскости между осью $x$ и направлением на источник, оценивается по отношению максимумов функций обнаружения:

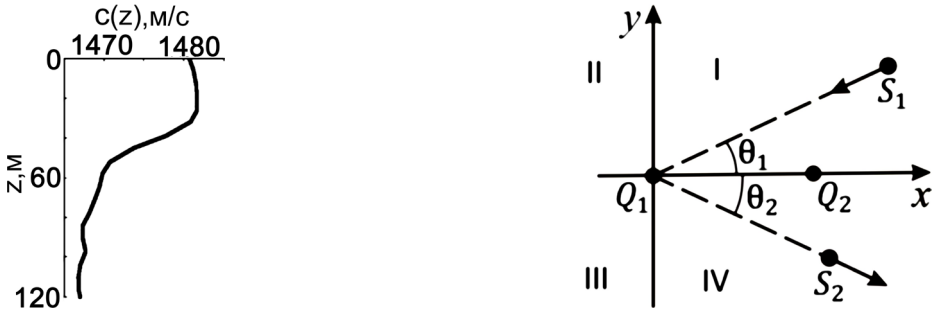
$$\left|tg\theta\right|=\frac{G_L(\varepsilon)}{G_R(\varepsilon)}. \tag{4}$$

Однако такая оценка пеленга неоднозначна с точностью до квадранта, т. е. значения $\pm\theta$ и $\pi\pm\theta$ неотличимы. Неоднозначность устранаяется итерационной процедурой. На первом шаге анализируется корреляция между интерферограммами в фиксированный момент времени $\gamma=L(f,t)/R(f,t)$. Если $\gamma>0,$ то пеленг расположен в первом и третьем квадрантах, иначе — во втором и четвертом. На втором шаге можно воспользоваться одним из двух способов, основанных на временном или частотном представлении одной из очищенных от помех интерферограмм, например $R(f,t)$. Один из них предусматривает одномерное преобразование Фурье по частоте, а другой — по времени. В первом случае регистрируется знак временной задержки $\tilde{t}$ между огибающими сигнала $S_R(Q_1,t)$ и $S_R(Q_1,t+\tilde{t})$. Во втором случае — знак частотного сдвига $\tilde{f}$ между спектрами $u_R(Q_1,f)$ и $u_R(Q_2,f+\tilde{f})$. Если знак положительный, источник в первом или четвертом квадранте. Если отрицательный — во втором или третьем.

## 2. Численное моделирование

Глубина волновода $H=120$ *м*. Распределение скорости звука приведено на рис. 2(а). Параметры поглощающего жидкого дна: отношение плотности грунта и воды $\rho=1.8,$ комплексный показатель преломления $n=0.84(1+i0.03)$. Схема расположения шумовых источников по отношению к ВСП показана на рис. 2(б). Оба приемника находятся на глубине $z_q=100$ *м*, расстояние между ними $d=100$ *м*. $S_1$ и $S_2$ расположены в первом и четвертом квадрантах на глубине $z_s=80$ *м*, пеленги $\theta_{1,2}=\pm30°$. Первый источник приближается к приемникам со скоростью $u=3$ *м/с*, а второй — с такой же скоростью удаляется. В начальный момент времени источники удалены от ВСП $Q_1$ на расстояние $r=7$ *км*.

Сигналы источников и распределенная изотропная помеха ялвяются белым шумом. Время наблюдения $\Delta t=90$ *с*. Ширина полосы $\Delta f=80-100$ *Гц*. Шумовое поле регистрируется в течение $\Delta T=5$ *с*, временной интервал между регистрациями $\delta T=0.1$ *с*. Число временных интервалов — 17. Входное отношение с/п равно –22.22 дБ.




*(а)* *(б)*

*Рис. 2. Профиль скорости звука (а) и геометрия задачи (б)*

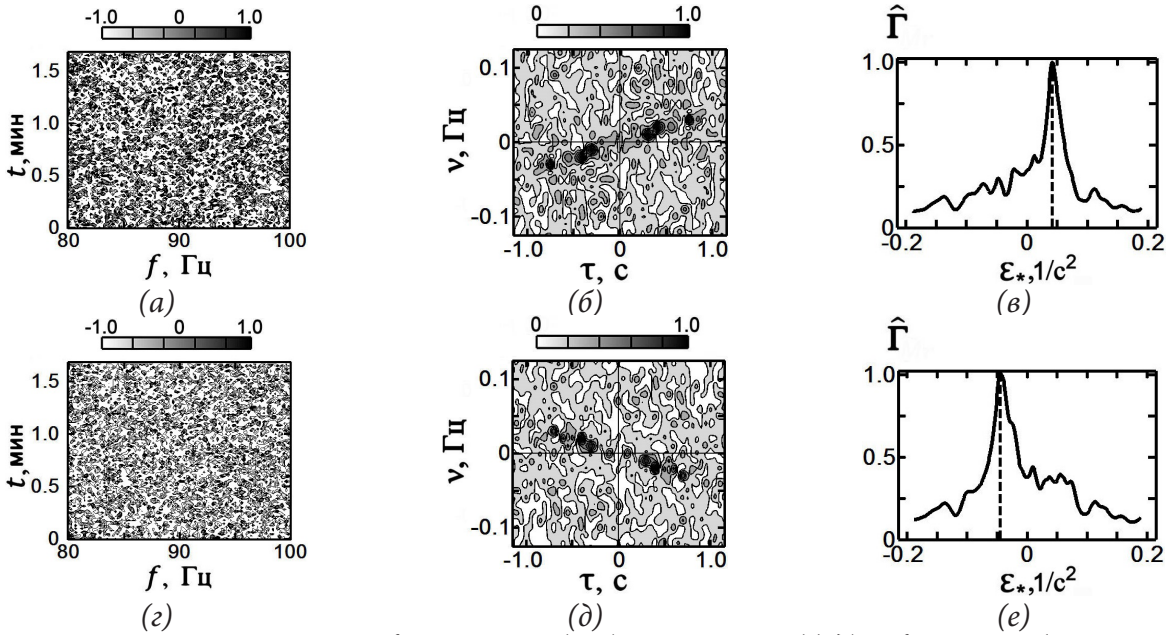
### 3. Результаты численного моделирования

На рис. 3 приведены нормированные интерферограммы, голограммы и функции обнаружения. Видно, что на фоне интенсивной распределенной помехи интерференционные полосы не наблюдаются, однако в области голограммы хорошо выделяются фокальные пятна. Ещё отчётливее сигнал на угловом распределении. Отношение абсолютных значений максимумов (4) показывает, что для источника $S_1$ возможные значения пеленгов: 30.7°, 149.3°, 210.7°, 329.3°, а для второго источника — 29.1°, 150.9°, 209.1°, 330.9°.

Результат фильтрации помехи за пределами полосы расположения фокальных пятен голограмм и соответствующие очищенные интерферограммы представлены на рис. 4. Для источника $S_1$ восстановленные $R(f,t)$ и $L(f,t)$ идентичны. А вот для второго источника нормированные интерферограммы различаются знаком, т.е. противофазные.

Нормированные, очищенные от помех интерферограммы для времени $t=0$ показаны на рис. 5. Для источника $S_1$ отношение корреляции положительно, для источника $S_2$ — отрицательно. Исключения составляют значения частот, при которых $R(f_*)=L(f_*)$. Это позволяет сопоставить пеленги источников с их квадрантами. На рис. 6 приведен модуль нормированной взаимокорреляционной функции:

$$B(\tilde{f})=\int_{-\infty}^{\infty} S_R(Q_1,f)S_R(Q_2,f+\tilde{f})df \qquad (4)$$




*(а)* *(б)* *(в)*

*(г)* *(д)* *(е)*

*Рис. 3. Нормированные интерферограммы (а, г), голограммы(б, д) и функции обнаружения (в, е) для источников $S_1$ (а–в), $S_2$ (г–е) и приемника $Q_1$*

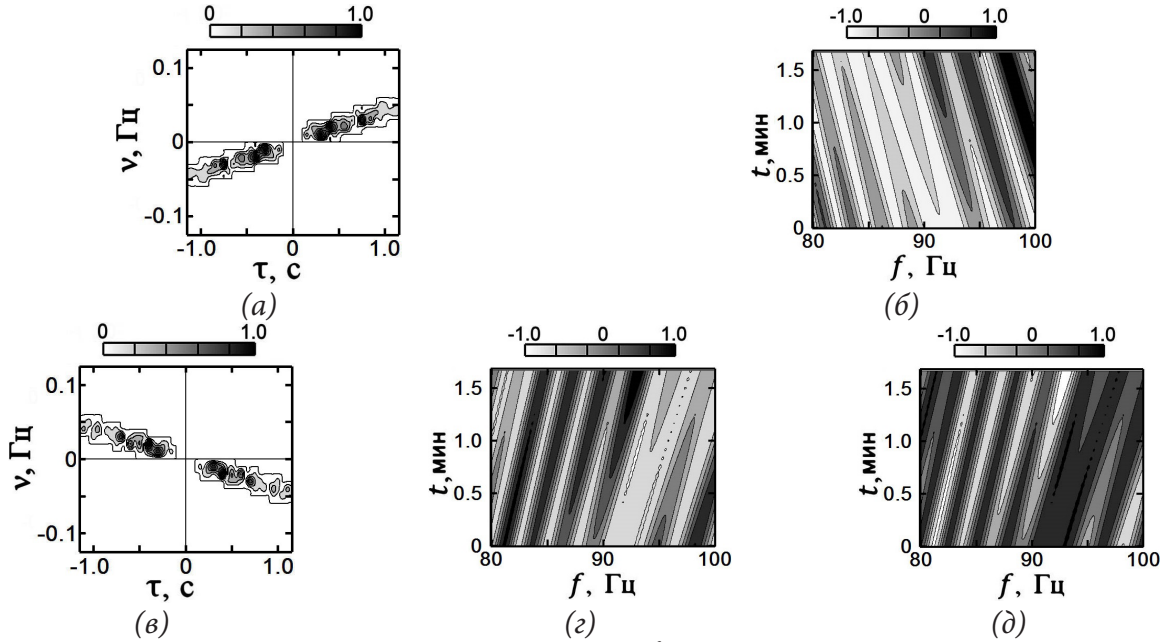



*Рис. 4. Нормированные голограммы и интерферограммы, очищенные от помех для источников $S_1$ (а, б), $S_2$ (в–д) и приемника $Q_1$*

*Рис. 5. Интерферограммы при $t = 0$ для источников $S_1$ (слева) и $S_2$ (справа). Сплошная линия — $R(f)$, пунктирная – $L(f)$*

В обоих случаях максимум приходится на частотны сдвиг $\tilde{f} > 0,$ поэтому первый источник расположен в первом квадранте, а второй – в четвертом. Таким образом, пеленги однозначно оцениваются как $30.7°$ и $-29.1°,$ что близко к исходным данным.

*Рис. 6. Взаимокорреляционная функция для источников $S_1$ (слева) и $S_2$ (справа)*

**Заключение**

Изложен голографический метод пеленгования с использованием двух ВСП. Знаний о характере шумового сигнала источника, распределенной помехи и передаточной функции

волновода не требуется. Результаты численного моделирования подтверждают работоспособность предложенного алгоритма пеленгования звукового источника и демонстрируют высокую помехоустойчисовость.

**Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

**Литература**

1. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

2. *Казначеев И. В., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

3. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

4. *Ehrhardt M., Pereselkov S., Kuz'kin V., Kaznacheev I., Rybyanets P.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // J. Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

5. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Ладыкин Н. В., Куцов М. В.* Голографический метод локализации движущегося подводного источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

6. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Badiey M., Ladykin N. V., Malykhin A. Yu., Tkachenko S. A.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 346–354.

7. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11, No 10. – 1922.

8. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Influence of intense internal waves traveling along an acoustic path on source holographic reconstruction in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – Vol. 13. – P. 1409.

9. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Косенко И. М., Ладыкин Н. В., Переселков А. С.* Локализация движущегося шумового источника в мелководной акватории с нерегулярной батиметрией // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 8. – С. 1081–1088.

10. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. F.* Adaptive method for holographic processing of broadband hydroacoustic signals // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 5. – P. 382–391.

11. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Адаптивный алгоритм локализации шумовых подводных источников в мелководных акваториях // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 533–544.

12. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

13. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. A.* Resolution of hydroacoustic noise signals under conditions of spatial-temporal variability of ocean environment // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 4. – P. 290–299.

14. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Matvienko Yu. V., Tkachenko S. A.* Detection of a noise signal in an oceanic waveguide using a vertical array // Phys. Wave Phenom. – 2021. – Vol. 30, № 4. – P. 323–329.

15. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А., Просовецкий Д. Ю.* Обнаружение шумового сигнала в океаническом волноводе горизонтальной антенной // РЭНСИТ. – 2022. – Т. 14, № 1. – С. 65–72. (*Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Matvienko Yu. V., Tkachenko S. A., Prosovetskii D. Yu.* Detection of a noisy signal in an oceanic waveguide using a horizontal array // RENSIT. – 2022. – Vol. 14., No 1. – P. 65–72.)

16. *Kaznacheev I. V., Kuz'kin V. M., Kutsov M. V., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A.* Interferometry in acoustic-data processing using extended antennas. Space-time analogy // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 4. – P. 326–332.

17. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Prosovetskii D. Yu., Kaznacheeva E. S.* Mode selection in oceanic waveguides // Phys. Wave Phenom. 2022. Vol. 30. № 2. P. 111–118.

18. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Kaznacheeva E. S., Tkachenko S. A.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, № 5. – P. 314–320.

19. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Логачев В. В., Косенко И. М.* Голографический метод обработки гидроакустических сигналов высокочастотного источника в мелком море // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 545–554.

20. *Матвиенко Ю. В., Кузькин В. М., Переселков С. А., Ладыкин Н. В., Грачев В. И.* Обнаружение и локализация шумового подводного источника в мелководной акватории на фоне интенсивного судоходства // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2025. – Т. 17, № 2. – С. 211–220.

21. *Глущенко М. Ю., Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Хворостов Ю. А., Ткаченко С. А.* Голографический метод локализации шумового подводного источника в мелком море // Акуст. ж. – 2024. – Т. 70, № 3. – С. 67–77.

22. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Matvienko Yu., Tkachenko S., Rybyanets P.* The formation of 2D holograms of a noise source and bearing estimation by a vector scalar receiver in the high-frequency band // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – Vol. 12. – P. 704.

23. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Голографические методы обработки гидроакустических сигналов (Обзор) // Акуст. журн. – 2025. – Т. 71, № 1. – С. 96–117.

24. *Weston D., Stevens K.* Interference of wide-band sound in shallow water // J. Sound Vibr. – 1972. – Vol. 21, No 1. – P. 57–64.

25. *Чупров С. Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // Акустика океана. Современное состояние. – М. : Наука, 1982. – С. 71–82.

26. *Jackson D. R. Ewart T. E.* The effect of internal waves on matched-field processing // J. Acoust. Soc. Am. – 1994. – Vol. 96, № 5. – P. 2945–2955.

27. *Baggeroer A. B., Kuperman W. A., Schmidt H.* Matched field processing: Source localization in correlated noise as an optimum parameter estimation problem // J. Acoust. Soc. Am. – 1998. – Vol. 83, № 2. – P. 571–587.

28. *Dosso S. E., Nielsen P. L., Wilmut M. J.* Data error covariance in matched-field geoacoustic inversion // J. Acoust. Soc. Am. – 2006. – Vol. 119, № 1. – P. 208–219.

29. *Baggeroer A. B.* Why did applications of MFP fail, or did we not understand how to apply MFP? // Proc. 1st Int. Conf. and Exhibition. Underwater Acoustics; Eds. Papadakis J.S., Bjorno L. – Corfu Island, Greece, 2013. – P. 41–49.

30. *Сазонтов А. Г., Малеханов А. И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (Обзор) // Акуст. журн. – 2015. – Т. 61, № 2. – С. 233–253.

31. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Direction finding of a noise sound source // Phys. Wave Phenom. – 2019. – V. 27, No 3. – P. 237–241.

32. *Weston D., Stevens K.* Interference of wide-band sound in shallow water // J. Sound Vibr. – 1972. – Vol. 21, No 1. – P. 57–64.

33. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Use of interference patterns to control sound field focusing in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 559.

УДК 519.6

# ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОЦЕНКЕ ДАЛЬНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ В ВОЛНОВОДЕ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ БАТИМЕТРИЕЙ

**В. М. Кузькин[1], С. А. Переселков[2], И. М. Косенко[2], А. С. Переселков[2], Л. Н. Попова[2]**

*[1]Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Изложена методика дальности обнаружения подводного шумового аппарата в неоднородной мелководной акватории в рамках голографической обработки широкополосных сигналов. Выполнен сравнительный анализ дальности обнаружения в условиях регулярной и нерегулярной акватории. В качестве неоднородности выбрана нерегулярная батиметрия в форме берегового клина, обуславливающая горизонтальную рефракцию мод звукового поля.
**Ключевые слова:** голографическая обработка, дальность обнаружения, входной отношение сигнал/помеха, береговой клин, горизонтальная рефракция волн.

## Введение

Развитие голографических методов обработки широкополосных сигналов привело к упрощению пассивной гидролокации и расширению круга решаемых задач. Ключевой вклад внесён работой С. Д. Чупрова [1], где показано, что интерференция мод формирует устойчивую интерферограмму максимумов спектральной плотности в координатах частота-время. Конфигурация локализованных полос определяется характеристиками среды и движения источника, что позволяет использовать интерферограмму как детерминированную модель шумового сигнала. Голографическое изображение источника строится посредством двумерного преобразования Фурье, обеспечивая квазикогерентное накопление сигнала вдоль полос интерферограммы и некогерентное накопление помех, что ведёт к высокой помехоустойчивости. Показана связь спектральной плотности голограммы с параметрами источника [2–4], дана схема разделения нескольких источников [5, 6], подтверждена устойчивость к неоднородностям среды [7–18], а также разработаны адаптивные методы при отсутствии данных о среде [19–22].

Оценка максимальной дальности обнаружения в условиях пространственно-временной изменчивости среды исследована в ряде работ [23–26], а статистическая теория по критерию Неймана-Пирсона изложена в [27, 28]. А работе представлено численное моделирование дальности обнаружения малогабаритного подводного аппарата в диапазоне 300–350 Гц для мелководной акватории с нерегулярной батиметрией берегового клина, вызывающей горизонтальную рефракцию мод. Использованы экспериментальные спектры аппарата и фоновой помехи [29]. Рассматриваются одиночный приемник и малогабаритная антенна, для них определена предельная дальность применения голографической обработки и выполнено сравнение условий регулярной и нерегулярной акватории. Получены вероятности правильного обнаружения при заданных вероятностях ложной тревоги по критерию Неймана–Пирсона.

## 1. Оценка максимальной дальности обнаружения

Во всех предшествующих случаях [23–26] полагалось, что характеристики среды неизменны в течение эксперимента. В реальных мелководных акваториях подводнй аппарат может перемещаться в нестационарной среде, в результате чего интерферограмма меняется со временем. Обобщим методику определения максимальной дальности обнаружения так, чтобы включить в неё эффекты, связанные с неоднордностями среды.

Обобщение методики рассмотрим на примере звукового давления шумового сигнала $p(t,r)$, регистрируемого на фоне помехи $n(t,r)$ одиночным приемником, расположенным на глубине $z_q$. Аналогичные рассуждения сохраняются и применительно к векторным компонентам звукового поля. Далее рассмотрим случай с применением антенны. Пусть источник шума на глубине $z_s$ движется с радиальной скоростью $w$. Поле помехи считается стационарным. За время наблюдения $\Delta t$ на расстоянии $r = r_0 + \omega t$, где $r_0$ — начальное горизонтальное расстояние между источником и приемником в момент времени $t_0$, накапливаются $J$ независимых шумовых реализаций $s(t,r) = p(t,r) + n(t,r)$ длительностью $t_1$ и с временным интервалом $t_2$ между ними $J = [\Delta t/(t_1 + t_2)]$. Квадратные скобки означают округление к меньшему значению целого числа. Далее, где это не вызывает сомнения, аргумент $r$ опускается.

Оконным преобразованием Фурье в заданной частотной полосе восстанавливается частотно-временное представление шумовых реализаций $s(f,t) = p(f,t) + n(f,t)$ и формируется интерферограмма звукового давления $S(f,t) = s(f,t)^* s(f,t)$. Сигнал и помеха некоррелированы, поэтому интерферограмма представляет собой линейную комбинацию интерфрограмм сигнала $P(f,t)$ и помехи $N(f,t)$: $S(f,t) \approx P(f,t) + N(f,t)$. Голограмма вычисляется с помощью двумерного преобразования Фурье:

$$F_S(\tau,\nu) = \int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} \left[P(f,t) + N(f,t)\right] \exp[i2\pi(\nu t - f\tau)]\,df\,dt = F_P(\tau,\nu) + F_N(\tau,\nu), \tag{1}$$

Локализацию спектральной плоскости на голограмме следует рассматривать как фокусировку поля движущегося источника. Ее фактор фокусировки [2] превышает фактор фокусировки, реализуемой при обращении волнового фронта и временном обращении волны в точку расположения источника первичной волны [30]. В отличие от этих двух видов фокусировки, двумерная спектральная плотность движущегося источника автоматически локализуется на голограмме в точке приема.

В качестве критерия максимальной дальности $r_{\max}$ обнаружения источника принимается условие, согласно которому максимум функции углового распределения спектральной плотности голограммы (функции обнаружения) при входном отношении с/п $q_0(r_{\max})$ в направлении $\chi = \varepsilon$ расположении пиков фокальных пятен в два раза превышает помеховые уровни в направлениях $\chi \neq \varepsilon$. Тогда максимальная дальность обнаружения $r_{\max}$ определяется выражением [23–26]

$$2 = Jq_0(r_{\max}). \tag{2}$$

Для расстояний $r > r_{\max}$ принимаемый шумовой сигнал максируется помехой, источник не обнаруживается. Входное отношение с/п на расстоянии $r$ равно $q_0(r) = (|\, p_{\Delta f}(r)\,|)^2 \big/ (|\, n_{\Delta f}\,|)^2$. В неоднородной среде усредненное звуковое давление шумового точечного источника в полосе частот $\Delta f$ на горизонтальном расстоянии $r$ представим в виде суммы мод суперпозиции гармонических составляющих на чатотах $f_k$ со случайной мощностью $W_k$:

$$p_{\Delta f}(r) = \left| \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \sqrt{W_k}\, A_{mk}(r) \right|, \tag{3}$$

где $A_{mk}(r)$ — амплитуда $m$-й моды. Это выражение применимо к протяженному источнику, если его максимальный размер $L$ мал по сравнению с расстоянием $r$. В предположении, что средние значения мощностей гармонических составляющих не зависят от номера гармоники, закон спадания поля (3) для расстояний $r \geq r_0$, $r_0 \gg L$ приводится к виду

$$p_{\Delta f}(r) = p_{\Delta f}(r_0) \big|R(r)\big| \big/ \big|R(r_0)\big|, R(r) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} A_{mk}(r). \tag{4}$$

По критерию Неймана — Пирсона вероятности ложной тревоги $p_2$ и правильного обнаружения $p_1$ равны [27, 28]

$$p_2 = 1 - 0.5\left[\Phi(\kappa_n - 0.5) + \Phi(\kappa_n + 0.5)\right],\ p_1 = 1 - 0.5\left[\Phi(\eta_1) + \Phi(\eta_2)\right], \quad (5)$$

где $\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-t^2} dt$, $\eta_1 = (2\kappa_n - 1 - q(r))/(2 + 2q(r))$, $\eta_2 = (2\kappa_n + 1 + q(r))/(2 + 2q(r))$. Входное отношение с/п оценивается здесь как [27, 28]

$$q(r) = J\gamma q_0(r), \quad (6)$$

где $\gamma = D_n/D_p$ — отношение площадей областей голограммы, на которых распределены спектральные плотности сигнала и помехи. При использовании линейной антенны с числом элементов $B$ максимальная дальность обнаружения определяется выражением

$$q_{an}(r_{\max(an)}) = q_0(r_{\max}) / B, \quad (7)$$

где $q_{an}(r_{\max(an)})$ — входное отношение с/п на элементе антенны [26]. Затем вычисляется уровень шумового сигнала и из зависимости для $P_{\Delta f}(r)$ определяется максимальная дальность обнаружения $r_{\max(an)}$ с применением антенны.

## 2. Численное моделирование

В рамках численного эксперимента оценим максимальную дальность обнаружения подводного аппарата с использованием одиночного приемника и малогабаритной антенны в мелководной акватории с нерегулярной батиметрией в форме берегового клина, обуславливающего горизонтальную рефракцию мод звукового поля. Звуковые поля рассчитывались методом модовых параболических уравнений [31].

Геометрия задачи показана на рис. 1. В качестве приемного модуля рассматриваются одиночный приемник и горизонтальная антенна из трех элементов, $B = 3$. Изменение глубины акватории описывается выражением $z(x, y) = H_0 + ky$. Здесь $H_0 = 50$ *м*, $k = \mathrm{tg}\,\alpha = 0.01$. Параметры однородного жидкого дна: комплексный показатель преломления $n = 0.84(1 + i0.013)$, плотность $\rho = 1.8$ *г/см*$^3$. Скорость звука в воде $c = 1480$ *м/с*. Глубина волновода $H = 60$ *м*.

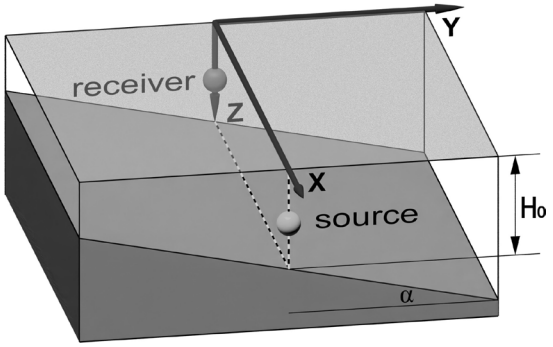



*Рис. 1. Геометрия задачи*

Подводный аппарат удаляется от приемного модуля со скоростью $w = 2$ *м/с*. В начальный момент времени $t_0 = 0$ горизонтальное расстояние между источником и приемным модулем $r_0 = 200$ *м*. Глубина подводного аппарата $z_s = 30$ *м*, глубина приемного модуля $z_q = 50$ *м*. Частотный диапазон $\Delta f = 300 - 350$ *Гц*. Средняя частота спектра $f_0 = 325$ *Гц*. Время наблюдения $\Delta t = 30$ *с*, длительность шумовой реализации $t_1 = 1$ *с*, временной интервал между ними $t_2 = 0.5$ *с*, число временных интервалов $J = \Delta t/(t_1 + t_2) = 20$. В полосе $\Delta f = 50$ *Гц* шаг дискретизации по частоте $\delta f = 0.2$ *Гц*, число гармонических составляющих $K = 251$. Число мод $M = 10$. В полосе $\Delta f$: средняя мощность помехи $N_{\Delta f} = -43.01$ дБ, средняя мощность шумоизлучения подводного аппарата на расстоянии $P_{\Delta f}(r_0) = -30.51$ дБ [29].

При приеме одиночным приемником на рис. 2 показано поведение средней мощности шумоизлучения $P_{\Delta f}(r)$ в зависимости от расстояния $r$. Интерференция между модами приводит

к осцилляциям мощности излучения по отношению к зависимости, полученной некогерентным сложением мод. После расстояния 12 км осциляции поля практически отсутсвтуют, т. к. поле формируется одной модой. Таким образом, в рассматриваемом случае голографическая обработка ограничена дальностью в 12 км, которой соответствует уровень сигнала $P_{\Delta f} = -54.32$ дБ. Горизонтальными пунктирами отмечены значения средних мощностей $-42.97,\ -52.97$ дБ, соответствующие входным отношениям с/п $q_0 = 0.04, -9.96$ дБ. Вертикальными пунктирами отмечены расстояния $r = 1.57, 9.46$ *км*, отвечающие данным входным отношениям с/п.

В случае приема одиночным приемником искажения звукового поля горизонтальной рефракцией волн показаны на рис. 3. По отношению к модовой структуре звукового поля проявление горизонтальной рефракции носит селиктивный характер: с увеличением номера моды горизонтальная рефракция проявляется сильнее. Эта особенность связана с уменьшением горизонтального волнового числа при увеличении номера моды. Угол рефракции $\alpha$ горизонтальных лучей в точке приема на расстоянии $r = 10$ *км* для десятой моды оценивается как $\alpha = 7°$.

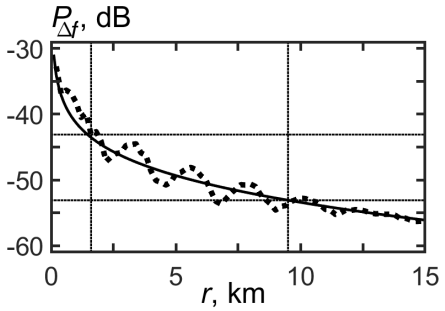



*Рис. 2. Зависимость средней мощности шумоизлучения подводного источника звука $P_{\Delta f}(r)$ от расстояния $r$*

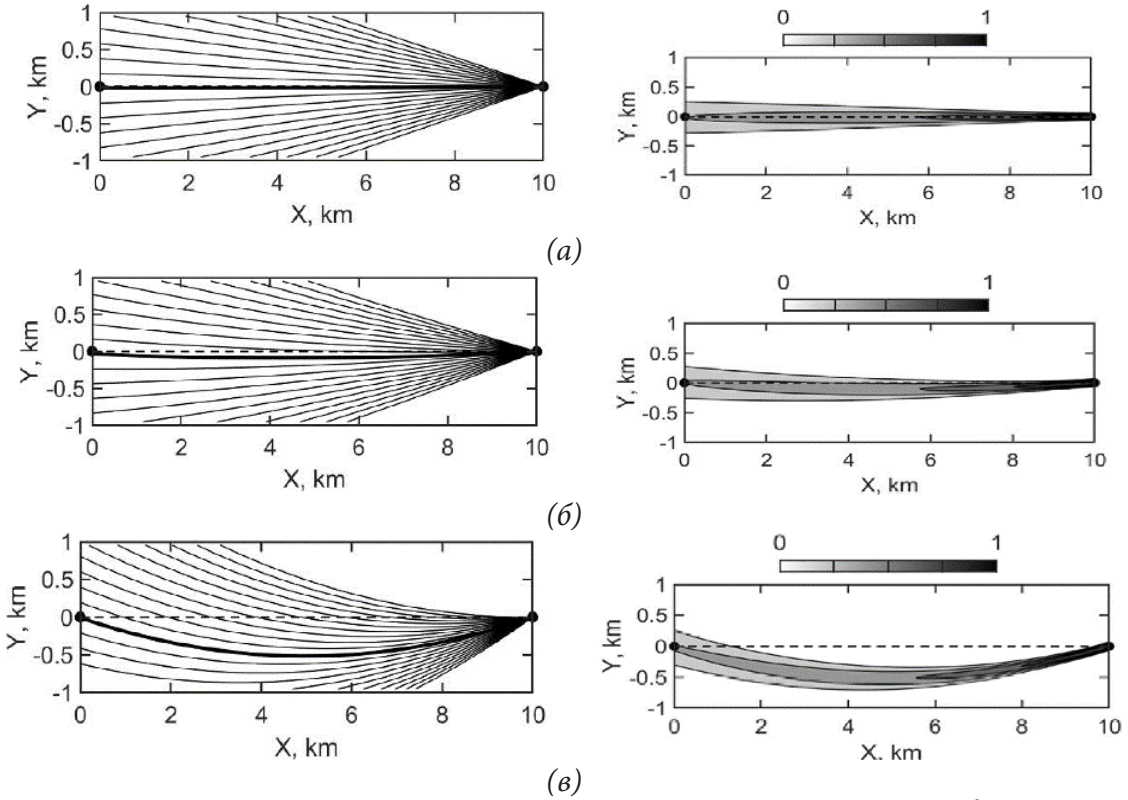



*Рис. 3. Нормированная горизонтальная структура поля на частоте $f_0 = 325$ Гц. Слева траектории горизонтальных лучей, справа распределения мод. (а) первая мода, (б) четвертая мода, (в) десятая мода*

Результаты голографической обработки в переходной области максимальной дальности обнаружения подводного аппарата приведены на рис. 4. Из рисунков следует, что на расстояниях $r = 9.2$ км и $r = 9.8$ *км* подводный источник обнаруживается и не обнаруживается соответственно. Очевидно, что максимальная дальность обнаружения лежит в этом диапазоне.

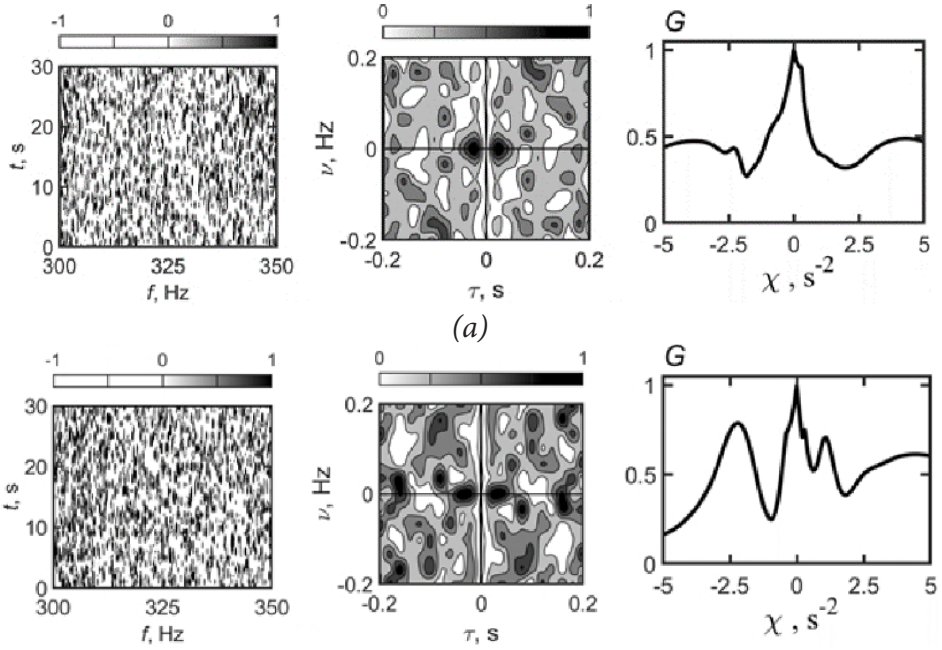



*Рис. 4. Нормированные интерферограммы (слева), голограммы (по центру) и функции обнаружения (справа). (а)* $r = 9.2$ *км, (б)* $r = 9.8$ *км*

Максимальная дальность обнаружения в отсутствие нерегулярностей батиметрии (при сохранении исходных данных моделирования) равняется 11 км. Таким образом, нерегулярность батиметрии в виде прибрежного клина приводит к уменьшению дальности обнаружения на 14 %.

## Заключение

На основе голографической обработки представлен алгоритм оценки максимальной дальности обнаружения АНПА по его шумовому полю в нерегулярной мелководной акватории. В случае нерегулярной батиметрии в форме прибрежного клина, обуславливающего горизонтальную рефракцию мод звукового поля, в рамках численного моделирования оценена максимальная дальность обнаружения $r_{\max}$ малогабартиного подводного аппарата в полосе 300–350 *Гц*, движущегося со скоростью 2 *м/с*. Вычислены вероятности правильного обнаружения, соответствующие входному отношению с/п на максимальной дальности обнаружения.

## Литература

1. *Чупров С. Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // Акустика океана. Современное состояние. – М. : Наука, 1982. – С. 71–82.

2. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

3. *Казначеев И. В., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

4. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

5. *Kuz'kin V. M., Kuznetsov G. N., Pereselkov S. A., Grigor'ev V. A.* Resolving power of interferometric method of source localization. // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 2. – P. 150–159.

6. *Глущенко М. Ю., Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Хворостов Ю. А., Ткаченко С. А.* Голографический метод локализации шумового подводного источника в мелком море // Акуст. ж. – 2024. – Т. 70, № 3. – С. 67–77.

7. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Zvyagin V. G., Malykhin A. Yu., Prosovetskiy D. Yu.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Phys Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 2. – P. 160–167.

8. *Badiey M., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu., Tkachenko S. A.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf // Phys Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, No 4. – P.313–319.

9. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves // Phys Wave Phenom. – 2021. – Vol. 29, No 3. – P. 278–284.

10. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204.

11. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Ладыкин Н. В., Куцов М. В.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн. // РЭНСИТ. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

12. *Kuz'kin V. M., Pereselkov C. A., Badiey M., Ladykin N. V., Malykhin A. Yu., Tkachenko S. A.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2023. Vol. 31, No 5. – P. 346–354.

13. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

14. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. A.* Resolution of hydroacoustic noise signals under conditions of spatial– temporal variability of ocean environment // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, No 4. – P. 290–299.

15. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust Soc Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

16. *Ehrhardt M., Pereselkov S., Kuz'kin V., Kaznacheev I., Rybyaners P.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // J. Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

17. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11, No 10. – 1922.

18. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Matvienko Yu., Tkachenko S., Rybyanets P.* The formation of 2D holograms of a noise source and bearing estimation by a vector scalar receiver in the high-frequency band // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – Vol. 12. – P. 704.

19. *Kaznacheeva E. S., Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A.* Measurement capability of the interferometric method of sound source localization in the absence of data on the waveguide transfer function. // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, No 1. – P. 73–78.

20. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Tkachenko S. A.* Adaptive algorithms for interferometric processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, No 3. – P. 267–273.

21. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Адаптивный алгоритм локализации шумовых подводных источников в мелководных акваториях // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 533–544.

22. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. F.* Adaptive method for holographic processing of broadband hydroacoustic signals // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, No 5. – P. 382–391.

23. *Казначеева Е. С., Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Хворостов Ю. А.* Оценка дальности обнаружения малогабаритного подводного аппарата по его шумовому полю // Подводные исследования и робототехника. – 2021. – Т. 4, № 38. – С. 88–93.

24. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Tkachenko S. A., Matvienko Yu. V., Khvorostov Yu. A.* Range of detection of underwater sound sourse // Phys. Wave Phenom. – 2023. – Vol. 31, No 5. – P. 339–345.

25. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Предельная дальность обнаружения подводного шумового источника с применением голографической обработки // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 1. – С. 129–136.

26. *Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Рыбянец П. В.* О возможности оценки предельной дальности обнаружения подводных глайдеров // Подводные исследования и робототехника. – 2024. – Т. 2, № 48. – С. 68–75.

27. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А.* Обнаружение источника в диспергирующих средах // РЭНСИТ. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

28. *Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Matvienko Yu. V., Tkachenko S. A.* Noise-source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 1. – P. 68–74.

29. *Хворостов Ю. А., Матвиенко Ю. В., Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Ткаченко С. А.* Спектральные характеристики шумового поля малогабаритного автономного необитаемого подводного аппарата в дальней зоне // Подводные исследования и робототехника. – 2022. – Т. 4, № 42. – С. 84–88.

30. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Use of interference patterns to control sound field focusing in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 559.

31. *Collins M. D.* The adiabatic mode parabolic equation // J. Acoust. Soc. Am. – 1993. – Vol. 94, No 4. – P. 2269–2278.

УДК 519.6

# О ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ГОЛОГРАММЫ ИСТОЧНИКА НА ОСНОВЕ ДРОБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

**В. М. Кузькин[1], С. А. Переселков[2], Н. В. Ладыкин[2], И. М. Косенко[2], А. С. Переселков[2]**

*[1]Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе исследуется применение дробного преобразования Фурье (FrFT) для формирования голограмм, создаваемых движущимся линейно частотно модулируемым (LFM) источником в мелководном волноводе. Разработан соответствующий голографический метод. Важный результат работы — голографический подход на основе FrFT позволяет формировать локализованные фокусные области даже при высокоинтенсивном шуме. Положение этих областей напрямую связано с параметрами источника. Эффективность такого метода численно исследована для диапазона частот 100–150 Гц.
**Ключевые слова:** дробное преобразование Фурье, голографический метод, интерферограмма, линейная частотная модуляция, мелководье.

## Введение

Дробное преобразование Фурье (FrFT), предложенное в 1980 году [1], расширяет классическое преобразование Фурье (FT), обеспечивая более обобщённый и гибкий анализ сигналов. Оно интерпретируется как вращение в плоскости «время–частота». Благодаря лучшей локализации спектра в согласованном порядке, FrFT активно применяется в квантовой механике, оптике, акустике и обработке сигналов. Наиболее эффективная реализация в этой области связана с STFrFT [2]. В работе представлен метод голографической обработки сигналов (ГОС) [3–6] на основе STFrFT. Современные подходы к ГОС основаны на том, что интерференционная картина, возникающая при излучении звука в океане, обладает высокой устойчивостью и несёт информативные пространственно-частотные признаки [3–8]. Структура и положение её локальных максимумов определяются характеристиками частотного спектра, параметрами волновода и кинематикой движущегося источника. ГОС методы для обнаружения и локализации источников, применимые в широком частотном диапазоне — от низких до высоких частот [9–12], демонстрируют устойчивость к шумам, минимальную чувствительность к изменчивости гидрологических условий и сохраняют эффективность в условиях сложной нестационарности среды [13–19]. Интеграция ГОС с алгоритмами, оценивающими глубину источника [20, 21], обеспечивает высокую помехоустойчивость при решении задач контроля подводной обстановки: от выявления [22, 23] и разделения объектов [24–26] до определения направления, радиальной скорости, расстояния [27–29] и глубины [20, 21] малошумных подводных аппаратов. Помимо этого, ГОС позволяет применять адаптивные процедуры обработки [30–32], которые не требуют предварительных сведений о свойствах среды, а также выполнять модовую фильтрацию в различных типах волноводов — регулярных и нерегулярных [33–35]. По способности к пространственно-временной фокусировке он превосходит классические методы, включая обращение волнового фронта и временной реверс к положению исходного источника [36]. Однако применение ГОС к LFM-сигналам в условиях сильных помех ранее почти не изучалось. Настоящая работа посвящена построению интерферограммы LFM-источника и её преобразованию в голограмму с использованием FrFT. Полученные результаты численных экспериментов в диапазоне 100–150 Гц показывают, что предложенный метод обеспечивает устойчивую локализацию источника даже при уровне шума, существенно превышающем уровень сигнала.

## 1. Применение дробного преобразования Фурье

Дробное преобразование (FrFT) $S_p(u)$ для сигнала $s(t)$ описывается следующим образом:

$$S_p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) K_p(t,u) dt\,, \tag{1}$$

где $p = 2\alpha/\pi$ ($\alpha$ — угол поворота преобразования), а $K_p(t,u)$ — ядро, определяемое как ($\delta(u)$ — функция Дирака)

$$K_p(t,u) = \begin{cases} \sqrt{(1 - i\cot\alpha)/(2\pi)}\exp\left(0.5i\left(t^2 + u^2\right)\cot\alpha - itu\csc\alpha\right), \alpha \neq k\pi \\ \delta(u - t), \alpha = 2k\pi \\ \delta(u + t), \alpha = (2k+1)\pi \end{cases} \tag{2}$$

На практике обычно применяется оконное преобразование STFrFT $S_p(t,u)$, задаваемое соотношением ($w(t)$ — оконная функция, в нашем примере — функция Гаусса):

$$S_p(t,u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) w(\tau - t) K_p(\tau,u) d\tau, \;\; w(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-t^2/(2\sigma^2)}. \tag{3}$$

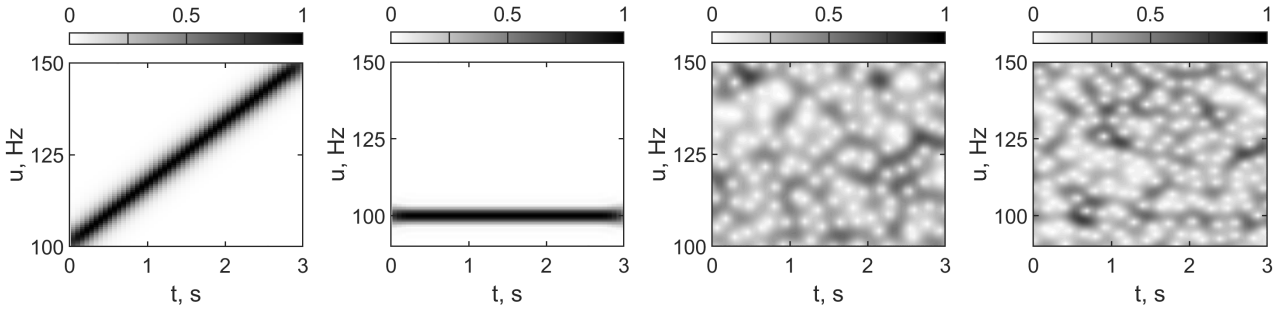
Использование FrFT эквивалентно повороту на произвольный угол во временно-частотной плоскости. Для LFM сигнала, например, это позволяет превратить наклонную спектральную линию в вертикальную, тем самым уплотняя её энергию. Подобный механизм существенным образом увеличивает эффективность голографического подхода.

## 2. Результаты численного моделирования

Расчёты выполнялись для полосы частот $\Delta f = 100 - 150$ *Гц*. Глубина волновода составляет $H = 50$ *м*, а скорость звука в воде — $c = 1500$ *м/с*. Дно моделируется комплексным показателем преломления $n_b = 0.84(1 + i0.03)$ и плотностью $\rho_b = 1.8$ *г/см*$^3$. Приёмник расположен на расстоянии $r_q = 0$ и глубине $z_q = 45$ *м*, тогда как источник в начальный момент времени находится на $r_s = 10$ *км* и глубине $z_s = 15$ *м* и движется к приемнику со скоростью 3 *м/с*. LFM-сигнал имеет единичную амплитуду и конечную длительность $\tau = 3$ *с*; вне этого интервала он равен нулю. Для уменьшения спектрального «размазывания» на начала и конец сигнала накладываются плавные фронты. Мгновенная частота линейно возрастает от $f_1 = 100$ *Гц* при $t = 0$ до $f_2 = 150$ *Гц* при $t = \tau = 3$ *с*, то есть реализуется up-chirp с наклоном $k = (f_2 - f_1)/\tau = 16.667$ *Гц/с*. Энергия сигнала сосредоточена в полосе 100–150 *Гц* (ширина полосы $\Delta f = 50$ *Гц*; центральная частота $f_0 \approx 125$ *Гц*), причём внутри полосы спектр имеет распределение близкое к равномерному.

На рис. 1 продемонстрирован STFrFT излученного и принятого LFM-сигнала $s(t)$ для двух порядков в случае отсутствия шума. Излученный сигнал при $p = 1$ (то есть стандартный STFT), показывает характерный *up-chirp* в виде яркого хребта, поднимающегося от 100 до 150 *Гц* за 0–3 *с*. В отличие от этого, при $p = 0.994$ ($\alpha \approx 1.561$ рад) преобразование фактически «поворачивает» принятый сигнал во временно–частотной области: спектр LFM-сигнала практически выпрямляется, и его энергия концентрируется в узкой, почти горизонтальной полосе около 100 *Гц*.

На рис. 1(в, г) показан результат STFrFT принятого LFM-сигнала $s(t)$ при $SNR = -30$ дБ. На рис. 1(в), при $p = 1$ (стандартный STFT), сильный диффузный шум, и LFM-сигнал неразличим. Но на рис. 1(г), при $p = 0.994$, STFrFT эффективно де-чирпирует сигнал и концентрирует энергию в узкой, почти горизонтальной полосе около 100 Гц благодаря выбору дробного порядка, близкого к скорости изменения частоты LFM-сигнала. Это позволяет эффективно отфильтровать принятый LFM-сигнал от шума.




*(а)* *(б)* *(в)* *(г)*

*Рис. 1. STFrFT излученного и принятого зашумлённого LFM-сигнала: (а),(в) $S(t,u)$ — STFrFT $s(t)$ при $p=1$; (б),(г) $S(t,u)$ — STFrFT $s(t)$ при $p=0.994$. Шум равен –30 дБ*

*(а)* *(б)*

*Рис. 2. STFrFT принятого зашумлённого LFM-сигнала после фильтрации шума: (а) $S(t,u)$ — STFrFT $s(t)$, $p=0.994$; (b) $S(t,u)$ — STFrFT $s(t)$, $p=1$. Шум равен –30 дБ*

На рис. 2 показан результат фильтрации шума в области STFrFT для зашумленного принятого LFM-сигнала при входном $SNR=-30$ дБ. Принятый LFM-сигнал фильтруется в области STFrFT, как показано на рис. 2(а), при порядке, согласованном с параметром LFM-сигнала ($p=0.994$). В этом случае представление сигнала эффективно де-чирпируется, то есть энергия сжимается в узкую, почти горизонтальную полосу около 100 Гц. Такой подход обеспечивает высокую эффективность фильтрации. После фильтрации LFM-сигнала применяется обратное STFrFT ($p=0.994$). Затем к очищенному LFM-сигналу применяется прямое STFrFT ($p=1$). Рис. 2(б) показывает, что при использовании стандартного STFT энергия восстановленного принятого LFM-сигнала совпадает с ожидаемой структурой LFM-сигнала. Таким образом, мы получаем спектральное распределение очищенного от шума LFM-сигнала, которое может быть использовано для построения интерферограммы и голограммы источника.

На рис. 3(а, б) показаны результаты голографической обработки с помощью традиционного FT для LFM-сигнала в присутствии значительной шумовой помехи ($\Delta f=100-120$ *Гц*, $v=3$ *м/с*, $SNR=-30$ дБ). Отсутствие фильтрации в области STFrFT заметно ухудшает результат голографической обработки. В области интерферограммы на рис. 3(а) структура полностью маскируется широкополосным шумом, и наклонные квазипериодические интерференционные полосы, ожидаемые для движущегося источника, не просматриваются.

В области голограммы на рис. 3(б) энергия распределена диффузно. Фокальные пятна не удаётся локализовать: они сильно замаскированы шумом. Отсутствие хорошо выраженной структуры не позволяет определить координаты фокальных пятен и, следовательно, делает невозможной оценку параметров источника. Эти результаты подчёркивают необходимость шумоподавления в области STFrFT перед голографической обработкой сигнала в условиях низкого $SNR$ ($SNR\le -30$ дБ). На рис. 3(в, г) показаны результаты голографической обработки на основе STFrFT для LFM-сигнала в присутствии значительной шумовой помехи ($\Delta f=100-120$ *Гц*, $v=3$ *м/с*, $SNR=-30$ дБ). Применение фильтра на основе STFrFT суще-

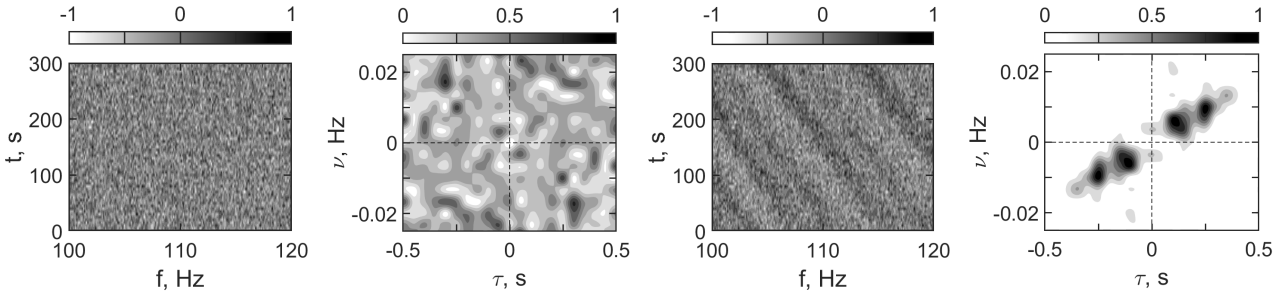



*Рис. 3. Голографическая обработка LFM-сигнала на основе традиционного FT: (а) интерферограмма $I(f,t)$; (б) голограмма $F(\tau,\tilde{v})$. Голографическая обработка LFM-сигнала на основе STFrFT: (в) интерферограмма $I(f,t)$, (г) голограмма $F(\tau,\tilde{v})$. Частотный диапазон:* $\Delta f = 100-120$ *Гц. Движущийся источник:* $v = 3$ *м/с. Шум равен —30 дБ*

ственно улучшает результат голографической обработки. В области интерферограммы на рис. 3(в) структура во времени и частоте становится чёткой: на всей полосе видны наклонные квазипериодические интерференционные полосы с ненулевым наклоном $\delta f/\delta t$, что согласуется с частотным сдвигом из-за движения источника. В области голограммы на рис. 3(г) энергия фокусируется в компактных фокальных пятнах, смещённых относительно оси $v = 0$. Такое улучшение результатов голографической обработки позволяет надёжно определять координаты фокальных пятен и, следовательно, с высокой точностью оценивать параметры LFM-сигнала (скорость и дальность) в условиях низкого $SNR$ в мелководье.

Голографическая обработка выполнена на основе STFrFT фильтрации позволяет получить следующие результаты (рис. 3). Интерферограмма демонстрирует ненулевой частотный сдвиг, $\delta f/\delta t \approx -0.036$ $c^{-2}$ обусловленный движением источника. В области голограммы доминирующее фокальное пятно расположено при $\tau_1 = 1.15\cdot10^{-1}$ *с* и $\nu_1 = 3.81\cdot10^{-3}$ *Гц*, что согласуется с частотным сдвигом интерферограммы. Эти голографические параметры приводят к оценке параметров сигнала: $\dot{v} = -3.82$ *м/с* и $\dot{r}_0 = 9.6$ *км*. Эти значения хорошо согласуются с модельными параметрами движущегося источника. По сравнению с модельными параметрами ($v = 3$ *м/с*, $r_0 = 10$ *км*), ошибки составляют около 27.3 % по скорости и 4 % по дальности. Представленные результаты исследования демонстрируют, что использование подавления шума на основе STFrFT в качестве предварительного этапа в голографической обработке сигналов является высокоэффективным для LFM-сигналов от подвижного источника в мелководном волноводе при низком отношении сигнал/шум. При $SNR = -30$ дБ разработанный метод существенно понижает спектральный уровень шума, восстанавливает интерферометрическую структуру и формирует хорошо локализованные фокальные пятна в голограмме. Это повышает обнаруживаемость, а также точность и устойчивость последующих оценок параметров сигнала по сравнению с традиционной обработкой на основе FT.

## Заключение

Предложен метод голографической обработки сигналов на основе FrFT для LFM-сигнала движущегося источника в мелководном волноводе. Показано, что такой метод обеспечивает надежное определение дальности и радиальной скорости источника даже при очень высоких уровнях шума ($SNR \le -30$ дБ). Голограмма слабо искажается из-за помех, фокальные точки выстраиваются вдоль прямой и напрямую соответствуют параметрам источника. Для движущегося источника расстояние восстанавливается с погрешностью до 5 %, скорость — с погрешностью до 30%: в отсутствие шума ошибки скорости и дальности составляют 15 % и 1 %, а при с/п = –30 дБ – 27 % и 4 %. Метод эффективно подавляет шум и восстанавливает структуру голограммы, что обеспечивает его устойчивость и практическую применимость для анализа сигналов в мелководных и шумных акустических средах.

**Литература**


1. *Namias V.* The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics // IMA J. Appl. Math. – 1980. – Vol. 25. – P. 241–265.

2. *Tao R., Li Y.-L., Wang Y.* Short-time fractional Fourier transform and its applications // IEEE Trans. Signal Process. – 2010. – 58. – P. 2568–2580.

3. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

4. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Голографические методы обработки гидроакустических сигналов (Обзор) // Акуст. журн. – 2025. – Т. 71, № 1. – С. 96–117.

5. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

6. *Ehrhardt M., Pereselkov S., Kuz'kin V., Kaznacheev I., Rybyanets P.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

7. *Глущенко М. Ю., Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Хворостов Ю. А., Ткаченко С. А.* Голографический метод идентификации шумового подводного источника в мелком море // Акуст. журн. – 2024. – Т. 70, № 3. – С. 67–77.

8. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Matvienko Y., Tkachenko S., Rybyanets P.* The Formation of 2D Holograms of a Noise Source and Bearing Estimation by a Vector Scalar Receiver in the High-Frequency Band // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – 12. – 704.

9. *Казначеев И. В., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

10. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kaznacheev I. V., Grigor'ev V. A.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver // Phys. W. Ph. – 2017. – Vol. 25, No 4. – P. 299–306.

11. *Переселков С. А., Кузькин В. М., Кузнецов Г. Н., Просовецкий Д. Ю., Ткаченко С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов // Акуст. журн. – 2020. – Т. 66, № 4. – С. 437–445.

12. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Куцов М. В., Переселков С. А.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне // Изв. РАН. Сер. физ. – 2021. – Т. 85, № 6. – С. 907–912.

13. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Zvyagin V. G., Malykhin Yu. A., Prosovetskiy D. Yu.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Phys. W. Ph. – 2018. – Vol. 26, No 2. – P. 160–167.

14. *Badiey M., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu., Tkachenko S. A.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II. Phys. W. Ph. – 2019. – 27(4). – P. 313–319.

15. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В.И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204.

16. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Ладыкин Н. В., Куцов М. В.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

17. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 1922.

18. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Influence of Intense Internal Waves Traveling Along an Acoustic Path on Source Holographic Reconstruction in Shallow Water // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – 13. – P. 1409.

19. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt, M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Effects of Irregular Bathymetry on Hologram Formation of Moving Source in ShallowWater // J. Mar. Sci. Eng. –2025. – 13. – P. 1775.

20. *Беседина Т. Н., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Определение глубины источника звука в мелком море на фоне интенсивного шума // Акуст. журн. – 2015. – Т. 61, № 6. – С. 718–728.

21. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Wave method for estimating the sound source depth in oceanic waveguide // Phys. W. Ph. – 2016. – Vol. 24, No 4. – P. 310–316.

22. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А.* Обнаружение источника в диспергирующих средах // РЭНСИТ. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

23. *Матвиенко Ю. В., Кузькин В. М., Переселков С. А., Ладыкин Н. В., Грачев В. И.* Обнаружение и локализация шумового подводного источника в мелководной акватории на фоне интенсивного судоходства // РЭНСИТ. – 2025. – Т. 17, № 2. – С. 211–220.

24. *Kuz'kin V. M., Kuznetsov G. N., Pereselkov S. A., Grigor'ev V. A.* Resolving power of the interferometric method of source localization // Phys. W. Ph. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

25. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

26. Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. A. Resolution of hydroacoustic noise signals under conditions of spatial-temporal variability of ocean environment // Phys. W. Ph. – 2024. – Vol. 32, № 4. – P. 290–299.

27. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kuznetsov G. N., Kaznacheev I. V.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver // Phys. W. Ph. – 2018. – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

28. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Direction finding of a noise sound source // Phys. W. Ph. – 2019. – Vol. 27, № 3. – P. 237–241.

29. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Логачев В. В., Косенко И. М.* Голографический метод обработки гидроакустических сигналов высокочастотного источника в мелком море // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 545–554.

30. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Tkachenko S. A.* Adaptive algorithms for interferometric processing // Phys. W. Ph. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 267–273.

31. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. F.* Adaptive method for holographic processing of broadband hydroacoustic signals // Phys. W. Ph. – 2024. – Vol. 32, № 5. – P. 382–391.

32. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Адаптивный алгоритм локализации шумовых подводных источников в мелководных акваториях // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 533–544.

33. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Prosovetskii D. Yu., Kaznacheeva E. S.* Mode selection in oceanic waveguides // Phys. W. P. – 2022. – Vol. 30, No 2. – P. 111–118.

34. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Kaznacheeva E. S., Tkachenko S. A.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves // Phys. W. Ph. – 2022. – Vol. 30, No 5. – P. 314–320.

35. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 279–286.

36. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Use of interference patterns to control sound field focusing in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 559.

УДК 519.6

# ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОЦЕНКЕ ГЛУБИНЫ ИСТОЧНИКА В МЕЛКОВОДНОМ ВОЛНОВОДЕ

**В. М. Кузькин[1], С. А. Переселков[2], А. С. Переселков[2], Л. Н. Попова[2]**

*[1]Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Представлен пассивный акустический метод дистанционного зондирования в мелководных условиях, позволяющий оценивать глубину источника звука с использованием одного приемника. Оценка глубины осуществляется путем сопоставления измеренных соотношений амплитуд мод с теоретическими значениями.
**Ключевые слова:** пассивный метод, источник звука, оценка глубины, одиночный приемник, моды звукового поля.

В работе представлен пассивный акустический метод дистанционного зондирования в мелководье ([1, 2]), позволяющий оценивать глубину источника звука с использованием одного приемника. Предполагается, что сигнал источника является импульсным, что позволяет реализовать модальный фильтр в частотно-временной области на основе модовой дисперсии. Оценка глубины осуществляется путем сопоставления измеренных соотношений амплитуд мод с теоретическими значениями

Мелководный волновод глубиной $H(r,z)$ в координатах $(r,z)$. Сигнал, излучаемый точечным источником $S$ на частоте $\omega = 2\pi f$ с глубины $z_s$, принимается точечным приемником $Q$ на глубине $z_q$. Источник $S$ находится на горизонтальном расстоянии $r$ от приемника $Q$. Звуковое поле источника $S$ в точке приемника $Q$ представлено как сумма распространяющихся мод:

$$p(r,z_s,z_q,\omega) = \sum_{m=1}^{M} A_m(r,z_s,z_q,\omega)\exp\left(ih_m(\omega)r\right), \tag{1}$$

где $A_m$ и $h_m$ — амплитуда и волновое число моды $\phi_m(z)$ с номером $m$. Здесь $M$ — число распространяющихся мод.

Предполагается, что сигнал источника является импульсным или имеет короткую длительность, что позволяет реализовать модальный фильтр в частотно-временной области на основе модовой дисперсии. Временная зависимость $\zeta(\tau)$ принятого сигнала в частотной полосе $|\omega-\omega_0| \le \Delta\omega/2$. Для определения $\zeta(\tau)$ применяем преобразование Фурье (1):

$$\zeta(\tau) = \sum_{m=1}^{M} \zeta_m(\tau), \tag{2}$$

где $\zeta(\tau)$ — временная зависимость сигнала моды $\phi_m(z)$ с номером $m$:

$$\zeta_m(\tau) = \int_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} A_m(r,z_s,z_q,\omega)\exp\left(ik_m(\omega)r - i\omega\tau\right)d\omega. \tag{3}$$

Считаем амплитуду $A_m$ медленно изменяющейся функцией по сравнению с фазой, что позволяет вынести ее из интеграла при $\omega = \omega_0$. В результате получаем следующее выражение для временной зависимости моды $\zeta_m(\tau)$:

$$\zeta_m(\tau) = A_m(r,z_s,z_q,\omega_0)\Delta\omega\exp\left\{i\left[h_m(\omega_0)r - \omega_0\tau\right]\right\} \times \frac{\sin\left[\Delta\omega(\tau-\tau_m)/2\right]}{\left[\Delta\omega(\tau-\tau_m)/2\right]}, \tag{4}$$

где положение главного максимума сигнала моды $\zeta_m(\tau)$ имеет значение $\tau = \tau_m$. Здесь $\tau_m = \dfrac{r}{u_m(f_0)}$ — время распространения $m$-й моды, а $u_m = \dfrac{d(\omega)}{dh_m}$ — групповая скорость. Рассмо-

трим отношение амплитуд двух соседних мод $A_m(r, z_s, z_q, f)$ и $A_n(r, z_s, z_q, f)$:

$$\chi_{mn}^{(\mathrm{ex})}(z_s, z_q, f) = \frac{A_m(r, z_s, z_q, f)}{A_n(r, z_s, z_q, f)}, \tag{5}$$

Здесь «(ex)» обозначает экспериментальный результат. Введем функцию $\Theta_{mn}(z)$ как разность между теоретическим $\chi_{mn}^{(\mathrm{th})}$ и экспериментальным $\chi_{mn}^{(\mathrm{ex})}$ значениями:

$$\Theta_{mn}(z) = \left| \chi_{mn}^{(\mathrm{th})}(z, z_q, f) - \chi_{mn}^{(\mathrm{ex})}(z_s, z_q, f) \right|, \tag{6}$$

где

$$\chi_{mn}^{(\mathrm{th})}(z, z_q, f) = \frac{\phi_m^{(\mathrm{th})}(z, f)\phi_n^{(\mathrm{th})}(z_q, f)}{\phi_n^{(\mathrm{th})}(z, f)\phi_m^{(\mathrm{th})}(z_q, f)}. \tag{7}$$

Предложенный метод основан на уравнениях (5)–(9). Оценка глубины источника — это значение $z = z'$, для которого выражение (6) обращается в нуль:

$$\Theta_{mn}(z') = 0. \tag{8}$$

Параметры численного моделирования. Глубина водного слоя $H = 53$ *м*. Скорость звука в придонном слое $c = 1700$ *м/с*. Плотность придонного слоя $\rho = 1.8$ *г/см*$^3$. Параметр поглощения дна $\alpha = 0.01$. Глубина приемника $z_q = 52$ *м*. Глубина источника $z_s = 15$ *м*. Принятый сигнал рассматривался в частотной полосе $\Delta f = 120 - 160$ *Гц*.

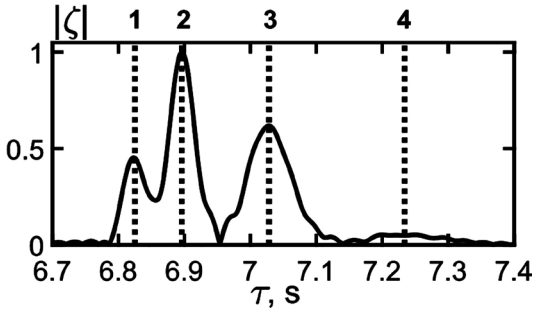



*Рис. 1. Временная зависимость* $|\zeta(\tau)|$

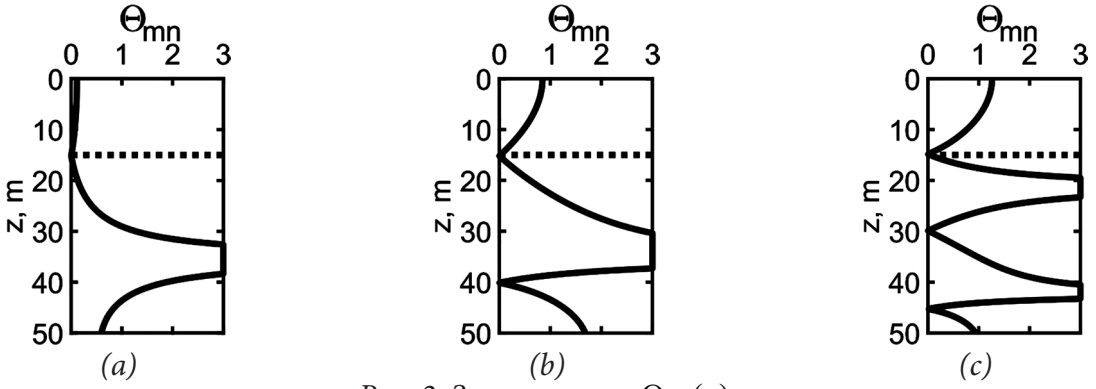



*Рис. 2. Зависимость* $\Theta_{mn}(z)$

Результаты моделирования представлены на рис. 1 и рис. 2. Нормированная временная зависимость $|\zeta(\tau)|$ принятого сигнала показана на рис. 1. Принятый сигнал содержит четыре моды: $A_1 = 0{,}54$, $A_2 = 1{,}0$, $A_3 = 0{,}6$, $A_4 = 0{,}005$. Функция $\Theta_{mn}(z)$, рассчитанная для этих значений $A_m$, показана на рис. 2 для различных пар мод: (a) $m = 1$, $n = 2$; (b) $m = 3$, $n = 2$; (c) $m = 4$, $n = 3$. Как видно, из представленных результатов получаемая оценка глубины источника соответствует модельному значению: $z_s = 15$ *м*.

Таким образом, представленные результаты численного моделирования демонстрируют высокую эффективность рассмотренного в работе метода оценки глубины источника звука с

использованием одного приемника. Разработанный оценщик глубины имеет четкий и хорошо определенный экстремум. Результаты численного моделирования к истинному значению (ошибка менее 1 метра). В отличие от этого, ошибка оценки глубины источника в альтернативных подходах составляет десятки метров ([1, 2]). Предложенный подход адаптирован для компактной аппаратной реализации в системах подводного мониторинга с использованием АНПА с приемниками. В будущих исследованиях планируется комбинировать предложенный метод оценки глубины с голографической обработкой сигналов, разработанной в работах [3–25]. Физические и математические принципы формирования голограмм в океаническом волноводе описаны в [4–7]. В статье [5] метод обобщен для шумового источника. В [6, 7] был проанализирован для низкочастотный диапазон в регулярных волноводах. В работах [8, 9] исследована разрешающая способность нескольких источников. В работах [10–17] проанализирована эффективность метода в присутствии внутренних волн. Адаптивные алгоритмы разработаны в статьях [18]. В работе [19, 20] методы обобщены на случай антенных сигналов. В статьях [21, 22] разработаны методы модовой селекции в мелководном волноводе. Применение метода в случае векторно-скалярного приёмника в высокочастотном диапазоне рассмотрено в работах [23–25].

**Благодарности**

Исследование поддержано грантом Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/.

**Литература**

1. *Yang T. C.* A method of range and depth estimation by modal decomposition // J. Acoust. Soc. Am. – 1987. – 82. – P. 1736–1745.

2. *Shang E. C.* Source depth estimation in waveguides // J. Acoust. Soc. Am. – 1985. – 77. – P.1413–1418.

3. *Kuznetsov G. N. [et al.]* Spectrogram and localization of a sound source in a shallow sea. // Acoust. Phys. – 2017. – 63(4) . – P. 449–461.

4. *Kuz'kin V. M. [et al.]* Detection of a source in dispersive media // RENSIT. – 2019. – 11(3) . – P. 337–344.

5. *Kuz'kin V. M. [et al.]* Noise source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing // Phys. Wave Phen. – 2020. – 28(1). – P. 68–74.

6. *Pereselkov S. A. [et al.]* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – 151. – P. 666–676.

7. *Ehrhardt M. [et al.]* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // J. Sound Vibr. – 2023. – 544. – P. 117388.

8. *Kuz'kin V. M. [et al.]* Resolving power of the interferometric method of source localization // Ph. W. Ph. – 2018. – 26(2). – P. 150–159.

9. *Grachev V. I. [et al.]* Resolution of noise signals in the presence of random inhomogeneities of the oceanic medium // RENSIT. – 2024. – 16(3). – P. 395–406.

10. *Kuz'kin V. M. [et al.]* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Ph. W. Ph. – 2018. – 26(2). – P. 160–167.

11. *Badiey M. [et al.]* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II // Ph. W. Ph. – 2019. – 27(4) – P. 313–319.

12. *Kuz'kin V.M. [et al.]* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves // Ph. W. Ph. – 2021. – 29(3) . – P. 278–284.

13. *Badiey M. [et al.]* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves // Ph. W. Ph. – 2023. – 31(5). – P. 346–354.

14. *Badiey M. [et al.]* Interferometry of hydrodynamics of oceanic shelf caused by intensive internal waves // Fund. Ap. Hydr. – 2020. – 1. – P. 45–55.

15. *Kuz'kin V. M. [et al.]* Holographic processing of moving sources in shallow sea in the presence of intensive internal waves // RENSIT. – 2022. – 14(2) . – P. 197–204.

16. *Kuz'kin V. M. [et al.]* Holographic method for localizing a moving sound source in the presence of intensive internal waves. // RENSIT. – 2023. – 15(3) . – P.317-326.

17. *Ehrhardt M. [et al.]* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. –11. – P. 1922.

18. *Pereselkov S. [et al.]* Adaptive Algorithms for Interferometric Processing // Ph. W. Ph. – 2020. –28. – P. 267–273.

19. *Kuz'kin V. M. [et al.]* Interferometric processing of acoustic information using extended antennas in dispersive media // RENSIT. – 2020. – 12(4). – P. 483–494.

20. *Matvienko Yu. V. [et al.]* Detection of a noise signal in an oceanic waveguide using a horizontal antenna // RENSIT. – 2022. – 14(1). – P. 65–72.

21. *Matvienko Yu. V. [et al.]* Mode selection in oceanic waveguides // Ph. W. Ph. – 2022. – 30(2). – P. 111–118.

22. *Matvienko Yu. V. [et al.]* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves // Ph. W. Ph. – 2022. – 30(5). – P. 314–320.

23. *Kuznetsov G. N. [et al.]* Interferometric method for detecting a moving sound source using a vector-scalar receiver // Acoust. Phys. – 2018. – 64(1). – P. 33–45.

24. *Kuznetsov G. N. [et al.]* Interferometric method for estimating the coordinates of a moving noise source in shallow sea using high-frequency signals // Acoust. Phys. – 2020. – 66(4). – P. 437–445.

25. *Ehrhardt M. [et al.]* The Formation of 2D Holograms of a Noise Source and Bearing Estimation by a Vector Scalar Receiver in the High-Frequency Band // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – 12. – P. 704.

УДК 519.67

# ОЦЕНКА КАЧЕСТВА АЛГОРИТМА СОЕДИНЕНИЯ ЦИКЛОВ ДЛЯ МЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ

**Ю. Ф. Леонова**

*Южно-уральский государственный университет*

**Аннотация.** В работе исследуется алгоритм соединения циклов (Cycle Merging Algorithm, CMA), применяемый для решения метрической задачи коммивояжера на максимум. Основное внимание уделено строгому анализу промежуточных состояний CMA и описанию поведения веса частичного решения при последовательном объединении циклов. Предложены две новые леммы, которые дают развернутую оценку потерь веса на каждом шаге и позволяют вывести нижнюю границу точности алгоритма через параметры исходного 2-фактора максимального веса. Полученные результаты уточняют структуру доказательства ранее установленной теоремы о качестве CMA и расширяют теоретическую базу исследований приближенных алгоритмов для метрической задачи коммивояжера на максимум.

**Ключевые слова:** метрическая задача коммивояжера на максимум; MAX TSP; алгоритм соединения циклов; 2-фактор максимального веса; приближенные алгоритмы; теоретический анализ; оценка точности; гамильтонов цикл; метрические графы; комбинаторная оптимизация; неравенство треугольника; анализ слияния циклов.

## Введение

Пусть $G = (V, E)$ полный граф, на ребрах которого задана неотрицательная весовая функция $W : E \to Z^{\geq 0}$. Для любого подмножества ребер $E' \subset E$ положим $W(E') = \sum_{e \in E'} W(e)$. Гамильтонов цикл — это цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. Задача коммивояжера на максимум (MAX TSP) состоит в нахождении гамильтонова цикла $H \in G$ с максимальным весом $W(H)$.

Задача коммивояжера на максимум нашла применение в комбинаторике и вычислительной биологии: в частности, при анализе взаимодействий РНК [1] и в алгоритмах компактного представления данных секвенирования ДНК [2]; в задаче нахождения треугольного покрытия графа максимального веса [3] и к комбинаторной задаче bandpass-2 [4], где требуется найти наилучшую перестановку строк в матрице с булевыми значениями, при которой взвешенная сумма структур, называемых полосовыми пропусками, максимальна.

Особый интерес представляют геометрические экземпляры задачи коммивояжера, в которых вершины графа $G$ соответствуют точкам в $\mathbb{R}^d$ для некоторого $d \geq 1$, а расстояния вычисляются в соответствии с некоторой геометрической нормой. Подобные задачи принято называть метрическими [5].

Известно, что метрическая задача коммивояжера на максимум является SNP-трудной [6], что делает разработку эффективных приближенных и эвристических алгоритмов актуальным направлением исследований.

Одним из перспективных подходов к построению приближенных решений является использование 2-фактора максимального веса с последующим объединением его компонент в единый цикл. Алгоритм соединения циклов (Cycle Merging Algorithm, CMA) реализует именно такой способ построения решения. Эффективность алгоритма в значительной мере определяется тем, как изменяется вес частичного решения при последовательном слиянии циклов.

В наших предыдущих работах [7] была получена теорема, устанавливающая нижнюю оценку качества CMA для метрической MAX TSP: отношение $W_{alg} / W_{opt}$ не хуже $5/6$, и эта оценка

является достижимой. Однако само доказательство теоремы использовало компактные рассуждения, которые, хотя и корректны, скрывают несколько ключевых структурных свойств процесса слияния циклов.

Настоящая статья посвящена более детальному раскрытию этих свойств. Основной целью работы является представление двух новых лемм, описывающих:

• поведение веса при слиянии очередного цикла с текущим частичным решением;

• суммарную оценку веса итогового гамильтонова цикла через параметры исходного 2-фактора.

Эти леммы позволяют разложить доказательство теоремы на понятные и строго обоснованные шаги, уточняют механизм работы СМА и формируют теоретическую базу для дальнейшего анализа алгоритма. Тем самым данная статья дополняет результаты предыдущих исследований, предлагая их более глубокое и прозрачное обоснование.

Статья организована следующим образом. В первом разделе кратко обсуждается состояние исследований в области приближенных алгоритмов решения MAX TSP. Во втором разделе описывается алгоритм соединения циклов. В третьем разделе приводятся новые леммы и их доказательства, составляющие основной вклад работы. В заключении приводится краткая сводка результатов, полученных в работе, и указаны направления дальнейших исследований.

## 1. Обзор состояния проблемы

Первые приближенные алгоритмы для задачи MAX TSP были разработаны Фишером, Немхаузером и Уолси [8]. Они предложили несколько алгоритмов с коэффициентом аппроксимации $1/2$ и один алгоритм с гарантированной оценкой $2/3$. В [9] Косараджу, Парк и Штейн представили улучшенный алгоритм, имеющий оценку $19/27$. Этот результат, в свою очередь, был улучшен Хассином и Рубинштейном, которые предложили $5/7$-приближенный алгоритм [10]. В 1984 году Сердюков [11] представил простой и элегантный $3/4$-приближенный алгоритм. Алгоритм является детерминированным (выдает уникальный и предопределенный результат для заданных входных данных) и имеет трудоемкость $O(V^3)$, где $V$ — множество вершин графа. Впоследствии Хассин и Рубинштейн [12] предложили рандомизированный (использует степень случайности как часть своей логики) алгоритм, имеющий ожидаемый коэффициент аппроксимации не менее $\frac{25\cdot(1-\varepsilon)}{(33-32\cdot\varepsilon)}$ и трудоемкость $O(|V|^2\ (|V|+2^{(1/\varepsilon)}))$, где $\varepsilon$ — произвольно малая константа. Первый детерминированный приближенный алгоритм с оценкой лучше, чем $3/4$, был предложен в [13] Ченом, Окамото и Вангом: $61/81$-приближенный алгоритм с трудоемкостью $O(|V|^3)$. В 2009 году Палуч, Муха и Мадри [14] предложили приближенный алгоритм с оценкой $7/9$ и трудоемкостью $O(|V|^3)$. В 2017 году Дудич, Марцинковский, Палуч и Рыбицкий предложили $4/5$-приближенный алгоритм [15] с трудоемкостью $O(|V|^3)$.

Для метрической задачи коммивояжера на максимум известны детерминированный алгоритм Косточки — Сердюкова [16] с оценкой точности $5/6$ и трудоемкостью $O(|V|^4)$, алгоритм Панюкова — Тычинина [17] с оценкой точности $7/9$ и трудоемкостью $O(|V|^3)$, $7/8$-приближенный алгоритм Хассина и Рубинштейна [18], имеющий асимптотическую оценку точности и трудоемкость $O(|V|^3)$, $17/20$-приближенный рандомизированный алгоритм, предложенный Ченом, Окамото и Вангом [13] с трудоемкостью $O(|V|^3)$.

С развитием методов аппроксимации были также получены результаты, уточняющие фундаментальные границы сложности задачи. В частности, в работах А. Фриза и соавторов [19] было показано, что построение максимального 2-фактора служит естественной основой для константных алгоритмов приближения для MAX TSP, а сам подход «2-фактор $\rightarrow$ слияние циклов» является центральным элементом подавляющего большинства современных алгоритмов.

В геометрических пространствах особый вклад внесены более поздними исследованиями В.В. Шенмайера [20], где показано, что при фиксированной размерности метрического пространства возможно построение PTAS, хотя цена такого улучшения — сверхполиномиальная трудоемкость, которая существенно ограничивает практическое применение данных схем. Эти результаты интересны тем, что демонстрируют качественное отличие между общим случаем MAX TSP и его геометрическими экземплярами.

Отдельного внимания заслуживает развитие алгоритмов, использующих максимальные паросочетания и их комбинации с 2-факторами [21]. Они обеспечивают различные варианты локального улучшения, расширяя класс методов, которые используют CMA-подобное объединение компонентов. Хотя такие алгоритмы редко улучшают известные лучшие константы, они позволяют точнее исследовать структуру оптимального решения и являются основой для нескольких рандомизированных схем.

## 2. Алгоритм соединения циклов

**Алгоритм соединения циклов**
**Вход:** полный граф $G=(V,E)$,
весовая функция $W: E \to R$.
**Выход:** гамильтонов цикл максимального веса.
**Шаг 1.** Найти 2-фактор $C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$ максимального веса в графе $G$.
**Шаг 2.** Если $n=1$, то вернуть $C$ — найденное решение. Переход на Шаг 5.
**Шаг 3.** Для всех попарно различных циклов $r,t \in C$ найти замену ребер, обеспечивающую оптимальное соединение циклов, и стоимость этого соединения.

$$\begin{pmatrix} e^r_{\{r\oplus t\}} \\ e^t_{\{r\oplus t\}} \\ f_{\{r\oplus t\}} \\ g_{\{r\oplus t\}} \end{pmatrix} = \arg\max_{\substack{e^r=\{u_1,u_2\}\in E(c_r),\\ e^t=\{u_1,u_2\}\in E(c_t),\\ f,g\in E(G),\ f\cup g=e^r\cup e^t}} \left(W(f)+W(g)-W(e^r)-W(e^t)\right). \tag{1}$$

$$\tilde{W}(r\oplus t)=W(f_{r\oplus t})+W(g_{r\oplus t})-W(e^r_{r\oplus t})-W(e^t_{r\oplus t}) \tag{2}$$

**Шаг 4.** Пока $n>1$, выполнять шаги 4.1–4.4.
**Шаг 4.1.** Пусть $(r^*,t^*)=\arg\operatorname{ext}_{r,t\in C}\tilde{W}(r\oplus t)$. (3)
**Шаг 4.2.** Построить цикл

$$\begin{aligned} &s=r^*\oplus t^*: V(s)=V(r^*)\cup V(t^*),\\ &E(s)=\left(E(r^*)\cup E(t^*)\cup\left\{f_{r\oplus t},g_{r\oplus t}\right\}\right)\setminus\left\{e^r_{\{r\oplus t\}},e^t_{\{r\oplus t\}}\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

**Шаг 4.3.** Модифицировать 2-фактор

$$C=\left(C\cup\{s\}\right)\setminus\{r,t\};\ n:=n-1. \tag{5}$$

**Шаг 4.4.** Для всех $t\in C: t\neq s$ найти замену ребер, обеспечивающую оптимальное соединение циклов $t$ и $s$, и стоимость этого соединения:

$$\begin{pmatrix} e^s_{\{s\oplus t\}} \\ e^t_{\{s\oplus t\}} \\ f_{\{s\oplus t\}} \\ g_{\{s\oplus t\}} \end{pmatrix} = \arg\max_{\substack{e^s=\{u_1,u_2\}\in E(c_s),\\ e^t=\{u_1,u_2\}\in E(c_t),\\ f,g\in E(G),\ f\cup g=e^s\cup e^t}} \left(W(f)+W(g)-W(e^s)-W(e^t)\right). \tag{6}$$

$$\tilde{W}(r\oplus t)=W(f_{s\oplus t})+W(g_{s\oplus t})-W(e^s_{s\oplus t})-W(e^t_{s\oplus t}). \tag{7}$$

**Шаг 5.** $C$ — найденное решение. Останов.

## 3. Анализ точности алгоритма соединения циклов

### *3.1. Вспомогательные утверждения*

Для анализа качества работы алгоритма CMA докажем ключевое свойство процесса последовательного слияния циклов.

**Лемма 1.** *Пусть алгоритм CMA последовательно сливает циклы* $c_1, c_2, \ldots, c_k$, *образующие разбиение множества вершин* $V$, *в гамильтонов цикл* $H$. *Обозначим через* $s_i$ *цикл, полученный после слияния первых* $i$ *циклов (начиная с некоторого* $s_1 = c_j$*), и через* $W(s_i)$ *— его вес. Тогда для любого шага слияния* $i \in \{2, \ldots, k\}$ *выполняется неравенство:*

$$W(s_i) \geq W(s_{i-1}) + W(c_i) - \frac{1}{2}\left( \frac{W(s_{i-1})}{|s_{i-1}|} + \frac{W(c_i)}{|c_i|} \right).$$

**Доказательство.** Рассмотрим шаг алгоритма, на котором происходит слияние текущего цикла $s_{i-1}$ с очередным циклом $c_i$ из исходного 2-фактора. Согласно формальному описанию алгоритма (Шаг 4.4), выбираются ребра $e^s = \{v_1, v_2\} \in E(s_{i-1})$ и $e^t = \{u_1, u_2\} \in E(c_i)$, которые удаляются, и пара ребер $\{f, g\}$, которые добавляются для соединения циклов.

В силу метричности весовой функции (неравенство треугольника) и ее ориентации на максимум, выполняются неравенства:

$$W\{v_1, v_2\} + W\{u_1, u_2\} \leq W\{v_1, u_1\} + W\{u_2, v_2\},$$
$$W\{v_1, v_2\} + W\{u_1, u_2\} \leq W\{v_1, u_2\} + W\{v_2, u_1\}.$$

Суммирование этих неравенств дает:

$$2 \cdot \left[ W\{v_1, v_2\} + W\{u_1, u_2\} \right] \leq 2 \cdot W\{v_1, u_1\} + 2 \cdot W\{u_2, v_2\} + 2 \cdot W\{v_2, u_1\} + 2 \cdot W\{u_1, v_2\} \leq$$
$$\leq 4 \cdot \max\left\{ W\{v_1, u_1\} + W\{u_2, v_2\}, W\{v_2, u_1\} + W\{u_1, v_2\} \right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{W\{v_1, v_2\} + W\{u_1, u_2\}}{2} \leq \max\left\{ W\{v_1, u_1\} + W\{u_2, v_2\}, W\{v_2, u_1\} + W\{u_1, v_2\} \right\}. \quad (8)$$

Из оптимальности выбора ребер соединения (Шаг 4.4 алгоритма) следует, что алгоритм выбирает такую пару добавляемых ребер $\{f^*, g^*\}$, что величина $W(f^*) + W(g^*) - W(e^s) - W(e^t)$ максимальна. В частности, для любой другой пары ребер $\{f, g\}$, включая пару, достигающую максимума в правой части (8), выполняется:

$$W(f^*) + W(g^*) - W(e^s) - W(e^t) \geq \max\left\{ W\{v_1, u_1\} + W\{u_2, v_2\}, W\{v_2, u_1\} + W\{u_1, v_2\} \right\} - W(e^s) - W(e^t).$$

С учетом (8) получаем:

$$W(f^*) + W(g^*) - W(e^s) - W(e^t) \geq \max\left\{ W\{v_1, u_1\} + W\{u_2, v_2\}, W\{v_2, u_1\} + W\{u_1, v_2\} \right\} -$$
$$-W(e^s) - W(e^t) \geq -\frac{1}{2}(W(e^s) + W(e^t)). \quad (9)$$

Вес нового цикла $s_i$ после слияния равен:

$$W(s_i) = W(s_{i-1}) + W(c_i) + \left[ W(f^*) + W(g^*) \right] - \left[ W(e^s) + W(e^t) \right].$$

Используя оценку (9), получаем:

$$W(s_i) \geq W(s_{i-1}) + W(c_i) - \frac{1}{2}\left( W(e^s) + W(e^t) \right).$$

Поскольку алгоритм на Шаге 4.4 выбирает ребра $e^s$ и $e^t$, минимизирующие величину $W(e^s) + W(e^t)$ (для максимизации общего выигрыша), и так как средний вес ребра в цикле не меньше минимального, окончательно имеем:

$$W(s_i) \ge W(s_{i-1}) + W(c_i) - \frac{1}{2}\left(\min_{\{x,y\}\in E(s_{i-1})} W\{x,y\} + \min_{\{x,y\}\in E(c_i)} W\{x,y\}\right) \ge$$

$$\ge W(s_{i-1}) + W(c_i) - \frac{1}{2}\left(\frac{W(s_{i-1})}{|s_{i-1}|} + \frac{W(c_i)}{|c_i|}\right),$$

что и требовалось доказать.

**Лемма 2.** *Итоговый вес гамильтонова цикла $H$, построенного алгоритмом соединения циклов, удовлетворяет следующему неравенству:*

$$W_{alg} = W(H) \ge W(C) - \sum_{c\in C} \frac{W(c)}{2|c|},$$

*где $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ — исходный максимальный 2-фактор.*

**Доказательство.** Докажем индукцией по количеству циклов $k$ в $C$.

**База:** Для $k = 1$ 2-фактор уже является гамильтоновым циклом, $W(H) = W(C)$, и неравенство выполняется.

**Переход:** Пусть для любого 2-фактора из $k-1$ цикла неравенство верно. Рассмотрим 2-фактор $C$ из $k$ циклов. Алгоритм начинает с попарного слияния двух циклов $c_a$ и $c_b$ в цикл $s_2$. По лемме 1:

$$W(s_2) \ge W(c_a) + W(c_b) - \frac{1}{2}\left(\frac{W(c_a)}{|c_a|} + \frac{W(c_b)}{|c_b|}\right).$$

Рассмотрим новый 2-фактор $C' = \{s_2, c_3, \ldots, c_k\}$ из $k-1$ цикла. По предположению индукции, алгоритм построит гамильтонов цикл $H$ с весом:

$$W(H) \ge W(C') - \sum_{c'\in C'} \frac{W(c')}{2|c'|} = W(s_2) + \sum_{i=3}^{k} W(c_i) - \frac{1}{2}\left(\frac{W(s_2)}{|s_2|} + \sum_{i=3}^{k} \frac{W(c_i)}{|c_i|}\right).$$

Подставим оценку для $W(s_2)$:

$$W(H) \ge \left[W(c_a) + W(c_b) - \frac{1}{2}\left(\frac{W(c_a)}{|c_a|} + \frac{W(c_b)}{|c_b|}\right)\right] + \sum_{i=3}^{k} W(c_i) - \frac{1}{2}\left(\frac{W(s_2)}{|s_2|} + \sum_{i=3}^{k} \frac{W(c_i)}{|c_i|}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} W(c_i) - \frac{1}{2}\left(\frac{W(c_a)}{|c_a|} + \frac{W(c_b)}{|c_b|} + \frac{W(s_2)}{|s_2|} + \sum_{i=3}^{k} \frac{W(c_i)}{|c_i|}\right).$$

Покажем, что $\frac{W(s_2)}{|s_2|} \le \frac{W(c_a)}{|c_a|} + \frac{W(c_b)}{|c_b|}$. Поскольку $|s_2| = |c_a| + |c_b|$, и средний вес ребра в $s_2$ не превосходит максимума из средних весов в $c_a$ и $c_b$, то:

$$\frac{W(s_2)}{|s_2|} \le \max\left(\frac{W(c_a)}{|c_a|}, \frac{W(c_b)}{|c_b|}\right) \le \frac{W(c_a)}{|c_a|} + \frac{W(c_b)}{|c_b|}.$$

Следовательно, $W(H) \ge W(C) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{W(c_i)}{|c_i|}\right)$, что и требовалось доказать.

### *3.2. Точность алгоритма соединения циклов*

**Теорема.** *Пусть $W_{opt}$ — оптимальное значение метрической задачи коммивояжера на максимум, $W_C$ — вес максимального 2-фактора данной задачи, а $W_{alg}$ — вес гамильтонова цикла, построенного алгоритмом СМА. Тогда выполняется неравенство: $\frac{W_{alg}}{W_{opt}} \ge \frac{5}{6}$. Оценка $\frac{W_{alg}}{W_C} = \frac{5}{6}$ достижима.*

**Доказательство.** Так как весовая функция $W$ метрической задачи удовлетворяет неравенству треугольника $W\{u,v\}+W\{v,w\} \le W\{u,w\}$, $\forall u,v,w \in V$, то из леммы 2 имеем:

$$W_{alg} \ge W_C - \sum_{c \in C} \frac{W(c)}{2|c|}.$$

Так как 2-фактор $C = \{c_1,\ldots,c_k\}$ является максимальным, каждый его цикл содержит не менее трех вершин, и потому

$$\frac{W(c)}{|c|} \le \frac{1}{3} W(c).$$

Следовательно:

$$W_{alg} \ge W_C - \sum_{c \in C} \frac{W(c)}{2|c|} \ge W_C - \frac{1}{6} \sum_{c \in C} W(c) = \frac{5}{6} W_C.$$

Так как $W_C \le W_{opt}$ (вес 2-фактора не превосходит веса оптимального решения), получаем:

$$\frac{W_{alg}}{W_{opt}} \ge \frac{W_{alg}}{W_C} \ge \frac{5}{6}.$$

Что и требовалось доказать.

## Заключение

В работе проведено детальное исследование алгоритма соединения циклов (СМА), применяемого для решения метрической задачи коммивояжера на максимум. Построенные в статье леммы описывают фундаментальные свойства процесса последовательного слияния циклов в рамках СМА и позволяют строго оценить поведение веса промежуточных и итогового гамильтоновых циклов. Полученные результаты формируют теоретическую основу для точного анализа приближенного качества алгоритма.

Предложенные леммы раскрывают ключевые идеи ранее доказанной нами теоремы о точности СМА и дают развернутое объяснение структуры доказательства, что делает понимание работы алгоритма более прозрачным. В частности, показано, что вес результирующего гамильтонова цикла можно выразить через параметры исходного максимального 2-фактора, а потери, возникающие при каждом шаге объединения циклов, строго ограничены сверху. Эти оценки позволяют получить нижнюю границу качества 5/6 для метрической MAX TSP, ранее установленную в наших работах, теперь — в существенно более обоснованной форме.

Полученные результаты дополняют существующие исследования в области приближенных алгоритмов, опирающихся на 2-факторы максимального веса, и уточняют роль СМА среди классических комбинаторных методов. Кроме того, структурное описание процесса слияния циклов может использоваться для анализа модификаций СМА и гибридных алгоритмов, в которых локальные преобразования дополняются другими эвристическими компонентами.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются: анализ СМА в геометрических пространствах фиксированной размерности, изучение поведения алгоритма на весовых функциях с ослабленными метрическими свойствами, а также расширение приведенных лемм на классы рандомизированных алгоритмов. Представленные результаты создают основу для дальнейшего развития теоретических методов анализа MAX TSP и укрепляют позицию СМА как одного из ключевых алгоритмов для приближенного решения этой задачи.

## Литература

1. *Tong W., Goebel R., Liu T., Lin G.* Approximation algorithms for the maximum multiple RNA interaction problem // International Conference on Combinatorial Optimization and Applications. – Cham : Springer, 2013. – P. 49–59. – DOI: 10.1007/978-3-319-03780-6_5.

2. *Sichen Z., Zhao L., Liang Y. [et al.]* Optimizing read reversals for sequence compression // International Workshop on Algorithms in Bioinformatics. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 2015. – P. 189–202. – DOI: 10.1007/978-3-662-48221-6_14.

3. *Hassin R., Rubinstein S.* An approximation algorithm for maximum triangle packing // Discrete Applied Mathematics. – 2006. – Vol. 154, № 6. – P. 971–979. – DOI: 10.1016/j.dam.2005.11.003.

4. *Chen Z. Z., Wang L.* An improved approximation algorithm for the bandpass-2 problem // International Conference on Combinatorial Optimization and Applications. – Berlin ; Heidelberg: Springer, 2012. – P. 188–199. – DOI: 10.1007/978-3-642-31770-5_17.

5. *Харари Ф.* Теория графов. Гл. 9. Факторизация. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

6. *Панюков А. В., Леонова Ю. Ф.* Алгоритм соединения циклов для метрической задачи коммивояжера на максимум // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2021. – Т. 10, № 4. – С. 26–36.

7. *Barvinok A. I., Johnson D. S., Woeginger G. J., Woodroofe R.* Finding maximum length tours under polyhedral norms // Integer Programming and Combinatorial Optimization. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 1998. – P. 195–201. – DOI: 10.1007/3-540-69346-7_15.

8. *Fisher M. L., Nemhauser G. L., Wolsey L. A.* An analysis of approximations for finding a maximum weight Hamiltonian circuit // Operations Research. – 1979. – Vol. 27, № 4. – P. 799–809. – DOI: 10.1287/opre.27.4.799.

9. *Kosaraju S. R., Park J. K., Stein C.* Long tours and short superstrings // Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – Los Alamitos : IEEE, 1994. – P. 166–177. – DOI: 10.1109/SFCS.1994.365696.

10. *Hassin R., Rubinstein S.* An approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Information Processing Letters. – 1998. – Vol. 67, № 3. – P. 125–130. – DOI: 10.1016/S0020-0190(98)00102-1.

11. *Сердюков А. И.* Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. – 1984. – № 25. – С. 80–86.

12. *Hassin R., Rubinstein S.* Better approximations for MAX TSP // Information Processing Letters. – 2000. – Vol. 75. – № 4. – P. 181–186. – DOI: 10.1016/S0020-0190(00)00097-1.

13. *Chen Z. Z., Okamoto Y., Wang L.* Improved deterministic approximation algorithms for MAX TSP // Information Processing Letters. – 2005. – Vol. 95, № 2. – P. 333–342. – DOI: 10.1016/j.ipl.2005.03.011.

14. *Paluch K., Mucha M., Madry A.* A 7/9-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 2009. – P. 298–311. – DOI: 10.1007/978-3-642-03685-9_23.

15. *Dudycz S., Marcinkowski J., Paluch K., Rybicki B.* A 4/5-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Integer Programming and Combinatorial Optimization. – Cham : Springer, 2017. – P. 173–185. – DOI: 10.1007/978-3-319-59250-3_15.

16. *Косточка А. В., Сердюков А. И.* Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжера на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. – 1985. – № 26. – С. 55–59.

17. *Панюков А. В., Тычинин С. А.* Применение дополнений паросочетаниями для решения задачи MAX TSP // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 15 (115). – С. 54–63.

18. *Hassin R., Rubinstein S.* A 7/8-approximation algorithm for metric MAX TSP // Information Processing Letters. – 2002. – Vol. 81, № 5. – P. 247–251. – DOI: 10.1016/S0020-0190(01)00234-4.

19. *Frieze A. M.* Maximum matchings in weighted graphs and the maximum travelling salesman problem // Discrete Applied Mathematics. – 2008.

20. *Shenmaier V. V.* Polynomial-time approximation schemes for geometric maximum TSP in fixed dimensions // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2017.

21. *Paluch K., Mucha M.* Local improvements in maximum TSP via maximum weight matchings // Algorithmica. – 2015.

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕЛЕНГАТОРА С МУЛЬТИНАПРАВЛЕННЫМ ПРИЕМОМ

**Ю. В. Матвиенко[1], В. М. Кузькин[2], С. А. Переселков[3], И. М. Косенко[3], Н. В. Ладыкин[3], А. С. Переселков[3]**

*[1]Институт проблем морских технологий ДВО РАН*
*[2]Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН*
*[3]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе представлены модели мультинаправленного комбинированного звукового приемника, в котором для регистрации горизонтальных компонент колебательной скорости используются несколько пар ортогональных каналов с общим фазовым центром. Построены математический модели приемника с двумя парами ортогональных каналов, смещенными на 45 градусов, и с тремя парами, разнесенными на 30 градусов. Представлена модель вычисления пеленга для такой системы. Показано, что при совместной обработке данных можно снизить угловую неравномерность погрешности определения пеленга за счет увеличения числа измерений и разбиения углового диапазона наблюдения на множество секторов.
**Ключевые слова:** мультинаправленный комбинированный приемник, векторно-скалярный приемник, компоненты вектора интенсивности, угловая зависимость погрешности пеленгования, отношение сигнал/шум.

## Введение

Пассивные методы пеленгования низкочастотного шума требуют крупногабаритных антенн, непригодных для мобильных носителей [1–2]. Компактные векторные и векторно-скалярные приёмники уменьшают габариты, но классические схемы дают резкие угловые провалы точности из-за разбалансов каналов и неравномерного воздействия помех [3–6]. Предлагается архитектура мультинаправленного комбинированного приёмника, использующего несколько повернутых пар ортогональных каналов, что выравнивает точность за счёт независимых измерений и разбиения горизонтального сектора.

Голографическая обработка дополняет такую схему: её устойчивость опирается на интерференционные структуры, задаваемые источником [7–12], она эффективна в широком диапазоне частот [13–16], мало зависит от вариабельности среды [17–23], совместима с алгоритмами оценки глубины [24–25], повышает надёжность обнаружения [26–27], разрешения близких целей [28–30] и пеленгования [31–33], поддерживает адаптивные методы [34–36], обеспечивает модовую селекцию в разных типах волноводов [37–39] и превосходит классические схемы фокусировки [40].

## 1. Пеленгатор с одной парой ортоканалов

Рассмотрим математическую модель мультинаправленного комбинированного приемника, в котором горизонтальные компоненты колебательной скорости регистрируются различными парами ортогональных каналов с общим центром. Для начала возьмем одну пару каналов. Такой приемник совмещает датчик звукового давления $P$ и датчики колебательной скорости $V_X$ и $V_Y$ среды [4]. На горизонтальных каналах формируются компоненты интенсивности:

$$I_X = RE(PV_X^*), \quad I_Y = RE(PV_Y^*). \tag{1}$$

Тогда пеленг восстанавливается по соотношению горизонтальных компонент:

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{I_Y}{I_X}. \tag{2}$$

### 2. Пеленгатор с двумя парами ортоканалов

При наличии двух пар ортоканалов предлагается повернуть их на 45 градусов. Тогда две пары датчиков колебательной скорости позволят извлечь четыре компоненты вектора интенсивности:

$$I_{X1} = RE(PV^*_{X1}), \quad I_{Y1} = RE(PV^*_{Y1}), \quad I_{X2} = RE(PV^*_{X2}), \quad I_{Y2} = RE(PV^*_{Y2}). \tag{3}$$

Результирующая оценка пеленга определяется взвешенной суммой значений, определенных по фазово-амплитудному соотношению всех измеренных компонент:

$$\theta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i^2 \theta_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i^2}. \tag{4}$$

В выражении присутствуют $N = 6$ слагаемых:

$$\begin{gathered}\theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{I_{Y1}}{I_{X1}}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{I_{Y2}}{I_{X2}}, \quad \theta_3 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}I_{Y2} - I_{X1}}{I_{X1}}, \\ \theta_4 = \operatorname{arctg}\frac{I_{Y1}}{\sqrt{2}I_{X2} + I_{Y1}}, \quad \theta_5 = \operatorname{arctg}\frac{I_{X1} - \sqrt{2}I_{X2}}{I_{X1}}, \quad \theta_6 = \operatorname{arctg}\frac{I_{Y1}}{\sqrt{2}I_{Y2} - I_{Y1}}.\end{gathered} \tag{5}$$

### 3. Пеленгатор с тремя парами ортоканалов

В случае с тремя парами ортоканалов угол между ними задаётся в 30 градусов. Извлекаются шесть компонент вектора интенсивности.

$$\begin{gathered}I_{X1} = RE(PV^*_{X1}), \quad I_{Y1} = RE(PV^*_{Y1}), \\ I_{X2} = RE(PV^*_{X2}), \quad I_{Y2} = RE(PV^*_{Y2}), \\ I_{X3} = RE(PV^*_{X3}), \quad I_{Y3} = RE(PV^*_{Y3}).\end{gathered} \tag{6}$$

Пеленг также определяется соотношением (4), но $N = 15$ слагаемых определяются как

$$\theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{I_{Y1}}{I_{X1}}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg}\frac{I_{Y2}}{I_{X2}}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\frac{I_{Y3}}{I_{X4}}, \ldots \tag{7}$$

### 4. Результаты численного моделирования

Рассмотрим ошибку определения направления для приемника с одной парой ортогональных каналов при достаточно высоком отношении с/п $q$. На рис. 1 показаны результаты расчетов погрешности пеленгования $\sigma_\theta$ для случая $q = 16$ дБ.

Наименьшая ошибка пеленгования для такого приемника достигается в четырех угловых секторах, оси которых ориентированы под углами, кратными 45 градусов. Максимальная ошибка по всему горизонту составляет около 5 градусов, тогда как в секторах, прилегающих к 45, 125, 225, 315 она составляет менее 1 градуса. Ширина области с минимальной ошибкой определяется текущим уровнем отношения с/п. Рассмотрим теперь ошибку определения направления для приемника с двумя ортопарами горизонтальных каналов, повернутыми на

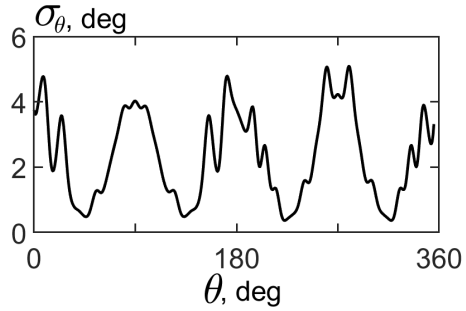



*Рис. 1. Зависимость погрешности пеленгования $\sigma_\theta$ для приемника с одной парой ортоканалов ($q = 16$ дБ )*

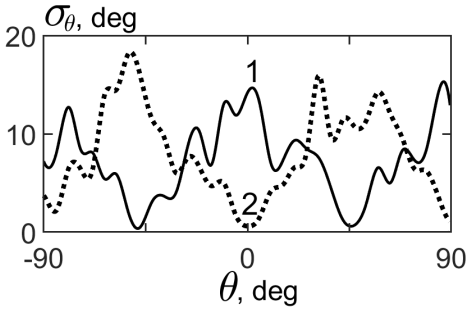
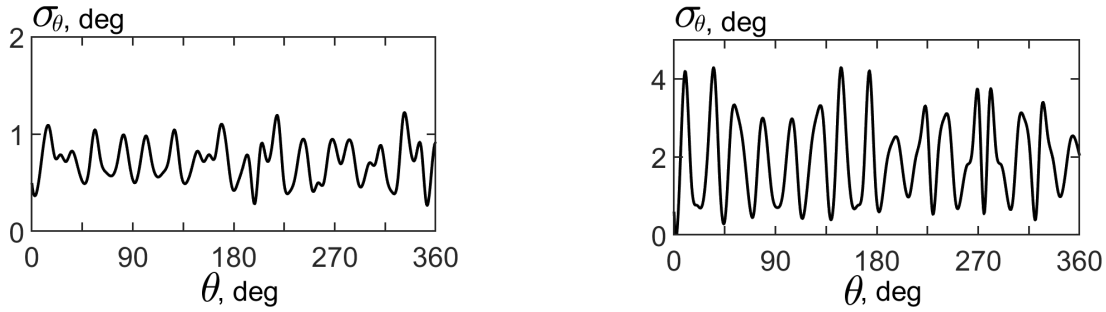



*Рис. 2. Зависимость погрешности пеленгования $\sigma_\theta$ для приемника с двумя парами ортоканалов ($q = 6$ дБ )*




*(а)* *(б)*

*Рис.3. Зависимость погрешности пеленгования $\sigma_\theta$ для приемника с тремя парами ортоканалов: а) $q = 16$ дБ, б) $q = 6$ дБ*

45 градусов. На рис. 2 показаны расчёты погрешности пеленгования в диапазоне углов от –90 до 90 градусов при отношении $q = 6$ дБ. Использование второй ортопары, повернутой на 45 градусов, позволяет заметно снизить ошибку даже при небольшом превышении сигнала над помехой. Дополнительно формируются четыре сектора с осями в 0, 90, 180, 270 градусов, в которых погрешность минимальна.

Добавление ещё одной пары каналов, изменяющей горзонтальные компоненты колебательной скорости, даёт шесть возможных комбинаций для вычисления пеленга. При этом для каждой выбранной пары расчётных компонент вектора интенсивности наименьшая ошибка естественно достигается в тех угловых секторах, где уровни этих компонент близки.

В итоге по горизонту наблюдения формируется 16 угловых секторов пеленгования, каждый шириной 22.5 градусов, с минимальной угловой зависимостью от значения угла пеленга. Взвешенное суммирование расчетных значений пеленгов по всем возможным парам каналов дает оценки пеленгов с низкой ошибкой, по всему диапазону углов наблюдения, как показано на рис. 3. Из представленных результатов видно, что зависимость погрешности пеленгования от направления прихода сигнала становится более равномерной, при этом диапазон ошибок уменьшается в 5–6 раз.

## Заключение

В работе рассмотрена концепция мультинаправленного комбинированного пеленгатора низкочастотных гидроакустических шумов на базе векторно-скалярного приёмника звука. Анализ показал, что применение нескольких пар взаимно ортогональных горизонтальных каналов с общим фазовым центром и равномерным поворотом друг относительно друга позволяет существенно выровнять точность пеленгования по всему горизонту. Построены математические модели двух конструкций, первая с двумя парами каналов, повернутыми на 45 градусов, вторая с тремя парами, смещёнными на 30 градусов. Для каждой схемы предложена процедура вычисления пеленга, основанная на совместной обработке измерений со всех пар каналов.

Показано, что объединение данных из нескольких пар каналов уменьшает угловую неравномерность погрешности за счёт увеличения числа частично независимых измерений и разбиения полного диапазона на набор секторов с последующим агрегированием оценок. Это снижает вероятность появления «слепых» зон, характерных для систем с одной парой горизонтальных каналов, и повышает помехоустойчивость при заданном отношении с/п. Подход сохраняет направленные свойства в широком низкочастотном диапазоне без наращивания габаритов антенны и практичен для размещения на мобильных платформах контроля подводной обстановки, таких как автономные необитаемые подводные аппараты и глайдеры. Перспективно сочетание этой архитектуры с методами голографической обработки и алгоритмами оценки глубины для дальнейшего повышения точности и устойчивости.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

## Литература

1. *Бурдик В. С.* Анализ гидроакустических систем. – Ленинград : Судостроение, 1988. – 392 с.

2. *Селезнев И. А., Ясников А. И.* Перспективы применения подводных глайдеров для океанографии и освещения подводной обстановки. Обзор по материалам зарубежной печати // Подводные исследования и робототехника. – 2023. – № 1 (43). – С. 4–13.

3. *Скребнев Г. К.* Комбинированные гидроакустические приемники. – Санкт-Петербург : Элмор, 1997. – 200 с.

4. *Щуров В. А. [и др.]* Мобильные акустические комбинированные приемные системы на основе автономных необитаемых подводных аппаратов // Подводные исследования и робототехника. – 2012. – № 2(14). – С. 4–12.

5. *Захаров К. Л.* Частотно-угловые характеристики гидроакустического сигнала при использовании векторно-фазового метода // Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление (электронное научное издание). – 2014. – Т. 10, № 3 (24). – С. 7.

6. *Матвиенко Ю. В., Хворостов Ю. А., Кулешов В. П.* Особенности применения скалярно-векторных приемников звука в системах контроля подводной обстановки локальных районов // Подводные исследования и робототехника. – 2022. – № 4 (42). – С. 4–15.

7. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

8. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Голографические методы обработки гидроакустических сигналов (Обзор) // Акуст. журн. – 2025. – Т. 71, № 1. – С. 96–117.

9. *Pereselkov S. A., Kuz'kin V. M.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

10. *Ehrhardt M., Pereselkov S., Kuz'kin V., Kaznacheev I., Rybyanets P.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water // Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

11. *Глущенко М. Ю., Кузькин В. М., Матвиенко Ю. В., Пересёлков С. А., Хворостов Ю. А., Ткаченко С. А.* Голографический метод идентификации шумового подводного источника в мелком море // Акуст. журн. – 2024. – Т. 70, № 3. – С. 67–77.

12. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Matvienko Y., Tkachenko S., Rybyanets P.* The Formation of 2D Holograms of a Noise Source and Bearing Estimation by a Vector Scalar Receiver in the High-Frequency Band. // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – 12. – 704.

13. *Казначеев И. В., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

14. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kaznacheev I. V., Grigor'ev V. A.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. – 2017. – Vol. 25, No 4. – P. 299–306.

15. *Переселков С. А., Кузькин В. М., Кузнецов Г. Н., Просовецкий Д. Ю., Ткаченко С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов // Акуст. журн. – 2020. – Т. 66, № 4. – С. 437–445.

16. *Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Куцов М. В., Переселков С. А.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне // Изв. РАН. Сер. физ. – 2021. – Т. 85, № 6. – С. 907–912.

17. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Zvyagin V. G., Malykhin Yu. A., Prosovetskiy D. Yu.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 2. – P. 160–167.

18. *Badiey M., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu., Tkachenko S. A.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II. Phys. Wave Phenom. – 2019. – 27(4). – P. 313–319.

19. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204.

20. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Ладыкин Н. В., Куцов М. В.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

21. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 1922.

22. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Influence of Intense Internal Waves Traveling Along an Acoustic Path on Source Holographic Reconstruction in Shallow Water // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – 13. – P. 1409.

23. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt, M., Tkachenko S., Pereselkov A., Ladykin N.* Effects of Irregular Bathymetry on Hologram Formation of Moving Source in ShallowWater // J. Mar. Sci. Eng. – 2025. – 13. – P. 1775.

24. *Беседина Т. Н., Кузнецов Г. Н., Кузькин В. М., Пересёлков С. А.* Определение глубины источника звука в мелком море на фоне интенсивного шума // Акуст. журн. – 2015. – Т. 61, № 6. – С. 718–728.

25. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Wave method for estimating the sound source depth in a oceanic waveguide // Phys. Wave Phenom. – 2016. – Vol. 24, No 4. – P. 310–316.

26. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Матвиенко Ю. В., Ткаченко С. А.* Обнаружение источника в диспергирующих средах // РЭНСИТ. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

27. *Матвиенко Ю. В., Кузькин В. М., Переселков С. А., Ладыкин Н. В., Грачев В. И.* Обнаружение и локализация шумового подводного источника в мелководной акватории на фоне интенсивного судоходства // РЭНСИТ. – 2025. – Т. 17, № 2. – С. 211–220.

28. *Kuz'kin V. M., Kuznetsov G. N., Pereselkov S. A., Grigor'ev V. A.* Resolving power of the interferometric method of source localization // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

29. *Кузькин В. М., Переселков С. А., Грачев В. И., Рыбянец П. В., Ткаченко С. А.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

30. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. A.* Resolution of hydroacoustic noise signals under conditions of spatial-temporal variability of ocean environment // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 4. – P. 290–299.

31. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Kuznetsov G. N., Kaznacheev I. V.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

32. *Kuznetsov G. N., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Prosovetskiy D. Yu.* Direction finding of a noise sound source // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 3. – P. 237–241.

33. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Логачев В. В., Косенко И. М.* Голографический метод обработки гидроакустических сигналов высокочастотного источника в мелком море // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 545–554.

34. *Kaznacheeva E. S., Kuz'kin V. M., Lyakhov G. A., Pereselkov S. A., Tkachenko S. A.* Adaptive algorithms for interferometric processing // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 267–273.

35. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A., Rybyanets P. V., Tkachenko S. F.* Adaptive method for holographic processing of broadband hydroacoustic signals // Phys. Wave Phenom. – 2024. – Vol. 32, № 5. – P. 382–391.

36. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Адаптивный алгоритм локализации шумовых подводных источников в мелководных акваториях // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 533–544.

37. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Prosovetskii D. Yu., Kaznacheeva E. S.* Mode selection in oceanic waveguides // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, No 2. – P. 111–118.

38. *Kuz'kin V. M., Matvienko Yu. V., Pereselkov S. A., Kaznacheeva E. S., Tkachenko S. A.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, No 5. – P. 314–320.

39. *Кузькин В. М., Пересёлков С. А., Казначеева Е. С., Грачев В. И., Ткаченко С. А., Рыбянец П. В.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 279–286.

40. *Pereselkov S., Kuz'kin V., Ehrhardt M., Tkachenko S., Rybyanets P., Ladykin N.* Use of interference patterns to control sound field focusing in shallow water // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11. – P. 559.

УДК 519.654 : 519.676

# АСИММЕТРИЧНАЯ ЛОГИСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ НА ОГРАНИЧЕННЫХ РАВНОМЕРНО ВЗВЕШЕННЫХ КВАДРАТНЫХ РЕШЕТКАХ С (1, 0)-ОКРЕСТНОСТЬЮ

**П. В. Москалев, А. С. Мягков**

*Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»*

**Аннотация.** Проводится сравнительный анализ моделей, используемых для аппроксимации частоты перколяционных (стягивающих) кластеров на ограниченных равномерно взвешенных квадратных решётках с (1, 0)-окрестностью. Рассматриваются два подхода: на основе симметричной и асимметричной логистических функций. Параметры моделей оцениваются методом нелинейных наименьших квадратов по эмпирическим данным, полученным для ограниченных решеток с размерами 33, 65 и 129 узлов при стартовом множестве, состоящем из единственного центрального узла решетки. Показано, что асимметричная логистическая функция обеспечивает существенно лучшее качество аппроксимации: остаточная стандартная ошибка снижается, а апостериорная оценка точки перегиба оказывается ближе к известному значению порога перколяции для квадратной решетки и лежит в пределах 0,95-доверительных интервалов. Полученные результаты подтверждают, что учет асимметрии формы переходной кривой позволяет повысить точность и надежность оценок критических параметров в задачах перколяции на ограниченных решетках с локализованным стартовым множеством.
**Ключевые слова:** порог перколяции, перколяция узлов, квадратная решетка, частота стягивающего кластера, асимметричная логистическая функция.

## Введение

С математической точки зрения перколяционные модели описывают возникновение глобальной связности во взвешенных графах, что представляет интерес при исследовании процессов в материаловедении, теории фильтрации или анализе устойчивости коммуникационных сетей. В частности, задача перколяции узлов на равномерно взвешенной двумерной квадратной решетке с (1, 0)-окрестностью (т. е. с единичной окрестностью фон Неймана) служит в теории перколяции типовым тестовым полигоном для изучения особенностей фазовых переходов в случайных средах [1, 2]. К ключевым особенностям подобных моделей относят: а) стохастичность, которая проявляется в зависимости глобальных характеристик модели от закона распределения случайной величины $S$, определяющей структуру решетки; б) связность, проявляющуюся в корреляции между глобальными характеристиками кластеров и локальными свойствами ε-окрестностей узлов решетки; в) критический характер процесса перколяции, выражающийся в существовании пороговых значений, в окрестности которых малые изменения локальных параметров приводят к скачкообразному изменению эффективных характеристик модели.

Для построения большинства перколяционных моделей требуется знание критического значения — порога перколяции $p_c$, которое является одной из фундаментальных характеристик используемой решетки. Для задачи узлов на квадратной решетке значение $p_c \approx 0,592746$ в литературе можно встретить численные оценки с точностью от 8 до 12 десятичных знаков [3, 4]. В подобных вычислительных экспериментах оценка $p_c$ по эмпирическим данным часто зависит от адекватного выбора функции, используемой для аппроксимации зависимости вероятности перколяционного (стягивающего) кластера от доли открытых (достижимых) узлов решетки $w(p)$. Типичной аппроксимацией первого порядка является логистическая функция, предполагающая симметрию фазового перехода. Подобный сценарий возникает при рассмо-

трении задачи о возникновении кластера, стягивающего решетку от достижимых узлов вдоль нижней границы решетки (стартовое подмножество) до достижимых узлов вдоль ее верхней границы (целевое подмножество). В таком случае стягивающий кластер представляет собой лес деревьев, растущих снизу вверх, и его вероятность хорошо описывается симметричной логистической функцией [2, 5], поскольку процесс заполнения решетки в вертикальном направлении усредняется за счет множества достижимых узлов по горизонтали.

Здесь мы рассматриваем более специфический случай, когда стартовое множество состоит из единственного узла в центре решетки, и нас интересует вероятность того, что кластер, связанный с этим узлом, стянет всю решетку по вертикали (от нижней до верхней ее границы). Это принципиально отличается от классического случая, когда стартовое множество образовано узлами вдоль нижней границы. В нашем случае, когда кластер начинается с одной точки в центре, то процесс перколяции становится сильно асимметричным, поскольку он зависит от совмещения двух случайных событий – связности нижней и верхней границы с центром решетки, что создает дополнительную нелинейность и сдвиг в точке перегиба. Именно этот эффект и является предметом нашего исследования для повышения точности и снижения трудоемкости оценок порога перколяции $p_c$ на решетках конечного размера.

## 1. Перколяция узлов на равномерно взвешенной квадратной решетке

В соответствии с подходом, изложенным в нашем исследовании [5], в задаче узлов для моделей решеточной перколяции в качестве ключевых параметров рассматриваются размер решетки $x$ и доля достижимых узлов $p$. Именно эти параметры определяют эффективные характеристики моделей, такие как функция вероятности образования перколяционного (стягивающего) кластера $w(p)$ и порог перколяции $p_c$. Как было показано в [2, 6], априорные оценки для $p_c$ могут быть получены через квантили функции взвешивающего распределения $F_0(p)$, в то время как апостериорные оценки — с помощью аппроксимаций функции $w(p)$.

В рамках поставленной задачи будем рассматривать модели перколяции узлов на ограниченной квадратной равномерно взвешенной решетке с (1, 0)-окрестностью с размерами $x = 33$, 65 и 129 узлов при долях достижимых узлов $p_i$, определяемых квантильной функцией логистического распределения:

$$p_i = b_0 + b_1 \ln\left(\frac{q_i}{1-q_i}\right), \tag{1}$$

где $b = (b_0 = 0,592746; b_1 = 0,050)$ — эмпирические параметры квантильной функции (1); $q_i = 0,025; 0,050; \ldots; 0,975$, позволяющей отобразить сетку узлов, равномерную на отрезке [0; 1], в сетку узлов равномерных вдоль логистической кривой с выбранными параметрами $b$. Для этих моделей будем исследовать статистику образования кластеров, связанных с ее центральным узлом и стягивающих решетку в вертикальном направлении, то есть обладающих вертикальным размером, сопоставимым с размером перколяционной решетки.

Все реализации кластеров на рис. 1 строились для квадратной решетки с размерами $x = 33$, 65, 129 узлов с (1, 0)-окрестностью при критических значениях параметра $p \approx p_c$. Стартовое подмножество узлов на рис. 1 формировалось в центре перколяционной решетки (узел (0, 0), отмеченный символом «+»), а целевое подмножество — вдоль ее верхней и нижней границ $X_{0|1} = \{(x_k, y_k) : x_k = -(x-1)/2, 1-(x-1)/2, \ldots, (x-1)/2; y_k = 1 \pm (x-1)/2\}$. Светло-серым цветом на рис. 1 обозначены узлы с малым значением $p \to 0^+$, темно-серым цветом – узлы с высоким значением $p \to 1^-$, а белым цветом — узлы кластера, стягивающего решетку по вертикали. Все используемые в работе реализации были построены с помощью функций пакета “SPSL” для системы R [7]: а) “`ssi20(x = 33, p = 0.592746, shape = c(1, 1))`”; б) “`ssi20(x = 65, p = 0.592746, shape = c(1, 1))`”; в) “`ssi20(x = 129, p = 0.592746, shape = c(1, 1))`”.

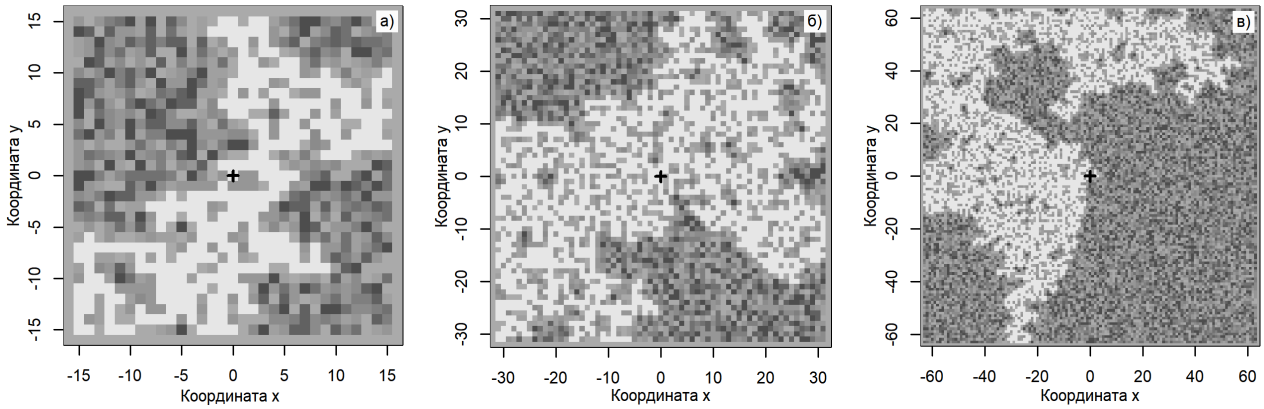



*Рис. 1. Реализации стягивающих кластеров при критических значениях параметра $p \approx p_c$ для перколяционных решеток различного размера: а) $x_1 = 33$; б) $x_2 = 65$; в) $x_3 = 129$ узлов*

## 2. Аппроксимации частот стягивающих кластеров на квадратных решетках

В качестве оценок функции вероятности перколяционных кластеров $\{w_i(p_i)\}$ примем усредненные по выборке объемом $N = 800$ реализаций относительные частоты стягивающих кластеров, примеры которых показаны выше на рис. 1.

На рис. 2 (а, б) приведены корреляционные поля статистических оценок зависимости относительных частот стягивающих кластеров $w_i$ для равномерно взвешенных квадратных решеток с линейными размерами $x_j = 33,\ 65,\ 129$ узлов с (1, 0)-окрестностью (показанных символами «●», «■», «◆») от долей достижимых узлов $p_i$ в окрестности критической точки $p = p_c \pm \Delta p$, где $p_c \approx 0{,}592746$; $\Delta p \approx 0{,}183178$. Вертикальные и горизонтальные штриховые линии на рис. 2 соответствуют характерным для данной задачи оценкам долей достижимых узлов $p \approx p_c$ и значениям относительных частот $w$ в точках перегиба аппроксимирующих функций.

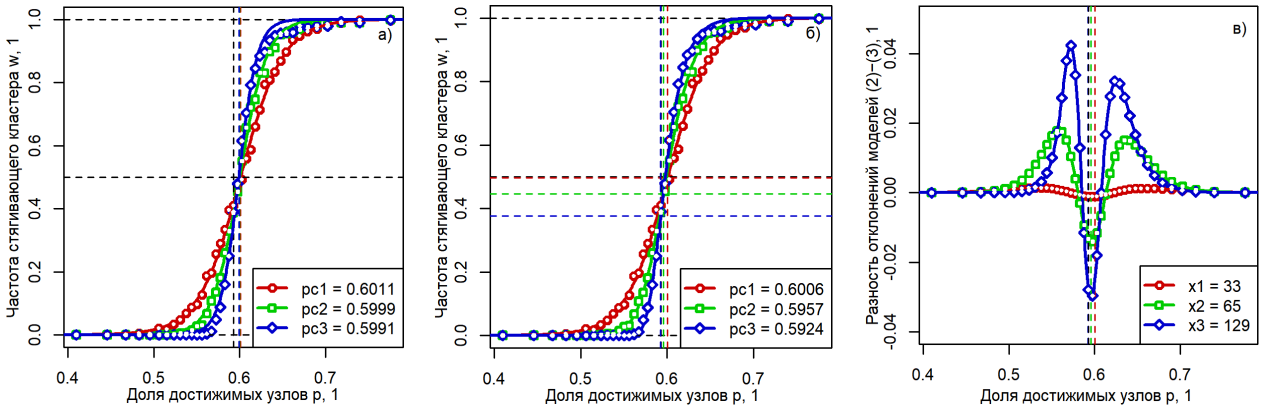



*Рис. 2. Аппроксимация частоты стягивающих кластеров при различных размерах решетки: а) модель (2); б) модель (3); в) разность отклонений моделей (2)–(3)*

Утолщенные сплошные линии соответствуют логистическим функциям, аппроксими-рующим зависимости относительных частот стягивающих кластеров от доли достижимых узлов для решеток заданного размера $w(p \mid x)$. На рис. 2 (а) частоты стягивающих кластеров в окрестности pc аппроксимируются симметричной логистической функцией вида:

$$w_i = \frac{1}{1 + \exp[-b_0(p_i - b_1)]} + \varepsilon_i, \qquad (2)$$

где $b = (b_0, b_1)$ — вектор параметров, оцениваемых по выборке $\{w_i(p_i \mid x_j)\}$; $\varepsilon_i$ — отклонения модели (2), минимизируемые нелинейным методом наименьших квадратов. На рис. 2 (б) ча-

стоты стягивающих кластеров в окрестности $p_c$ аппроксимируются асимметричной логистической функцией вида:

$$w_i = \frac{1}{\left(1+\exp[-b_0(p_i - b_1)]\right)^{b_2}} + \varepsilon_i, \tag{3}$$

где $b = (b_0, b_1, b_2)$ — вектор параметров, оцениваемых по выборке $\{w_i(p_i \mid x_j)\}$; $\varepsilon_i$ — отклонения модели (3), минимизируемые нелинейным методом наименьших квадратов. Заметим, что при симметричной аппроксимации в форме (2) точка перегиба функции $w = f(p \mid b)$ соответствует одному из оцениваемых параметров $p_c = b_1$, а для асимметричной аппроксимации в форме (3) точка перегиба функции $w = f(p \mid b)$ соответствует их нелинейной комбинации

$$p_c = b_1 + \frac{\ln b_2}{b_0}. \tag{4}$$

На рис. 2 (в) представлены разности отклонений наблюдаемых относительных частот стягивающих кластеров $\{w_i(p_i \mid x_j)\}$ от прогнозируемых с помощью моделей (2) и (3).

### 3. Результаты и обсуждение

При построении вышеуказанной аппроксимации в системе R была использована реализация нелинейного метода наименьших квадратов из пакета “gslnls” для системы R [7]. Пример результатов, полученных при аппроксимации в формах (2) и (3) для зависимости частоты стягивающих кластеров от доли достижимых узлов $\{w_i(p_i \mid x_j)\}$ для равномерно взвешенной квадратной решетки размером $x_2 = 65$ узлов с (1, 0)-окрестностью приведена в листинге 1.

Листинг 1

*Аппроксимация эмпирической зависимости $\{w_i(p_i \mid x_j)\}$ в формах (2) и (3)*

```
> summary(f2)
Formula: ww[, 2] ~ slog(p, b0, b1)
Parameters:
    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
b0 6.402e+01  1.265e+00   50.63   <2e-16 ***
b1 5.999e-01  3.378e-04 1776.10   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
Residual standard error: 0.01533 on 37 degrees of freedom
Number of iterations to convergence: 13
Achieved convergence tolerance: 5.898e-17

> confint(f2)
        2.5 %     97.5 %
b0 61.4586258 66.5831531
b1  0.5992613  0.6006301

> summary(f3)
Formula: ww[, 2] ~ alog(p, b0, b1, b2)
Parameters:
    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
b0 53.692006   1.913098  28.065  < 2e-16 ***
b1  0.583398   0.004421 131.958  < 2e-16 ***
b2  1.935547   0.325583   5.945 8.23e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

```
Residual standard error: 0.01194 on 36 degrees of freedom
Number of iterations to convergence: 13
Achieved convergence tolerance: 1.587e-16

> confint(f3)
        2.5 %     97.5 %
b0 49.8120633 57.5719496
b1  0.5744313  0.5923641
b2  1.2752352  2.5958596
```

Анализ полученных результатов показывает, что асимметричная логистическая функция в соответствии с моделью (3) обеспечивает существенно более точную аппроксимацию эмпирической зависимости частоты стягивающих кластеров от доли достижимых узлов $w(p|x)$ в условиях, когда стартовое множество состоит из единственного узла в центре решетки. Это подтверждается как статистическими критериями качества аппроксимации, так и вероятностной интерпретацией перколяционного процесса.

Для симметричной модели (2) остаточное стандартное отклонение составляет 0,01533, в то время как для асимметричной модели (3) — 0,01194. Это свидетельствует о том, что модель (3) объясняет большую долю дисперсии эмпирических данных и лучше соответствует их нелинейной структуре.

Асимметрия кривой $w(p|x)$ в данном сценарии обусловлена тем, что формирование стягивающего кластера требует одновременной связности кластера вверх и вниз от центрального узла. Такой процесс в статистическом смысле не является симметричным относительно вертикальной оси решетки, так как вероятность достижения обеих границ одновременно пропорциональна квадрату вероятности связности в одном направлении, что смещает точку перегиба к меньшим значениям $p$ по сравнению с симметричным случаем. Именно это и позволяет модели (3) с параметром степени $b_2 \approx 1,94$ (см. листинг 1) более адекватно отражать эмпирическую форму кривой.

В модели (2) точка перегиба совпадает с параметром $b_1 \approx 0,5999,$ что близко, но систематически завышено относительно известного значения $p_c \approx 0,592746.$ В то же время, в модели (3) апостериорная оценка точки перегиба в соответствии с (4) дает величину $p_c^* \approx 0,5957,$ которое ближе к известному значению $p_c$ благодаря учету асимметрии, а 0,95-доверительный интервал для точки перегиба включает значение $p_c$, чего не наблюдается в модели (2).

Разность отклонений между моделями (2) и (3) показывает, что симметричная модель (2) систематически переоценивает частоты как при $p < p_c,$ так и при $p > p_c,$ в то время как асимметричная модель (3) компенсирует эти эффекты, что свидетельствует о большей ее адекватности механизму фазового перехода в рассматриваемом случае.

## Заключение

Представленные результаты на взгляд авторов наглядно демонстрируют, что применение асимметричных логистических функций позволяет достичь существенно более высокой точности аппроксимации эмпирической зависимости частоты стягивающих кластеров от доли достижимых узлов на ограниченных квадратных решетках, особенно в случаях, где стартовое множество состоит из единственного узла в центре решетки. С теоретической точки зрения интерес вызывает исследование природы возникновения асимметрии в зависимости частоты стягивающих кластеров от доли достижимых узлов. Полученные результаты указывают на то, что асимметрия обусловлена комбинаторной сложностью двунаправленного роста кластера и усиливается с уменьшением размера решетки, что требует дальнейшего изучения в рамках

теории конечноразмерных эффектов в задачах перколяции. С практической точки зрения перспективными направлениями исследований являются: а) анализ зависимости параметров асимметричной логистической функции от линейного размера решетки для уточнения оценок порога перколяции; б) обобщение предложенного подхода на кубические и неравномерно взвешенные решетки.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание в области научной деятельности FSFS-2024-0007).

## Литература

1. *Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Ю. Ю. Тарасевич. – Москва: URSS, 2002. – 112 с. – URL: https://elibrary.ru/jkmbru (дата обращения: 09.11.2025).

2. *Москалев П. В.* Перколяционное моделирование пористых структур / П. В. Москалев. – Москва : URSS, 2018. – 240 с. – URL: https://elibrary.ru/zrjswd (дата обращения: 09.11.2025).

3. *Newman M. E. J.* Efficient Monte Carlo algorithm and high-precision results for percolation / M. E. J. Newman, R. M. Ziff // Physical Review Letters. – 2000. – V. 85, No 19. – P. 4104–4107. – URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4104 (accessed: 09.11.2025).

4. *Newman M.* Networks [2nd edn.] / M. Newman. – Oxford: Oxford Academic, 2018. – URL: https://doi.org/10.1093/oso/9780198805090.001.0001 (accessed: 09.11.2025).

5. *Москалев П. В.* Оценки порога и мощности перколяционных кластеров на квадрат-ных решетках с (1, π)-окрестностью / П. В. Москалев // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 405–414. – URL: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-3-405-414 (дата обращения: 09.11.2025).

6. *Moskalev P. V.* Convergence of percolation probability functions to cumulative distribution functions on square lattices with (1, 0)-neighborhood / P. V. Moskalev // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2020. – V. 553. – P. 124657. – URL: https://doi.org/10.1016/j. physa.2020.124657 (accessed: 09.11.2025).

7. *Moskalev P. V.* SPSL: Site Percolation on Square Lattices. – R package version 0.1.9. – URL: https://doi.org/10.32614/CRAN.package.SPSL (accessed: 09.11.2025).

8. *Chau J.* gslnls: GSL Nonlinear Least-Squares Fitting. – R package version 1.1.2. – URL: https://doi.org/10.32614/CRAN.package.gslnls (accessed: 09.11.2025).

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ОБЪЕКТА НА ОСНОВЕ ПЕЛЕНГАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**И. С. Мусатов**

*МИРЭА – Российский технологический университет*

**Аннотация.** В статье представлен математический метод определения координат объекта по пеленгационным измерениям, полученным с беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Метод учитывает ошибки измерения углов пеленга и координат точек наблюдения и основан на расчете углов пеленга, определении прямых пеленга, вычислении точек их пересечения, построении прямоугольной области поиска и расчету суммы квадратов невязок между измеренными и прогнозируемыми углами. Математический метод был опробован в программном средстве Excel, затем реализован на языке Python для тестирования и визуализации, после чего переписан на C++ и адаптирован для применения по задаче от ПАО «НПО «АЛМАЗ». Представленный метод обеспечивает возможность получения приближенных координат объекта при условии ошибок в данных и может использоваться в задачах навигации, радиотехнической разведки и радиолокации.

**Ключевые слова:** определение местоположения, пеленгация, координаты объекта, аппроксимация, БПЛА, ошибки измерений, невязка, математическое моделирование, нормальное распределение, сумма квадратов, оценка точности.

## Введение

Определение координат объекта по пеленгационным измерениям относится к числу классических задач навигации, радиотехнической разведки и радиолокации [1]. В практических условиях отсутствуют «идеальные» данные: как координаты точек наблюдения, так и углы пеленга измеряются с ошибками [1]. Эти ошибки обусловлены ограниченной точностью локаторов, особенностями работы навигационных средств и внешними факторами.

Если использовать только геометрическое пересечение прямых пеленга, проходящих из точек наблюдения к объекту, то погрешности приводят к тому, что прямые сходятся в точке, слишком сильно отличающейся от истинной. Поэтому требуется математический метод, позволяющий на основе набора несовершенных измерений определить наиболее точное местоположение объекта.

В исходной задаче сначала строится эталонная модель, для которой известны точные координаты объекта и траектория БПЛА. Затем к этой модели добавляются ошибки измерений, имитирующие реальные условия, и оценивается, насколько метод способен определить координаты объекта на основе искаженных данных.

Под ошибками в рамках данной статьи понимаются отклонения от эталонных значений: для координат БПЛА по осям $X$ и $Y$ — в диапазоне от –5 до 5 метров, для угла пеленга — в диапазоне от –2 до 2 градусов. Все значения углов в формулах рассматриваются в радианах.

Ниже приведено математическое обеспечение метода, а также описание логики его применения для обработки данных пеленгации.

## 1. Математическое обеспечение метода определения местоположения объекта

Математическое обеспечение в рамках данной статьи представляет собой совокупность формул, используемых для расчёта координат объекта и оценки точности получаемых результатов. формулы применяются как на этапе проверки на эталонной модели, так и при обработке данных с ошибками.

### *1.1. Расчет угла пеленга*

При заданных координатах объекта и точки БПЛА угол пеленга [1] определяется как угол между осью $X$ (направление на «север») и прямой от точки БПЛА к объекту, отсчитываемый по часовой стрелке. Для расчёта угла в радианах используется формула (1.1):

$$B_{изм} = \left( \arctan 2\left( \frac{y_ц - y_{бпла}}{x_ц - x_{бпла}} \right) + 2\pi \right) \bmod 2\pi, \tag{1.1}$$

где $B_{изм}$ — угол между осью $X$ (север) и направлением на цель (объект) для точки БПЛА, отсчитываемый по часовой стрелке;

$y_ц$ — точка цели (объекта) по оси $Y$;

$x_ц$ — точка цели (объекта) по оси $X$;

$y_{бпла}$ — точка БПЛА по оси $Y$;

$x_{бпла}$ — точка БПЛА по оси $X$;

$\bmod$ — остаток от деления предыдущего значения на последующее;

$\arctan 2$ — функция расчета арктангенса в диапазоне получаемых значений от $-\pi$ до $+\pi$, учитывающая знаки числителя и знаменателя и обеспечивающая корректное определение угла в различных квадрантах.

### *1.2. Коэффициент наклона прямой пеленга*

Для каждой точки БПЛА пеленг на объект описывается прямой линией. Наклон этой прямой относительно оси $Y$ определяется через известный угол пеленга. Для точки БПЛА коэффициент «*a*» вычисляется по формуле (1.2):

$$Ka_n = \tan(B_{измп}), \tag{1.2}$$

где $Ka_n$ — коэффициент «*a*» для одной из двух точек БПЛА;

$B_{измп}$ — угол между осью $X$ (север) и направлением на цель (объект), отсчитываемый по часовой стрелке для одной из двух точек БПЛА, в формуле представлен единицей измерения радиан.

Формула (1.2) позволяет перейти от углового представления пеленга к коэффициенту наклона прямой, что далее используется при построении уравнения прямой.

### *1.3. Свободный коэффициент прямой пеленга*

Зная наклон прямой и координаты точки БПЛА, можно определить свободный коэффициент линейной функции. Для точки БПЛА свободный коэффициент «$b$» определяется формулой (1.3):

$$Kb_n = y_{бплап} - Ka_n \cdot x_{бплап} \tag{1.3}$$

где $Kb_n$ — коэффициент «*b*» для одной из двух точек БПЛА;

$y_{бплап}$ — точка БПЛА по оси $Y$, обычно измеряется в метрах;

$Ka_n$ — коэффициент «*a*» для одной из двух точек БПЛА;

$x_{бплап}$ — точка БПЛА по оси $X$, обычно измеряется в метрах.

Формулы (1.2) и (1.3) совместно задают параметры прямой, соответствующей конкретному пеленгационному измерению.

### *1.4. Координата X точки пересечения двух пеленгов*

Для определения координат объекта в рамках эталонной модели, а также при промежуточных вычислениях, рассматриваются пары прямых, соответствующие измерениям из двух точек БПЛА. Координата X точки пересечения двух прямых пеленга определяется формулой (1.4):

$$x_{ц} = \frac{Kb_1 - Kb_2}{Ka_2 - Ka_1}, \tag{1.4}$$

где $x_{ц}$ — точка цели (объекта) по оси $X$, обычно измеряется в метрах;

$Kb_n$ — коэффициент «*b*» для одной из двух точек БПЛА;

$Ka_n$ — коэффициент «*a*» для одной из двух точек БПЛА.

Формула (1.4) используется для вычисления координаты $X$ каждого пересечения пары прямых без повторений.

### *1.5. Координата Y точки пересечения двух пеленгов*

Координата $Y$ точки пересечения для двух прямых пеленга определяется формулой (1.5):

$$y_{ц} = \frac{Ka_2 \cdot Kb_1 - Ka_1 \cdot Kb_2}{Ka_2 - Ka_1}, \tag{1.5}$$

где $y_{ц}$ — точка цели (объекта) по оси $Y$, обычно измеряется в метрах;

$Kb_n$ — коэффициент «*b*» для одной из двух точек БПЛА;

$Ka_n$ — коэффициент «*a*» для одной из двух точек БПЛА.

Формулы (1.4) и (1.5) применяются для каждой пары пеленговых измерений, что позволяет получить набор точек пересечения. В случае отсутствия ошибок все прямые пересекались бы в одной точке. В практических условиях каждая пара прямых создает точку пересечения, образуя «облако» вокруг истинного местоположения объекта.

На основе полученного множества точек, определяется прямоугольная область поиска по минимальным и максимальным значениям точек пересечений пар прямых, после чего эта область разлиновывается с заданным шагом для получения прогнозируемых точек возможного местонахождения объекта.

### *1.6. Сумма квадратов невязок*

Для оценки того, насколько хорошо та или иная прогнозируемая точка согласуется с измерениями, вводится понятие невязки. Невязка в контексте данного метода определяется как разность между фактическим (измеренным) и ожидаемым (прогнозируемым) результатом. В нашем случае это разность между измеренным углом пеленга и углом, который был бы получен, если бы объект находился в выбранной прогнозируемой точке.

Для каждой возможной точки местонахождения объекта внутри разлинованного прямоугольника рассматриваются все доступные пеленгационные измерения. Сумма квадратов невязок [2,3] для каждой из этих точек вычисляется по формуле (1.6):

$$S_i = \sum_{i=1}^{n} \left( B_{измi} - B_{прогi} \right)^2, \tag{1.6}$$

где $S_i$ — сумма квадратов невязок;

$B_{изм}$ — измеренный угол (с ошибкой), соответствующий измеренным координатам БПЛА (с ошибкой), в формуле представлен единицей измерения радиан;

$B_{прог}$ — прогнозируемый угол между осью $X$ и направлением на одну из точек построенного квадрата, разлинованного с неким произвольным шагом по координатам $X$ и $Y$, из точки БПЛА $(x_{бпла}; y_{бпла})$, в формуле представлен единицей измерения радиан;

$n$ — количество прогнозируемых точек;

$i$ — количество комплектов измерений (точка БПЛА по $X$ и $Y$, измеренный угол пеленга).

Формула (1.6) реализует принцип наименьших квадратов: наименьшее значение суммы квадратов невязок соответствует той точке, для которой прогнозируемые углы наиболее близки к измеренным. Соответственно, прогнозируемая точка, для которой значение минимальное из всех, является приближенными координатами объекта.

### *1.7. Оценка точности получаемых координат*

Для количественной оценки точности полученных координат объекта по сравнению с эталонными значениями в рамках моделирования используется стандартное отклонение [2–4]. формула (1.7) применяется при многократных экспериментах, когда для заданного эталонного положения объекта многократно генерируются данные с ошибками, рассчитываются координаты объекта и сравниваются с истинными:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d - \mu)^2}}{N}, \tag{1.7}$$

где $\sigma$ — среднеквадратическое отклонение;

$d$ — значение;

$\mu$ — среднее значение;

$N$ — количество значений в выборке.

Использование формулы (1.7) позволяет оценить разброс получаемых координат вокруг истинного значения и тем самым количественно охарактеризовать точность предложенного математического метода при заданных уровнях ошибок координат и углов пеленга.

Таким образом, формулы (1.1)–(1.7) образуют математическое ядро метода: от вычисления угла пеленга и пересечения прямых до выбора приближённых координат объекта по принципу минимизации суммы квадратов невязок и оценки точности итогового решения.

## 2. Испытание математического метода

Для практической проверки работоспособности изложенного математического метода была построена эталонная модель в программном средстве Excel. На первом этапе задавалась система координат $YX$, в которой фиксировались координаты цели. Далее задавалась простая траектория движения БПЛА и на ней выбирались точки пеленгации. В рамках эталонной модели использовались две точки.

Из каждой точки пеленгации проводилась прямая к объекту. Угол между направлением на «север» и прямой к объекту вычислялся по формуле (1.1) и обозначался угол $B$ для соответствующей точки. Таким образом формировалась идеальная модель пеленгации, на которой можно было проверить корректность формул (1.2)–(1.5) и убедиться, что прямые пересекаются в точке цели (объекта).

Следующим шагом выполнялось моделирование ошибок. Поскольку в практических условиях неизвестны ни точные координаты БПЛА, ни точные значения углов пеленга, эталонные значения умышленно искажались. Для координат по осям $X$ и $Y$ использовались отклонения в диапазоне от −5 до 5 метров, а для угла пеленга — в диапазоне от −2 до 2 градусов. Ошибки формировались как случайные величины, распределенные по нормальному закону.

В результате формировался набор «измеренных» данных: координаты БПЛА с ошибками и углы пеленга с ошибками. Далее по формулам (1.2)–(1.5) рассчитывались точки пересечения всех возможных пар пеленгов без повторений. Это давало множество оценок положения объекта, рассеянных вокруг истинных координат.

На основе полученного множества точек пересечения определялись минимальные и максимальные значения по осям $X$ и $Y$ из точек пересечений прямых, что позволяло построить прямоугольник возможной зоны местонахождения объекта. Прямоугольник разбивался на равномерную сетку по координатам $X$ и $Y$ с заданным шагом. Каждая точка сетки рассматривалась как возможная точка местоположения объекта.

Для каждой такой точки по формуле (1.1) вычислялись прогнозируемые углы пеленга из всех точек БПЛА. Затем по формуле (1.6) определялась сумма квадратов невязок между измеренными и прогнозируемыми углами. Минимальное значение этой функции указывало точку. Именно её координаты принимались в качестве приближенных координат объекта.

Проведение нескольких серий экспериментов с различными наборами ошибок позволяло оценить точность метода: для каждого эксперимента вычислялись приближенные координаты объекта, а затем по формуле (1.7) определялось среднеквадратическое отклонение относительно истинных координат. Таким образом проверялась корректность математического аппарата и его применимость в условиях, близких к реальным.

Реализация описанного алгоритма была последовательно выполнена в нескольких программных средах: сначала метод был опробован в программном средстве Excel, затем реализован на языке Python для автоматизации расчетов и визуализации результатов моделирования. После этого программный код был переписан на язык C++ для использования в задаче предприятия ПАО «НПО «АЛМАЗ», что позволило интегрировать метод в прикладную информационную систему [4].

## Заключение

В статье представлен математический метод определения координат объекта по пеленгационным измерениям при наличии ошибок координат точек наблюдения и углов пеленга. Метод основан на вычислении углов пеленга по формуле (1.1), построении прямых пеленга, расчёте точек их пересечения с использованием формул (1.2)–(1.5), формировании области поиска и нахождении минимальной суммы квадратов невязок по формуле (1.6). Для оценки точности результатов применяется стандартное отклонение, вычисляемое по формуле (1.7).

Проведенное моделирование показало, что при разумных уровнях ошибок координат и углов пеленга метод позволяет получить приближенные координаты объекта с контролируемой погрешностью. Учёт нормального распределения ошибок и использование принципа наименьших квадратов обеспечивают устойчивость метода к ошибкам в исходных данных. Реализация метода в программной среде и его последующая адаптация для задач ПАО «НПО «АЛМАЗ» подтверждают возможность практического применения разработанного подхода в составе соответствующих информационных систем [4].

## Литература

1. *Рульков Д. И.* Навигация и лоция : электронный ресурс. URL: https://flot.com/publications/books/shelf/rulkov/ (дата обращения: 15.07.2025).

2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач : электронный ресурс. URL: https://www.mathnet.ru (дата обращения: 11.08.2025).

3. *Авдюшев В. А.* Основы численных методов : электронный ресурс. URL: https://astro.tsu.ru/OsChMet/index.html (дата обращения: 23.08.2025).

4. *Смирнов М. В.* Управление данными : учебно-методическое пособие. – М. : РТУ МИРЭА, 2020. Электронный оптический диск (ISO). (дата обращения: 05.09.2025).

УДК 539.3

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАЛИЧИИ НЕСОВЕРШЕНСТВ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ

**И. Н. Одинцев[1], А. Н. Волков[1,2], А. М. Кокуров[1]**

*[1]Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН*
*[2]Московский авиационный институт*

**Аннотация.** В статье представлены результаты численного исследования влияния геометрических несовершенств поверхности цилиндрической оболочки на ее несущую способность при осевом сжатии. Выполнен анализ существующих подходов к оценке характеристик устойчивости при наличии регулярно распределенных отклонений от формы идеального цилиндра. Приведено сопоставление результатов расчетов с известными экспериментальными данными. На основе способа решения, дающего результаты, наиболее близкие к экспериментальным, выполнено исследование воздействия на устойчивость оболочки одиночного дефекта типа вмятины значительных размеров как при отсутствии, так и при наличии на ее фоне распределенных несовершенств формы цилиндра.
**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, осевое сжатие, устойчивость, распределенные геометрические несовершенства, вмятина, метод конечных элементов, нелинейный анализ, численное моделирование.

## Введение

Хорошо известным фактом является эффект потери устойчивости цилиндрической оболочки задолго до достижения осевой сжимающей нагрузкой возможного максимума, полученного на основе теоретического решения в линейной постановке [1, 2]. Несмотря на множество попыток, решение проблемы сопоставимости расчетных и экспериментальных данных остается актуальной и в настоящее время [3–6].

Разумно предположить, что эффект расхождения указанных данных объясняется наличием несовершенств формы цилиндрической оболочки, влиянием реальных граничных условий (неоднородностью приложения нагрузки), структурой материала [7–9] нелинейностью процесса деформирования [6, 10] и т. п. Некоторые аналитические подходы, в какой-то степени учитывающие данные факторы [7], не получили достаточного широкого распространения в инженерной практике ввиду их относительной сложности. В большинстве расчетов анализ устойчивости цилиндров сводится к линейному решению и добавлению индуцированных несовершенств [11] или поправочного коэффициента [1]. При численном решении задачи методом конечных элементов учитывается геометрическая и физическая нелинейность и дополнительно вводятся различными способами заданные отклонения в геометрию цилиндрической оболочки [6, 12, 13].

## 1. Постановка задачи

В статье рассматриваются тонкостенные оболочки средней длины. С целью выявления достоверности метода численного анализа устойчивости оболочек, изложенного в [12], проводится сравнение величины критической силы сжатия с экспериментальными результатами [13] и дополнительно с данными, получаемыми путем аналитических инженерных расчетов [1, 11]. В дальнейшем численно исследуется влияние дефекта значительного размера (вмятины) при наличии и отсутствии малых отклонений форм.

## 2. Исследование достоверности метода численного анализа устойчивости оболочек на основе введения начальных несовершенств

При исследовании подхода к численному анализу устойчивости на основе введения начальных несовершенств повторены расчеты, аналогичные [12], с использованием нелинейного решателя Nastran Sol 401 в среде Siemens NX. Как указывалось ранее, данные сравнивались также с экспериментальными результатами из [13]. В процессе исследования рассматривалась оболочка с параметрами, представленными в табл. 1.

Таблица 1

*Параметры цилиндрической оболочки*

| № | Толщина $\delta$ мм | Длина $l$ мм | Радиус $R$ мм | Материал | Параметр тонкостенности $R/\delta$ | Относительное отклонение $k/R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,8 | 350 | 350 | SS-316 | 437,5 | $2{,}46\cdot10^{-3}$ |
| 2 | 1 | | | | 350 | $2{,}19\cdot10^{-3}$ |
| 3 | 1,25 | | | SS-304 | 280 | $2{,}14\cdot10^{-3}$ |

Так как в [13] не были представлены данные по кривой деформирования $\sigma-\varepsilon$ для материала испытанной оболочки, то его характеристики физической нелинейности были оценены методом Рамберга — Осгуда [14–17]. Для задания исходных несовершенств применялись: метод на основе приложения к исходной геометрии первых форм потери устойчивости исходя из линеаризованного решения, умноженных на величину геометрических несовершенств $k$; подход на основе введения отклонений в виде тригонометрической функции в цилиндрических координатах (рис. 1):

$$R_{нес} = R + k\cos(m\varphi)\sin\left(\frac{n\varphi z}{l}\right),$$

где $m$ и $n$ — количество волн по окружности и высоте цилиндра соответственно; $k$, мм — величина отклонения (геометрических несовершенств) (половина амплитуды) $\varphi$, ° — угол между осью $X$ и текущим радиусом $\varphi \in [0;360)$.

Результаты анализа потери устойчивости (ПУ) представлены в табл. 2.

Здесь введены следующие обозначения: $P_1^{кр}$ — критическая сила, найденная с использованием подхода наложения форм потери устойчивости по данным линеаризированного расчета; $P_2^{кр}$ — значения критической силы, полученные при наложении начальных несовершенств, заданных по тригонометрическому закону (5 волн по окружности и 5 вдоль образующей);

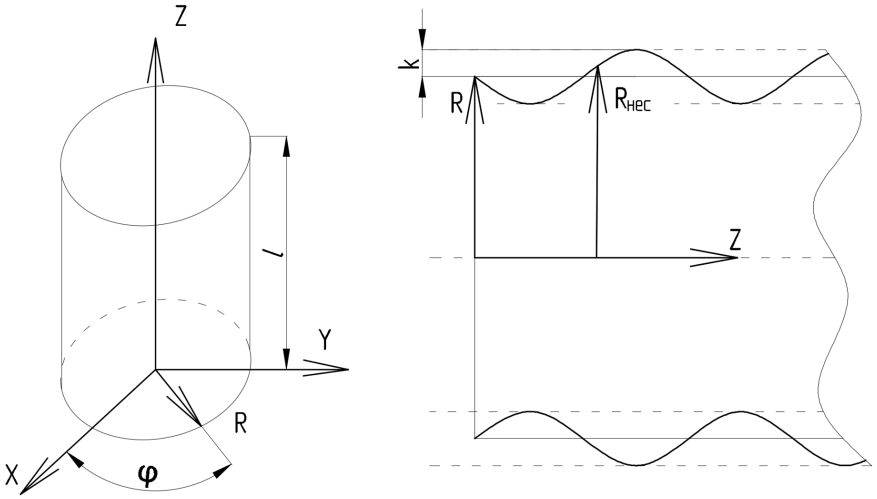



*Рис. 1. Геометрические параметры цилиндра с начальными несовершенствами*

Таблица 2

*Расчетные данные критической силы*

| $\delta$ мм | $R/\delta$ | $P_1^{кр}$ кН | $P_2^{кр}$ кН | $P_3^{кр}$ кН | $P_4^{кр}$ кН | $P_5^{кр}$ кН | $P_6^{кр}$ кН |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.8 | 437,5 | 137,5 | 157,4 | 156 | 140–163 | 112,5 | 132,1 |
| 1 | 350 | 270 ($P_1^{кр1}$) / 217,5 ($P_1^{кр2}$) | 242,2 | 222 | 219,5–247,1 | 140,7 | 181,9 |
| 1,25 | 280 | 400 | 382,5 ($P_2^{кр1}$) / 303 ($P_2^{кр2}$) | 328,2 | 286,7–321 | 175,8 | 250,1 |

$P_3^{кр}$ — результаты определения критической силы для оболочек аналогичной геометрии из [12]; $P_4^{кр}$ — экспериментальные результаты [13]; $P_5^{кр}$ — расчет критической силы с использованием формул и поправочного коэффициента на основе параметра тонкостенности из [1] $P_{кр} = 0,604\dfrac{aE\delta}{R}\cdot 2\pi R$, где $a$ — поправочный коэффициент на основе экспериментов из таблицы в [1]; $P_6^{кр}$ — значения критической силы, полученной с использованием формулы из [11]

$$P_{кр} = \frac{E\delta / R}{\left[1+0,675\mu\sqrt[4]{(1-\mu^2)R^2/\delta^2}\,l/R\right]\sqrt{3(1-\mu^2)}}\cdot 2\pi R.$$

Анализ полученных значений критической силы позволяет сделать следующие выводы. Данные аналитического расчета $P_5^{кр}$ по формулам из [1] дают значительно заниженные результаты. В случае расчета устойчивости согласно [11] найденные значения $P_6^{кр}$ наиболее приближенны к экспериментальным величинам и результатам КЭ моделирования, однако можно заметить, что со снижением параметра тонкостенности $R/\delta$ снижается и точность предложенного подхода. Значения критической силы $P_1^{кр}$ и $P_4^{кр}$ достаточно хорошо коррелируют, но чувствительны к форме ПУ, начиная с толщины стенки $\delta = 1,0$ мм. Отметим, что у результата $P_1^{кр1}$ в табл. 2 форма характеризовалась наличием волн как окружных, так и вдоль образующей, а у $P_1^{кр2}$ форма образована только волнами вдоль образующей. Для цилиндра с $\delta = 1,25$ мм при расчете $P_1^{кр}$ первые 15 форм ПУ характеризовались волнами как вдоль окружности, так и по образующей. Значения $P_2^{кр}$, наиболее близкие к данным эксперимента, получены с использованием метода на основе введения отклонений в виде тригонометрической функции (рис. 1). Рассмотренный подход при повышении параметров тонкостенности позволяет получить значения несущей способности достаточно близкие к величинам $P_3^{кр}$ из [12], за исключением данных для оболочки с $\delta = 1,25$ мм. Отметим, что величина $P_2^{кр1}$ соответствует начальным несовершенствам в виде 5 волн вдоль окружности и образующей, а $P_2^{кр2}$ — с начальным несовершенствам в виде 5 волн вдоль образующей. Причины имеющихся расхождений между $P_2^{кр}$ и $P_3^{кр}$ сложно установить, поскольку в [12] не указан ряд факторов, которые могут влиять на точность численного решения, включая параметры приложения несовершенств к исходной форме цилиндра. Таким образом, из всех рассмотренных подходов к решению задачи, последний метод (данные по $P_2^{кр}$) дает результаты, наиболее приближенные к [12] и [13].

## 4. Влияние геометрических несовершенств цилиндрической поверхности на критическую силу осевого сжатия

После выбора метода расчета, наиболее оптимального по точности решения, были проведены исследования, направленные на определение влияния различных начальных несовершенств на величину критической осевой силы сжатия.

Здесь и далее в качестве объекта исследования рассматривался цилиндр, выполненный из алюминиевого сплава 3004, толщиной стенки $\delta$ = 0,11 мм, радиусом $R$ = 32,5 мм, длиной $l$ = 150 мм. При этом параметр тонкостенности составил $R/\delta$ = 295,5.

При численном анализе было рассмотрено 3 случая: наличие многочисленных несовершенств, распределенных по тригонометрическому закону; наличие единичного дефекта — вмятины; комбинация первых двух случаев при фиксированном параметре распределенных несовершенств.

Анализ проводился в геометрически и физически нелинейной постановке с использованием нелинейного решателя Nastran Sol 401 в среде Siemens NX. Кривая $\sigma - \varepsilon$ сплава 3004 также, как и ранее, задавалась с использованием метода Рамберга — Осгуда [14]. Результаты исследования для первого случая представлены на рис. 2.

На рис. 2 на участке $k \in [0; 0,625]$ явно заметна область возможной ПУ, ограниченной сверху $P_{кр}^{лин}$, а снизу — минимальными значениями $P_{кр}^{нл}$. Отсюда можно заключить, что при $k / R \geq 0,019$ размер начальных несовершенств перестает играть определяющую роль, а сама конструкция начинает разрушаться в первую очередь ввиду значительных пластических деформаций.

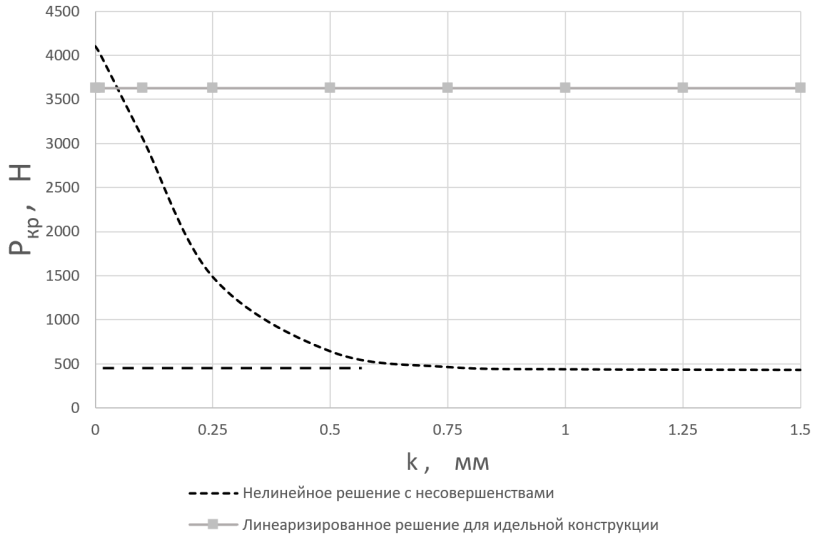



*Рис. 2. Зависимость $P_{кр}^{нл}$ от величины многочисленных несовершенств, распределенных по тригонометрическому закону*

Во втором случае рассматривалась аналогичная конструкция с вмятиной различной глубины $t$: от 0,5 до 15 мм. Форма вмятины, накладываемая на геометрию конечно-элементной модели представлена на рис. 3. На данном рисунке демонстрируется полученная с помощью метода корреляции цифровых изображений профилограмма [18–21] реального цилиндра с созданной глубокой вмятиной.

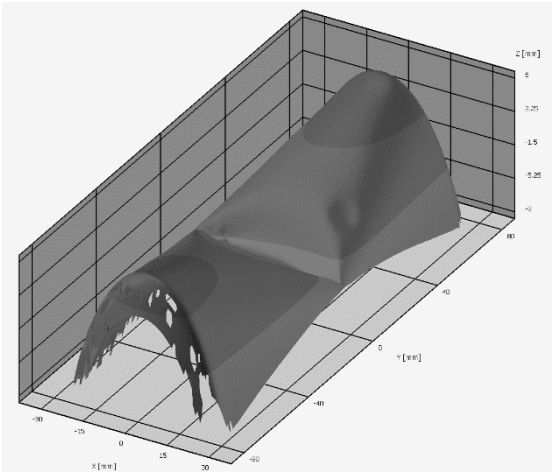


*Рис. 3. Форма единичного дефекта цилиндрической поверхности*

Для третьего случая характерно наличие вмятины различной глубины $t$: от 0,5 до 15 мм и множественных несовершенств величиной $k = 0,5$ мм На рис. 4 представлены результаты расчетов для последних случаев.

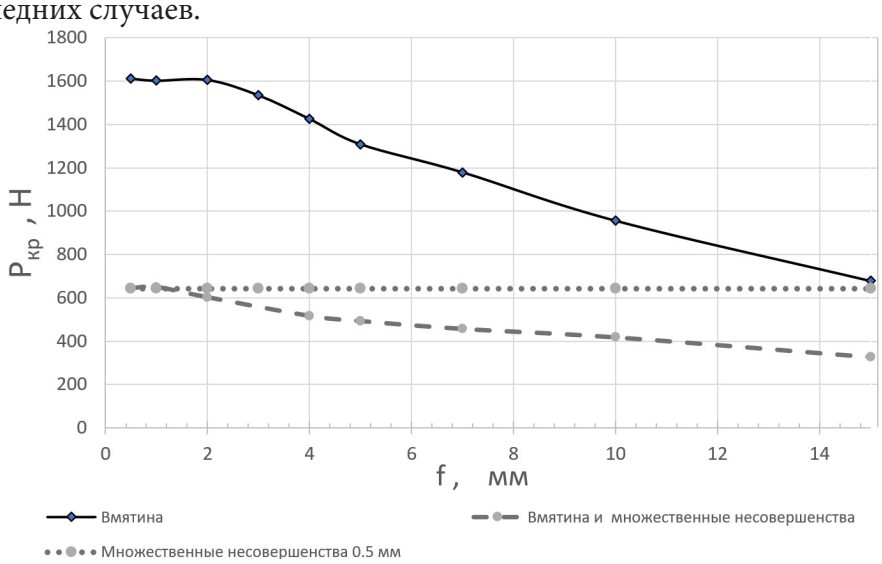



*Рис. 4. Зависимость $P_{кр}^{нл}$ от величины рассматриваемых несовершенств*

## Заключение

В результате выполненных исследований было установлено, что при расчете ПУ цилиндрической оболочки с использованием МКЭ значения критической силы, наиболее близкие к экспериментальным данным, получаются с введением в конструкцию начальных несовершенств формы, распределенных по тригонометрическому закону. Показано, что при параметре тонкостенности $k / R \geq 0,019$ ведущим фактором потери несущей способности оболочки в первую очередь является развитие пластических деформаций, а не смена равновесной формы. Выявлено, что наличие одновременно распределенных несовершенств и вмятины размером одного порядка с радиусом снижает несущую способность при сжатии вплоть до 60 %.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 20-19-00769-П.

## Литературы

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем : монография / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 987 с.

2. Тимошенко С. П. К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки // Вестник общества технологов. – 1914. – Т. 21. – С. 785–792.

3. *Cooley S. A., Yang H., Virgin L. N.* 3D-printing and cylinder buckling: challenges and opportunities // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 2023. – Vol. 381, № 2244. – P. 20220035. – DOI: 10.1098/rsta.2022.0035.

4. *Yang L.* Analytical investigation on the buckling of cylindrical shells under combined non-uniform axial compression and external pressure // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2023. – Vol. 237, № 24. – P. 6009–6019. – DOI: 10.1177/09544062231168727.

5. *Дильман В. Л., Карпета Т. В.* Критические состояния тонкостенных цилиндрических оболочек с кольцевыми швами при осевом сжатии и внутреннем давлении // Челябинский

физико-математический журнал. – 2023. – Т. 8, № 4. – С. 568–579. – DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-568-579.

6. *Wagner H. N. R., Hühne C., Janssen M.* Buckling of cylindrical shells under axial compression with loading imperfections: an experimental and numerical campaign on low knockdown factors // Thin-Walled Structures. – 2020. – Vol. 151. – P. 106764. – DOI: 10.1016/j.tws.2020.106764.

7. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек : монография / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – М. : Наука, 1978. – 360 с.

8. *Fazlalipour N., Showkati H.* Geometric properties and imperfections influence on buckling behavior of variable-thickness steel cylindrical shells subjected to combined loading: experimental and numerical study // Structures. – 2023. – Vol. 55. – P. 834–852. – DOI: 10.1016/j.istruc.2023.06.064.

9. *Simitses G. J.* Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells: a review // Applied Mechanics Reviews. – 1986. – Vol. 39. – P. 1517–1524. – DOI: 10.1115/1.3149506.

10. *Cervi C., Virgin L. N.* An experimental parametric study assessing the effect of a certain initial geometric imperfection on cylinder buckling // Aerospace Science and Technology. – 2024. – Vol. 152. – P. 109355. – DOI: 10.1016/j.tws.2020.106764.

11. *Пикуль В. В.* К теории устойчивости оболочек // Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук. – 2006. – № 4. – С. 81–86.

12. *Анисимов М. К., Поникаров С. И., Черенков А. В.* Численный анализ устойчивости цилиндрических оболочек, нагруженных осевой сжимающей силой, с учетом геометрических несовершенств // Машиностроение и инженерное образование. – 2006. – № 4. – С. 49–56.

13. *Athiannan K., Palaninathan R.* Experimental investigations on buckling of cylindrical shells under axial compression and transverse shear // Sādhanā. – 2004. – Vol. 29. – P. 93–115. – DOI: 10.1007/BF02707003.

14. *Ramberg W., Osgood W. R.* Description of stress-strain curves by three parameters : technical note NACA-TN-902 / W. Ramberg, W. R. Osgood. – Washington : NACA, 1943. – 6 p.

15. *Yapıcı O., Gündüz A. N., Aksoylar C.* Experimental and numerical investigation of material non-linearity in steel elements under different loading protocols // Structures. – 2019. – Vol. 20. – P. 74–87. – DOI: 10.1016/j.istruc.2019.03.003.

16. *Golovina N. Y.* The stress-strain curve model in the form of an extremal of a non-integrable linear variation form // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2023. – Т. 89, № 3. – С. 80–88. – DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-3-80-86.

17. *De Martino A., Landolfo R., Mazzolani F. M.* The use of the Ramberg-Osgood law for materials of round-house type // Materials and Structures. – 1990. – Vol. 23. – P. 59–67. – DOI: 10.1007/BF02472998.

18. *Bodryshev V. V., Babaytsev A. V., Orekhov A. A., Min Y. N.* Digital method for analysing speckle-interferometric images of material deformation // Periodicals of Engineering and Natural Sciences (PEN). – 2021. – Vol. 9, № 3. – P. 886–900. – DOI: 10.21533/pen.v9i3.2321.

19. *Apalkov A. A., Odintsev I. N., Usov S. M.* Speckle pattern interferometry for measurement of residual stress: basic approach, mathematical support, special arrangement, practical application // Machines, Technologies, Materials. – 2015. – № 5. – P. 18–20.

20. *Sutton M. A., Orteu J.-J., Schreier H.* Image correlation for shape, motion and deformation measurements : basic concepts, theory and applications / M. A. Sutton, J.-J. Orteu, H. Schreier. – New York : Springer Science, 2009. – 321 p. – DOI: 10.1007/978-0-387-78747-3.

21. *Луценко А. Н., Одинцев И. Н., Гриневич А. В., Северов П. Б., Плугатарь Т. П.* Исследование процесса деформации материала оптико-корреляционными методами // Авиационные материалы и технологии. – 2014. – № S4. – С. 70–86.

УДК 621.396.94

# СПОСОБ СНИЖЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТА МНОГОЛУЧЕВОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛА В МЕТЕОРНЫХ КАНАЛАХ СВЯЗИ

**А. О. Орехов**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет*

**Аннотация.** В работе представлен способ уменьшения влияния многолучевого распространения радиосигнала, передаваемого посредством каналов метеорной связи, что обеспечивает повышение достоверности приема информации. Предварительное оценивание параметров сформированного метеорного радиоканала реализуется за счет всенаправленного характера рассеяния электромагнитных волн от ионизированного метеорного следа. Вычисления, позволяют посредством многопозиционной модуляции оперативно наращивать стартовый объем передаваемых данных в моменты максимальной электронной плотности канала. Результаты моделирования продемонстрировали эффективность предварительной оценки параметров канала с точки зрения увеличения битовой плотности передачи и сокращения временной протяженности пакетов.
**Ключевые слова:** телекоммуникационная система метеорной связи, многолучевое распространение радиоволн в метеорном канале связи, многопозиционная модуляция, оценка канала связи на передающей стороне.

## Введение

В настоящее время стоит задача обеспечения стабильной связи в арктических регионах. В соответствии с Единым планом мероприятий по реализации государственной политики Российской Федерации в Арктике до 2035 года и Стратегией развития Арктической зоны Российской Федерации и обеспечения национальной безопасности на тот же срок, возникает значительная потребность в современных системах связи для этих территорий. Метеорная радиосвязь, используемая в Арктике, обладает рядом преимуществ перед другими видами радиосвязи. Она обеспечивает передачу данных на значительные дистанции благодаря низкому уровню шума в канале и малой зависимости параметров среды передачи от ионосферных возмущений. [2–4] Для создания устойчивого канала связи применяются радиопередатчики сравнительно низкой мощности. Эти характеристики представляют собой ключевые преимущества данного типа связи. Исходя из этого, наряду с другими технологиями, метеорная радиосвязь рассматривается как основная для приполярных районов и в экстренных ситуациях может стать единственным способом связи, который можно быстро восстановить.

Многолучевое распространение в метеорном канале связи представляет собой одну из критических проблем, которая существенно снижает пропускную способность системы, несмотря на теоретические прогнозы относительно высокой емкости канала. [6, 7] Это явление требует глубокого анализа физических механизмов и разработки эффективных методов компенсации негативных влияний. Одним из способов снижения негативных эффектов предлагается использование кратковременных каналов связи, которые по своей природе имеют устойчивость к потерям связанным с многолучевым распространением, так как вероятность возникновения интерференции между пакетами, принятыми с разных путей, уменьшается пропорционально сокращению длительности существования канала. В свою очередь сокращение длительности передачи влечет за собой снижение количества переданных данных. Для поиска оптимальной с точки зрения объема переданной информации с заданным уровнем потерь длительности передачи снижающей влияние многолучевого распространения радиоволн предлагается использование предварительной оценки его характеристик на основе моделирования канала связи.

Значимость исследования обусловлена развитием технологий удаленного взаимодействия абонентов, в том числе в арктических широтах, посредством каналов метеорной связи с учетом особенностей и ограничений таких радиоканалов.

## 1. Метеорная связь

Эффективность функционирования канала метеорной связи определяется выбором протоколов передачи данных и их специфическими параметрами. Оптимизация параметров протоколов передачи для метеорной связи представляет собой вычислительно сложную задачу, сопряжённую с относительно высокими ресурсными затратами. Максимальная электронная плотность, обеспечивающая наивысшее качество канала, достигается в момент возникновения следа и затем подвержена затуханию, что требует передачи максимального объёма информации именно в этот критический временной интервал. В рамках данной работы предложено оценивать параметры канала на передающей стороне в момент его формирования и осуществлять выбор модуляционных параметров, базируясь на теореме Шеннона для обеспечения максимальной пропускной способности. Такая методология позволяет повысить эффективность использования канала с учётом ограничений метеорной передачи и динамики изменения характеристик канала.

Мощность приёмника $P_R(t)$ после рассеяния на ненасыщенных трассах на частотах, используемых на практике:

$$P_R(t) = \frac{P_T G_T G_R \lambda^2 \sigma a_1 (A_0 \exp^{\frac{-t}{\tau}})(A_0 \exp^{\frac{-t_0}{\tau}}) a_3}{64\pi^3 R_1^2 R_2^2}, \quad (1)$$

где $\lambda$ — длина волны, $\sigma$ — площадь метеорного следа, $a_1$ — коэффициент потерь из-за конечного начального радиуса следа, $T$ — время, прошедшее с момента образования следа, $A_0$ — амплитуда сигнала в момент $t = 0$ (максимум), $\tau$ — характерное время затухания, $a_3$ — коэффициент потерь из-за ионосферного поглощения, $t_0$ — половина времени, необходимое метеору для прохождения первой зоны Френеля, $P_T$ — мощность передатчика, $P_R$ — чувствительность приемника, $G_T$ — усиление передающей антенны относительно изотропной антенны в свободном пространстве, $G_R$ — усиление приемной антенны относительно изотропной антенны в свободном пространстве, (предполагается отсутствие потерь в тракте питателя), $R_1$, $R_2$ — расстояния межу антеннами и метеорным следом.

По формуле 1 можно определить, что наибольшее количество информации можно передать через метеорный канал в начальный момент времени. В традиционных системах метеорной связи, функционирующих в полудуплексном режиме, базовая станция осуществляет непрерывную последовательную передачу нескольких кадров и ожидает обратного сигнала от приемника для оценки параметров канала связи. Данный подход ограничен задержками и неэффективен для динамически меняющихся условий канала.

В предлагаемом альтернативном методе учитывается физическая особенность метеорного канала — зеркальное отражение радиоволн, в том числе обратно к передатчику, что предоставляет возможность оперативной оценки параметров канала непосредственно на стороне передатчика сразу после установления канала связи. Это позволяет в реальном времени выбирать оптимальную сигнально-кодовую конструкцию, направленную на максимизацию информационной пропускной способности при заданном уровне достоверности приема.

Идентификация появления и характеристика ненасыщенного метеорного следа базируется на анализе некоторого количества отсчетов, регистрируемых на передающей стороне, которые в общей форме удовлетворяют параметрической модели метеорного канала связи. Такое решение обеспечивает улучшение адаптивности и эффективности метеорных систем связи, снижая требования к задержкам обратной связи и увеличивая пропускную способность канала.

$$a_2(t_n) = m \times a_2(t_n - 1) \times \exp^{\frac{-t_n}{\tau}}, \quad (2)$$

где $m$ — некоторый пороговый коэффициент, вычисляемый для каждой конкретной системы метеорной связи. Применяя формулу (1), оценим $\tau$ для каждого метеорного следа по паре измеренных спустя определенный интервал времени значений $a_2(t)$ и $a_2(t_n)$.

## 2. Механизмы многолучевого распространения в метеорных каналах

В метеорных системах связи работающих в диапазоне 30–90 МГц, многолучевое распространение возникает благодаря трем основным механизмам. [9]

*Одновременное существование двух метеорных следов*. Когда два пригодно ориентированных метеорных следа присутствуют одновременно, сигналы от них могут интерферировать, создавая дополнительные пути распространения. Исследования показали, что в типичной системе двухследовое распространение приводит к ошибкам передачи, прямо пропорциональным коэффициенту занятости системы. [10]

*Рэлеевское замирание*. Помимо основного сигнала от метеорного следа, в канале присутствует слабый непрерывный фоновый сигнал, который демонстрирует характеристики рэлеевского замирания. Это создает как амплитудное искажение, так и случайную частотную модуляцию из-за переменного доплеровского смещения на различных путях распространения. [11, 12]

*Многолучевость в рамках одного следа*. Возникновение нескольких частичных отражений и рассеяний от одного следа из-за его разрыва или искривления под действием атмосферных потоков. Единственный метеорный след может генерировать несколько путей распространения благодаря существованию первой и второй зон Френеля вдоль следа. Это создает максимальные задержки распространения порядка 200 микросекунд или менее в типичных случаях, хотя иногда наблюдаются задержки до 2 миллисекунд. [8]

Сокращение длительности передачи (длительности символа) в передаваемом сигнале приводит к тому, что каждый символ передается за меньший промежуток времени. Тогда задержка между поступлением основного сигнала и отраженных сигналов становится относительно большой по сравнению с длительностью символа, что позволяет приемнику различать отдельные мультипутевые компоненты сигнала, а не воспринимать их как смешанные. Это уменьшает межсимвольную интерференцию, типичную для многолучевого распространения.

Кроме того, использование коротких импульсов или широкополосных сигналов в сочетании с временным выделением сигнала позволяет повысить временную разрешающую способность приемника. В результате приемник может фильтровать отраженные сигналы и выделять только основной путь или использовать специальные методы обработки для компенсации влияния эхо-сигналов.

Таким образом, сокращение длительности передачи — это один из эффективных способов минимизации влияния многолучевого распространения, который уменьшает временное пересечение прямого и отраженных сигналов, повышая качество и точность приема. [5]

## 3. Параметры симуляции

Моделирование процессов передачи данных по каналам метеорной связи и расчет вероятного числа ошибок выполнены в среде MATLAB. Для сравнительной оценки влияния многолучевого распространения фиксируются некоторые его параметры. Для измерения параметров передачи задаются: высота возникновения метеорного следа — 90 км; мощность передатчика принимается как в существующих портативных системах, например BLOSSOM — 650 Вт; расстояние передачи — 1200 км; базовая скорость передачи — 2.4 Кбод/сек. В модели метеорного

канала используется мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов (OFDM). Ширина полосы пропускания с защитными интервалами составляет 35 МГц и находится в диапазоне 52,5–87,5 МГц. В качестве многопозиционных видов модуляции применяются BPSK и QPSK, так как более емкие модуляции не обеспечивают необходимое отношение сигнал/шум в заданных условиях. Введена задержка 0,03 секунды — время, необходимое для оценки параметров канала и переключения оборудования в режим передачи, ориентированное на характеристики SDR-приемопередатчика RTL-SDR V3 PRO, с потенциальным снижением при использовании более узконаправленного оборудования. Критерий принятия кадра установлен при вероятности ошибки в одном бите (BER) равной $1e10^{5}$.

Для радиоканалов связи в диапазоне 20–130 МГц типичные статистические распределения задержек сигналов характеризуются следующими свойствами: в ряде исследований показано [1], что средние значения задержек (mean delay) и среднеквадратичные задержки (RMS delay spread) в этом диапазоне варьируются в пределах от сотен наносекунд до нескольких микросекунд. RMS задержка может находиться в диапазоне около 0.24–2.5 мкс для 95 % каналов в этом диапазоне частот.

Статистически распределение задержек часто моделируется логнормальным законом, что отражает вариабельность и асимметрию временных задержек, обусловленных многолучевым распространением и отражениями от различных объектов. Таким образом, для задач моделирования примем величину задержки со среднеквадратическим отклонением 2,5 мкс. Результаты моделирования приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Вероятность возникновения ошибок в течение одного метеорного следа с использованием сигналов различной длительности в условиях многолучевого распространения*

| | **Размер кадра, бод** | **Кадров/след** | **бод/след синхронизация без потерь** | **Длительность кадра без учета защитных интервалов, мкс** | **BER, $10^{-5}$** |
|---|---|---|---|---|---|
| **BPSK** | 256 | 4,84 | 1240,17 | 3,66 | 11,54 |
| | 192 | 6,35 | 1218,34 | 2,74 | 2,67 |
| | 160 | 7,23 | 1156,61 | 2,29 | 0,12 |
| | 128 | 8,53 | 1092,27 | 1,83 | 0,11 |
| | 64 | 14,74 | 943,46 | 0,91 | 0,09 |
| **QPSK** | 256 | 9,61 | 2460,61 | 7,32 | 45,32 |
| | 192 | 11,57 | 2221,98 | 5,49 | 16,7 |
| | 160 | 16,02 | 2051,17 | 4,57 | 13,95 |
| | 128 | 14,39 | 1842,26 | 3,66 | 8,09 |
| | 64 | 19,06 | 1220,14 | 1,83 | 0,1 |

## Заключение

Для каждого вида многопозиционной модуляции и для каждого размера кадра была проведена одна тысяча симуляций и получены данные, которые внесены в табл. 1. Следует отметить, что применялся способ оценки канала на приемной стороне, что накладывало задержку на начало передачи данных в канале. Также, на приемной стороне не применялись программные методы устранения влияния многолучевого распространения сигналов, оценивалась лишь влияние длительности фрейма на достоверность приема. Результаты симуляций показывают,

что при длине кадра 64 бод для BPSK и 128 бод для QPSK и влияние многолучевого распространения радиосигнала существенно снижается. Предварительная оценка канала позволяет довольно достоверно предположить необходимый способ модуляции что в сочетании со снижением длинны кадра приводит к малой восприимчивости канала к многолучевому распространению повышая коэффициент использования.

**Литература**


1. *Анишин М. М., Радио Л. П.* Программный комплекс для прогнозирования характеристик КВ-радиолиний «Трасса-2019» (часть 1) // Техника радиосвязи. – 2019. – Вып. 4 (43). – С. 14–26. DOI 10.33286/2075-8693-2019-43-14-26.

2. Боковое распространение радиоволн на коротких метеорных радиотрассах / Т. Асири, А. В. Карпов, А. И. Кодиров, Д. Латипов, В. И. Попов, Л. Н. Рубцов, М. Шарипов // Известия вузов. Радиофизика. – 1989. – Т. 32, № 7. – С. 912–913.

3. *Белокопытов А. Е.* Выбор эффективного вида цифровой модуляции в системах радиосвязи по критериям эффективности / А. Е. Белокопытов // Научный альманах. – 2015. – № 11-3(13). – С. 35-38. DOI:10.17117/na.2015.11.03.035

4. *Белькович О. И.* Вычисление распределения метеорных радиантов по наблюдениям на одной радиолокационной станции с угломером / О. И. Белькович, В. В. Сидоров, Т. К. Филимонова // Астрономический Вестник. – 1991. – Т. 25, № 2. – С. 225–232.

5. Теория передачи сигналов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк Филимонова; изд. 2, перераб. и дополн. – Москва : Радио и связь, 1986. – 304 с.

6. *Капралов Д. Д.* Стохастическая модель метеорного радиоканала / Д. Д. Капралов, Д. И. Кирик // Труды учебных заведений связи. – 2018. – Т. 4, № 3. – С. 54-64. DOI:10.31854/1813-324X-2018-4-3-54-64

7. *Карпов А. В.* Метеорная генерация секретных ключей шифрования для защиты открытых каналов связи / А. В. Карпов, В. В. Сидоров, А. И. Сулимов // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2008. – № 3. – С. 45–54.

8. *Ландышев С. В., Клименко М. Ю.* Принципы построения многочастотного приёмника ГНСС на базе СБИС К1888ВС018 // НАНОИНДУСТРИЯ. – № S (82). – С. 64–68.

9. *Мирошников В. И.* Основные направления развития метеорной связи / В. И. Мирошников, П. А. Будко, Г. А. Жуков // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. – 2019. – Т. 11, № 4. – С. 30–47. DOI: 10.24411/2409-5419-2018-10277

10. Территориально распределенный стенд ПАО «Интелтех» и новые возможности проведения НИР и ОКР по созданию перспективных комплексов связи / Ю. Л. Николашин, В. И. Мирошников, П. А. Будко, Г. А. Жуков // Морская радиоэлектроника. – 2016. – № 3. – С. 50–55.

11. Российская Федерация. Указ Президента РФ от 26 октября 2020 г. N 645 Стратегия развития Арктической зоны Российской Федерации до 2020 года. – URL: https::minec.gov-murman.ru/activities/strat_plan/arkticzone/ (дата обращения 09.01.2024).

12. *Ротхаммель К.* Энциклопедия антенн / К. Ротхаммель, А. Кришке; пер с нем. – М. : ДМК «Пресс», 2011. – 812 с.

13. *Титков С. Б.* Технические предложения по использованию метеорной связи / С. Б. Титков // Защита информации. Инсайд. – 2006. – № 3. – С. 74–80.

УДК 004.942

# РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА ПОИСКА МОМЕНТОВ РАЗЛАДКИ ВРЕМЕННОГО РЯДА ADAPTIVE CUSUM НА ПРИМЕРЕ МЕТЕОДАННЫХ

**М. С. Петренко, Е. А. Сирота**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается проблема обнаружения моментов разладки во временных рядах на примере метеорологических данных. Предложен модифицированный алгоритм AdaptiveCUSUM, который реализует адаптивный порог, что позволяет учесть изменчивость и зашумленность данных, увеличить точность обнаружения разладок по сравнению с классическим алгоритмом CUSUM. Проведен сравнительный анализ эффективности алгоритмов Adaptive CUSUM и CUSUM на реальных данных температуры воздуха в Москве за 2024 год. Показано, что использование AdaptiveCUSUM улучшает качество прогноза временных рядов.

**Ключевые слова:** обнаружение разладок, временные ряды, AdaptiveCUSUM, CUSUM, метеорологические данные, адаптивные алгоритмы, прогнозирование, анализ временных рядов, сезонность, волатильность, точность прогноза, статистические методы, обработка данных, моделирование.

## Введение

В современном мире анализ временных рядов (ВР) играет ключевую роль в различных областях, включая метеорологию, экономику, медицину и промышленность и т. д.

Одной из важнейших задач в анализе временных рядов является обнаружение разладок — моментов, когда статистические свойства временного ряда, такие как среднее, дисперсия, тренд, сезонность резко изменяются [1].

Разладки могут быть вызваны как внешними факторами (например, изменением климата, экономическими кризисами, природными катаклизмами), так и внутренними процессами (например, сбоями в системе сбора данных).

При наличии структурных разрывов могут возникнуть следующие проблемы:

1. Изменяется параметрическая модель системы. Если изменения игнорируются, это может привести к потери значимости оценок параметров и ухудшению точности прогноза.

2. Усложняется процедура определения типа процесса.

3. Метеоданные часто характеризуются высокой волатильностью, сезонностью и наличием шумов, что усложняет задачу обнаружения разладок и требует использования продвинутых алгоритмов.

Традиционные методы обнаружения разладок, такие как классический CUSUM (Cumulative Sum Control Chart) [9], имеют ограничения, связанные с фиксированными порогами и отсутствием адаптивности к изменениям в данных. Это может приводить к большому количеству ложных срабатываний или пропуску реальных разладок.

В связи с этим актуальной задачей становится разработка и исследование улучшенных алгоритмов, способных адаптироваться к изменениям в структуре временных рядов и учитывать специфику метеорологических данных.

В данной статье предлагается модификация классического алгоритма CUSUM, названная авторами AdaptiveCUSUM.

Целью данной работы является разработка и реализация модифицированного алгоритма поиска моментов разладки ВР AdaptiveCUSUM на примере метеоданных.

## 1. Классический алгоритм CUSUM

CUSUM основывается на накоплении отклонений текущих значений от ожидаемого среднего. Алгоритм фиксирует разладку, когда накопленная сумма отклонений превышает заданный порог.

Пусть ВР $y_t$ — последовательность наблюдений $y_1,\ldots,y_N$, где каждое наблюдение $y_t$ соответствует значению процесса в момент времени $t$.

До момента разладки $t_a$ значения временного ряда распределены вокруг среднего $\mu_0$ с некоторым стандартным отклонением $\sigma$. После разладки среднее значение процесса изменяется на $\mu_1$.

Таким образом, рассматриваются следующие гипотезы:

1. Гипотеза $H_0$ (отсутствие изменений): среднее значение временного ряда принимает значение $\mu_0$.

2. Гипотеза $H_1$ (наличие изменений): среднее значение временного ряда принимает значение $\mu_1$ [3].

Алгоритм использует «онлайн»-подход, то есть обнаружение изменений происходит постепенно, для каждого нового наблюдения $y_t$ вычисляются верхняя кумулятивная сумма $S_t^+$ и нижняя кумулятивная сумма $S_t^-$ по формулам (1), (2) [3, 9]:

$$S_t^+ = \max(0,\ S_{t-1}^+ + (y_t - \mu_0) - k), \tag{1}$$

$$S_t^- = \max(0,\ S_{t-1}^- - (y_t - \mu_0) - k), \tag{2}$$

где $S_0^+ = 0,\ S_0^- = 0,\ k$ — параметр дрейфа, определяется по формуле (3) как половина разницы между $\mu_0$ и $\mu_1$:

$$k = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}. \tag{3}$$

Если выполняется соотношение (4):

$$S_t^+ > h, \tag{4}$$

среднее значение временного ряда увеличилось [3].

Если выполняется соотношение (5):

$$S_t^- > h, \tag{5}$$

среднее значение временного ряда уменьшилось. В этих случаях принимается гипотеза $H_1$ и фиксируется разладка.

Пороговое значение $h$ определяется эмпирически. Как правило, для данных с низким уровнем шума $h \in [4,6]$. Если данные сильно зашумлены $h \in [6,10]$, если ложные срабатывания недопустимы, $h \in [8,12]$ [9].

Как было сказано ранее, алгоритм CUSUM имеет ряд недостатков:

1. Чувствительность к выбору параметров значения порога $h$ и дрейфа $k$.

2. Сложность в выборе параметров для нестационарных данных: CUSUM предполагает, что временной ряд стационарен (среднее и дисперсия не меняются со временем). Если ряд нестационарен (например, есть тренд или сезонность), алгоритм может давать ложные срабатывания.

3. CUSUM хорошо обнаруживает резкие изменения среднего, но может пропускать постепенные изменения или небольшие сдвиги.

4. Выбросы (аномалии) в данных могут привести к ложным срабатываниям, даже если реальной разладки нет.

## 2. Адаптивный алгоритм CUSUM

Предлагаемая модификация известного алгоритма CUSUM, названная авторами AdaptiveCUSUM агрегирует известные статистические подходы, такие как учет волантильности данных, учет экстремальных значений с помощью $z$-оценки, коэффициент чувствительности $\alpha$ к изменениям, проверка значимости изменения среднего с использованием $t$-теста. Все эти подходы были рассмотрены в работах [6,7] и используются для вычисления и настройки адаптивного порога.

Пусть заданы $h$ — базовый порог, $k$ — параметр дрейфа, $w$ — размер минимального окна, $\alpha$ — коэффициент чувствительности к изменениям, $\gamma$ — доверительный уровень, $\delta = 0{,}1$ — коэффициент для $z$-оценки.

На первом этапе данного алгоритма для ВР, состоящего из наблюдений $y_1,\ldots,y_N$ рассчитываются начальные значения среднего, стандартного отклонения по формулам (6), (7) [6]:

$$\mu_{current} = \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{w} y_i, \tag{6}$$

$$\sigma_{current} = \sqrt{\frac{1}{w-1}\sum_{i=1}^{w}(y_i - \mu_{current})^2}. \tag{7}$$

А так же определяются начальные значения верхних и нижних кумулятивных сумм $S_0^+ = 0$, $S_0^- = 0$ [4].

На втором этапе для каждого значения ВР $y_1,\ldots,y_N$ рассчитывается текущее стандартное отклонение по формуле (8):

$$\sigma_{window} = \sqrt{\frac{1}{w-1}\sum_{i=\max(0,t-w+1)}^{w}(y_i - \mu_{window})^2}, \tag{8}$$

где

$$\mu_{current} = \frac{1}{w}\sum_{i=\max(0,t-w+1)}^{w} x_i. \tag{9}$$

Расчёт $z$-оценки производится по формуле (10):

$$z = |F^{-1}(\gamma)|, \tag{10}$$

где $F^{-1}(\gamma)$ — квантиль распределения данных на уровне доверия $\gamma$.

Использование $z$-оценки в данном алгоритме обусловлено стандартизацией данных и учетом экстремальных значений. Это позволяет более точно настраивать пороговое значение с учётом статистических свойств временного ряда [7].

Адаптивный порог задается соотношением (11):

$$h_{adaptive} = h(1 + \alpha(\sigma_{window} - \sigma_{current}) + 0{,}1z). \tag{11}$$

Формула (11) адаптирована для задачи прогнозирования метеоданных.

Далее, аналогично классическому алгоритму CUSUM, рассчитываются верхние (12) и нижние (13) кумулятивные суммы:

$$S_t^+ = \max(0,\ S_{t-1}^+ + (y_t - \mu_0) - k), \tag{12}$$

$$S_t^- = \max(0,\ S_{t-1}^- - (y_t - \mu_0) - k). \tag{13}$$

На следующем этапе происходит обнаружение разладки. Если выполняются соотношения (14), (15):

$$\max(S_t^+, S_t^-) > h_{adaptive}, \tag{14}$$

$$t - t_0 > w, \tag{15}$$

то происходит проверка значимости изменения среднего с использованием $t$-теста (16)–(19):

$$\mu_{prev} = \frac{1}{t - t_0} \sum_{i=t_0}^{t-1} y_i, \tag{16}$$

$$\mu_{next} = \frac{1}{\min(N, t+w)} \sum_{i=t}^{\min(N,t+w)} y_i, \tag{17}$$

$$\sigma_{combined} = \sqrt{\frac{\text{var}(y_{t_0}, ..., y_{t-1}) + \text{var}(y_t, ..., y_{\min(n,t+w)})}{2}}, \tag{18}$$

$$t_{stat} = \frac{|\mu_{prev} - \mu_{next}|}{\sigma_{combined}}. \tag{19}$$

Если значение $t_{stat} > 1{,}5,$ фиксируется момент разладки.

По окончании алгоритм возвращает массив точек разладки, значения верхних и нижних кумулятивных сумм и информацию о сегментах.

## 3. Численный эксперимент. Сравнение результатов прогнозирования ВР моделей, построенных на базе алгоритма Хольта — Винтерса

Сравнительный анализ обсуждаемых алгоритмов проводился на примере модельных данных ежедневных показателей температуры воздуха в г. Москва за период 1.01.2024–1.01.2025. Данные взяты с сайта http://meteo.ru/data/temperature-precipitation/. В рамках эксперимента были реализованы классический алгоритм CUSUM и его модификация AdaptiveCUSUM, построена модель Хольта — Винтерса, которая рассматривалась в работе [8].

На первом этапе проводилось исследование ВР и определение моментов разладки с помощью адаптивного алгоритма CUSUM, результаты работы которого отображены на рис.1.

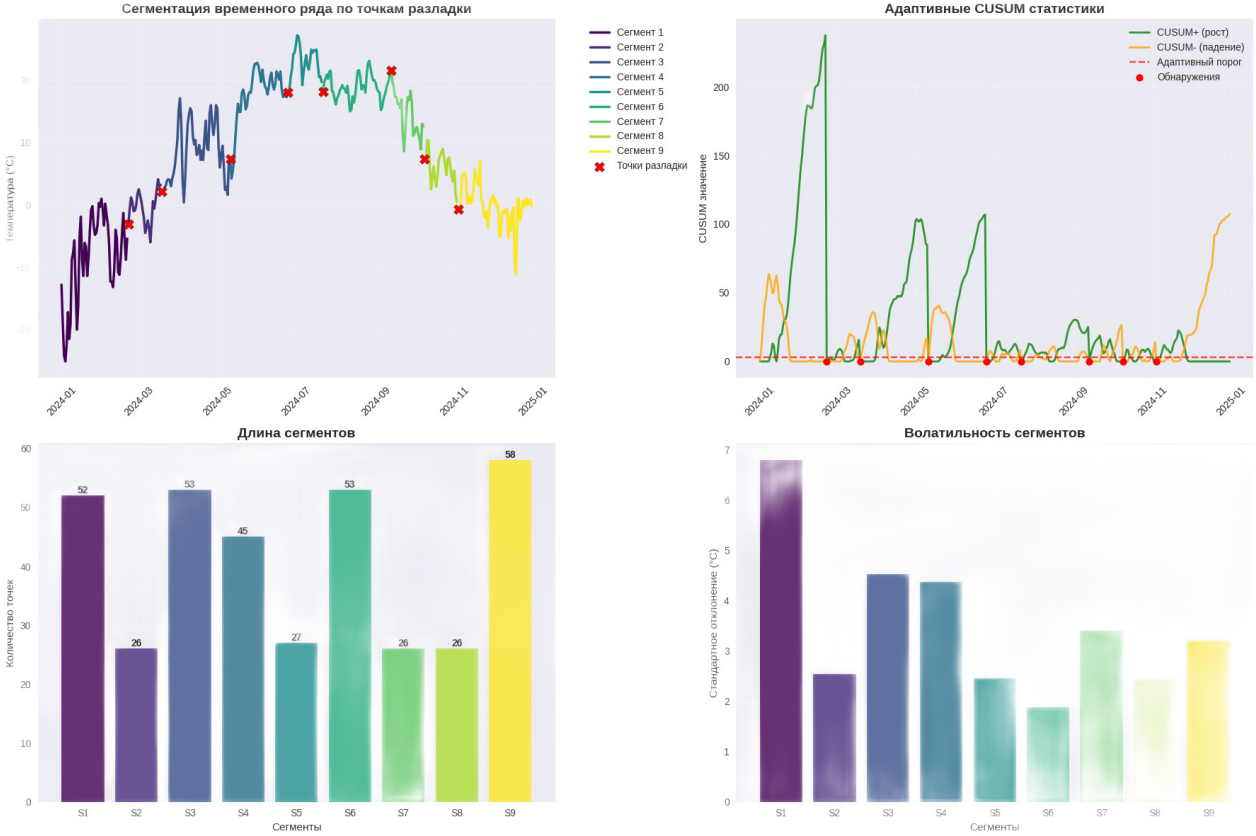



*Рис. 1. Исследование ВР и определение моментов разладки с помощью адаптивного алгоритма CUSUM*

Следующий этап — построение прогноза модельных данных и данных, прошедших проверку на моменты разладки. Прогнозирование выполнялось на базе модели Хольта — Винтерса [8]. Так же была проведена оценка качества прогноза построенных моделей.

Пример прогнозирования значений временного ряда с учетом точек разладки представлен на рис. 2.

*Рис. 2. Пример прогнозирования значений временного ряда с учетом точек разладки*

Пример прогнозирования значений временного ряда с помощью модели Хольта — Винтерса без учета точек разладки представлен на рис. 3.

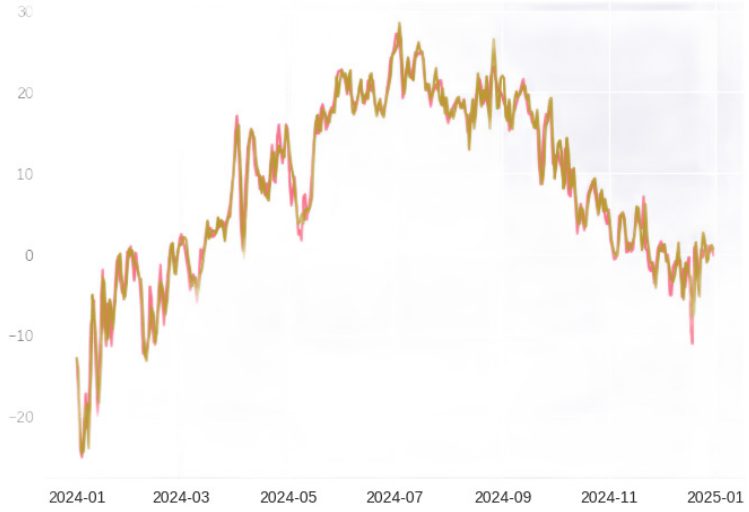



*Рис. 3. Пример прогнозирования значений временного ряда с помощью модели Хольта — Винтерса без учета точек разладки*

Показатели функций потерь MAE, MSE, MAPE для оценки адекватности моделей с применением адаптивного алгоритма CUSUM и без него в задаче прогнозирования временного ряда приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Показатели ошибок*

| | MSE | MAE | MAPE |
|---|---|---|---|
| AdaptiveCUSUM | 3.72 | 1.24 | 0.63 |
| Классический CUSUM | 3.8 | 1.55 | 0.7 |
| Исходный BP | 4.61 | 1.52 | 0.8 |

Из табл. 1 видно, что наиболее качественный прогноз был построен моделью с учетом точек разладки, полученных с помощью AdaptiveCUSUM.

## Заключение

Таким образом, полученные результаты эксперимента ещё раз доказывают необходимость определения точек разладки перед решением задачи прогнозирования.

Также следует отметить, что улучшенный алгоритм AdaptiveCUSUM более гибкий, точный и надёжный по сравнению с классическим CUSUM. Он лучше подходит для анализа сложных ВР с изменяющейся волатильностью и позволяет снизить количество ложных срабатываний. Это связано с тем, что алгоритм использует адаптивный порог, который изменяется в зависимости от текущей волатильности данных, среднее и стандартное отклонение после обнаружения разладки обновляются, что позволяет алгоритму адаптироваться к новым условиям.

Также для проверки значимости обнаруженных разладок используется $t$-тест, что позволяет избежать ложных срабатываний.

## Литература


1. *Гребенюк Е. А.* Методы анализа нестационарных временных рядов с неявными изменениями свойств / Е. А. Гребенюк // Автомат. и телемех. – 2005. – № 12. – С. 3–30.

2. *Гребенюк Е. А.* Анализ и оперативная диагностика систем, описываемых нестационарными случайными процессами / Е. А. Гребенюк // Пробл. управл. – 2003. – № 4. – С. 23–29.

3. *Гребенюк Е. А.* Мониторинг нестационарных процессов: анализ и исследование изменений свойств стационарности / Е. А. Гребенюк // Пробл. управл. – 2004. – № 3. – С. 15–20.

4. *Гребенюк Е. А.* Обнаружение изменений свойств нестационарных случайных процессов / Е. А. Гребенюк // Автомат. и телемех. – 2005. – № 12. – С. 3–30.

5. *Матвеев М. Г.* Моделирование динамики атмосферных процессов на основе анализа многомерных временных рядов / М. Г. Матвеев [и др.] // Воздушно-космические силы. Теория и практика. Электронное периодическое издание. – 2017. – №1 (1). – С. 98–110.

6. *Ross G. J.* Adaptive CUSUM Charts for Monitoring a Process Mean / G. J. Ross, N. K. Adams, W. H. Woodall // Journal of Quality Technology. – 2011. – No 43(1). – P. 1–14.

7. *Sparks R.* Adaptive Charts for Process Monitoring / R. Sparks // Journal of Quality Technology. – 2000. – No 32(3). – P. 262–271.

8. *Петренко М. С.* Анализ и исследование некоторых методов прогнозирования нестационарных временных рядов / М. С. Петренко, Е. А. Сирота // Труды молодых учёных факультета компьютерных наук ВГУ. Выпуск 5 / под общ. ред. Д. Н. Борисова ; Воронежский государственный университет. – Воронеж, 2025. – 719 с. – С. 222–229.

9. *Granjon P.* The CUSUM algorithm a small review/ P. Granjon // GIPSA-lab. – 2014.

УДК 622.691.48

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОДВОДНЫХ ГАЗОПРОВОДОВ

**С. Л. Подвальный, Е. М. Васильев**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Представлено решение задачи составления термодинамической модели транспортировки газа по магистральному подводному газопроводу большой протяжённости, а также приведены результаты последующего использования этой модели для идентификации параметров трубопровода, недоступных непосредственному измерению. Применялась конечно-разностная форма построения модели, удобная для её исследования в распространённых математических пакетах. Для повышения адекватности модели не использовались упрощающие допущения об изоэнтропическом и адиабатическом характере движения газа. Проведено моделирования номинальных и аварийных состояний подводного газопровода, и подтверждена возможность идентификации характеристик этих состояний в реальном масштабе времени.

**Ключевые слова:** подводный газопровод, модель транспортировки газа, неизмеряемые параметры трубопроводов, аварийное истечение газа под водой.

## Введение

Актуальной научной и практической задачей является в настоящее время задача дистанционного определения текущего состояния газопроводов в номинальном и аварийном режимах без использования датчиков прямого измерения параметров этого состоянии или каких-либо средств мониторинга, распределенных в пространстве [1]. Наибольшую потребность в решении этой задачи испытывают подводные газотранспортные системы большой протяжённости, прямое наблюдение за состоянием которых по всей длине трубопровода сталкивается с большими техническими трудностями и материальными затратами [2, 3].

Известные методы дистанционного определения параметров газопроводов используют термодинамические модели движения газа в дифференциальной форме, а для идентификации, в частности, — метод квазилинеаризации нелинейных краевых задач Беллмана [4, 5].

В предлагаемой работе в качестве исходной модели предложено применить интегральную форму представления процесса движения газа, удобную для приведения задачи идентификации к задаче решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

## 1. Термодинамическая модель процесса движения газа по трубопроводу

В основу модели положены базовые законы изменения количества движения и сохранения массы и энергии для некоторых двух сечений с координатами $x_1$ и $x_2$:

$$\rho_1 w_1 S = \rho_2 w_2 S; \tag{1}$$

$$(P_1 - P_2)S + \rho_1 w_1 S(w_1 - w_2) = F_{fr} + F_h; \tag{2}$$

$$C_P T_1 + \frac{\mu w_1^2}{2} + \mu g h_1 = C_P T_2 + \frac{\mu w_2^2}{2} + \mu g h_2 + G, \tag{3}$$

в которых: $C_P$ — молярная теплоёмкость; $P_1, P_2, T_1, T_2, w_1, w_2$ — давление, температура и скорости газа в сечениях; $S$ — площадь сечения трубопровода;

$$\rho_1 = \frac{\mu}{V_{\mu 1}};\ \ \rho_2 = \frac{\mu}{V_{\mu 2}}, \tag{4}$$

$\rho_1, \rho_2$ — плотности газа $x_1$ и $x_2$; $\mu$ — молярная масса; $V_{\mu 1}, V_{\mu 2}$ — молярные объёмы:

$$V_{\mu 1} = V_{\mu n}\frac{P_n T_1}{P_1 T_n};\quad V_{\mu 2} = V_{\mu n}\frac{P_n T_2}{P_2 T_n}, \tag{5}$$

$C_P$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении; $g$ — ускорение свободного падения; $V_{\mu n}$ — молярный объём при номинальном давлении и температуре; $h_1, h_2$ — высота сечений по отношению к уровню моря; $G$ — изменение энергии одного моля газа в результате обмена с внешней средой:

$$G = C_T\frac{\mu\pi D}{Q}\int_{x_1}^{x_2}(T(x)-T)dx. \tag{6}$$

Сила $F_{fr}$ трения газа о внутреннюю поверхность трубопровода и сила $F_h$ тяжести определялись по выражениям соответственно:

$$F_{fr} = \lambda\frac{Q}{2D}\int_{x_1}^{x_2} w(x)dx;\quad F_h = Qg\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin\alpha(x)}{w(x)}dx, \tag{7}$$

где $\lambda$ — коэффициент потерь на трение; $C_T$ — коэффициент теплопередачи во внешнюю среду; $\alpha$ — угол наклона трубопровода; $T, T(x)$ — температура среды и газа в точке $x$ соответственно; $D$ — диаметр трубопровода; $Q = \rho(x)w(x)S = \text{const}$ — расход газа в сечении трубопровода за одну секунду.

С целью численного решения системы (1)–(3) осуществлён переход к модели в разностной форме:

$$\rho_{i+1}w_{i+1}S = \rho_i w_i S; \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(P_i - P_{i+1})S + \rho_i w_i S(w_i - w_{i+1}) = \lambda\frac{\rho_i w_i S}{2D}\left(\frac{w_i + w_{i+1}}{2}\right)\cdot st\cdot L + \\ +\rho_i w_i Sg\left(\frac{w_i\sin\alpha_{i+1} + w_{i+1}\sin\alpha_i}{2w_i w_{i+1}}\right)\cdot st\cdot L;\end{aligned} \tag{9}$$

$$C_P T_i + \frac{\mu w_i^2}{2} + \mu g h_i = C_P T_{i+1} + \frac{\mu w_{i+1}^2}{2} + \mu g h_{i+1} + C_T\frac{\mu\pi D}{\rho_i w_i S}\left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2} - T\right)\cdot st\cdot L, \tag{10}$$

в которой через $L$ и $st = (x_2 - x_1)/L$ обозначены длина трубопровода и относительный шаг решения соответственно. Модель (8)–(10) позволяет по заданным значениям температуры, давления и скорости газа в точке $i$ вычислить эти же величины в точке $i+1$ пошагово, от начала до конца трубопровода.

На рис. 1 представлены результаты моделирования для номинального режима газопровода с профилем: $\sigma \le 0{,}06$ — пологое снижение до глубины 200 м; $0{,}06 < \sigma \le 0{,}1$ — крутое снижение до глубины 2000 м; $0{,}1 < \sigma \le 0{,}9$ — горизонтальный участок длиною 20000 м и далее симметричный подъём до нулевого уровня.

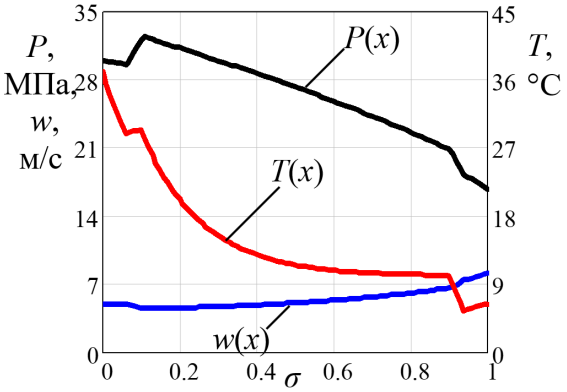



*Рис. 1. Изменение давления, температуры и скорости газа в трубопроводе в зависимости от расстояния $\sigma = x/L$ в номинальном режиме*

Анализ рис. 1 подтверждает особенности движения газа в глубоководных трубопроводах: постепенное снижение температуры с резким её падением на участке крутого подъёма и локальный рост температуры на участке крутого спуска, связанный с ростом давления под влиянием силы тяжести; давление в целом на всём протяжении снижается из-за потерь на трение, скорость растёт в силу (1) из-за снижения плотности

### 2. Идентификация коэффициентов теплопередачи и потерь на трение

Коэффициенты теплопередачи $C_T$ и потерь на трение $\lambda$ являются параметрами, подверженными существенным изменениям во времени, и задача их идентификации с помощью математической модели наиболее востребована [6]. Способ такой идентификации основан на том, что вычислив на модели (8)–(10) значения $P(L),\ T(L),\ w(L)$ на конце трубопровода для некоторых начальных значений $C_T$ и $\lambda$ можно сравнить эти значения с фактически измеренными $P_r(L),\ T_r(L),\ w_r(L)$, и используя, например, критерий невязки $\varepsilon(\lambda, C_T)$ этих значений:

$$\varepsilon(\lambda, C_T) = \left(1 - \frac{P}{P_r}\right)^2 + \left(1 - \frac{T}{T_r}\right)^2 + \left(1 - \frac{w}{w_r}\right)^2 \rightarrow \min, \tag{11}$$

решить задачи безусловного поиска минимума этого критерия. Поведённый численный эксперимент с начальными значениями $C_T = 20$ Дж/(с·м²·К) и $\lambda = 0,005$ методом покоординатного поиска за 4 цикла расчётов привёл к значениям $C_T = 9,995$ Дж/(с·м²·К) и $\lambda = 0,012$, хорошо совпадающими с реальными значениями $C_T = 10$ Дж/(с·м²·К) и $\lambda = 0,012$.

### 3. Идентификация характеристик локального разрыва стенки трубопровода

Для решения задачи идентификации места $x = \sigma L$ и площади $S_d$ частичного разрушения стенки подводного газопровода в модель (8)–(10) введено описание дозвукового режима истечения газа, характерного для глубоководной части трубопровода:

$$T_d = T_\sigma \left(\frac{P_d}{P_\sigma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad P_d = P_{ex}; \tag{12}$$

$$Q_d = \rho_d w_d S_d; \tag{13}$$

$$C_P T_\sigma = C_P T_d + \frac{\mu w_d^2}{2}, \tag{14}$$

где $T_\sigma,\ T_d$ — температура газа на входе и на выходе разрушенного участка, рассматриваемого как короткий патрубок; $\rho_d, Q_d$ — плотность и расход газа на выходе патрубка соответственно.

Разностная форма модели (8)–(10) с учётом (12)–(14) имеет вид, аналогичный (8)–(10).

Изменение давления, температуры и скорости газа в режиме частичного разрушения в точке $\beta = 0,4$ в сравнении с номинальным режимом представлены на рис. 2.

Несмотря на то, что значения давления, температуры и скорости газа в конце трубопровода в аварийном режиме существенно отличаются от соответствующих значении в номинальном режиме (рис. 2), оказалось, что различия этих значений при изменении места аварийного истечения и его площади недостаточны для дистанционной идентификации указанных параметров повреждения.

В вязи с этим предложено включить в число рассматриваемых характеристик потока газа его расход $Q_\sigma$ на входе трубопровода. В результате задача идентификации места $x = \sigma L$ и площади $S_d$ частичного разрушения свелась к поиску экстремума функции:

$$\delta(S_d, \sigma) = \left(1 - \frac{P_r(S_d, \sigma)}{P}\right)^2 + \left(1 - \frac{Q_r(S_d, \sigma)}{Q_\sigma}\right)^2 \rightarrow \min, \tag{15}$$

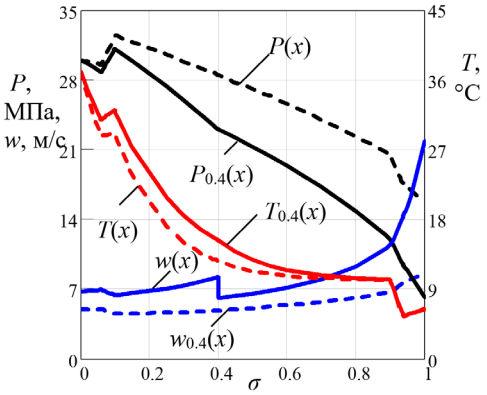



*Рис. 2. Изменение давления, температуры и скорости газа в трубопроводе в зависимости от расстояния* $\sigma = x / L$ *при аварийном истечении в точке* $\sigma = 0,4$

в которой $P_r(S_d,\sigma)$, $Q_r(S_d,\sigma)$ и $P, Q_\sigma$ — расчётные и фактические значения давления и расхода газа.

Решение задачи (24) может быть получено аналогично решению задачи (11) классическими методами поиска безусловного экстремума.

## Заключение

Предложенная разностная форма представления термодинамической модели протекания газа в подводном трубопроводе в номинальном и в аварийном режимах даёт возможность свести задачу идентификации нестационарных параметров трубопровода к типовой задаче поиска минимума функции невязки между фактическими и расчётными значениями характеристик газа на концах трубопровода, решаемую в реальном масштабе времени.

## Литература

1. Инновационные разработки, повышающие надёжность и безопасность эксплуатации магистральных газопроводов посредством применения подсистемы обнаружения нештатных событий / А. В. Кузема, О. Ф. Чуносов, В. Ю. Шарохин, А. И. Гурин, Ф. С. Марков, Р. А. Садртдинов, А. Н. Хохлов, Н. Н. Акимов, И. Р. Бухвалов, С. В. Евсеев // Газовая промышленность. – 2022. – № 1(829). – С. 32–40.

2. Эксплуатационная надёжность морских трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях континентального шельфа России / Т. И. Лаптева, М. Н. Мансуров, М. В. Шабарчина, С. Д. Ким, Л. А. Копаева // Безопасность труда в промышленности. – 2018. – № 1. – С. 30–34.

3. Pipe line safety monitoring using distributed optical fiber vibration sensor in the china west-east gas pipeline project / G. Li, J. Zhu, R. Sun, X. Lin, W. Yang, K. Zeng, F. Wang, C. Wang, B. Zhou // Asia Communications and Photonics Conference. October 26–29, 2018. – Hangzhou China : IEEE, 2018. – P. 1–3.

4. *Курбатова Г. И.* Идентификация места утечки газа малой и средней интенсивности в газопроводах средних и сверхвысоких давлений / Г. И. Курбатова, В. А. Клемешев // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2023. – Т. 19, № 2. – С. 218–232.

5. *Селезнёв В. Е.* Основы численного моделирования магистральных трубопроводов / В. Е. Селезнев, В. В. Алешин, С. Н. Прялов. – Москва-Берлин : Директ-Медиа, 2014. – 436 с.

6. Podvalny S. Mathematical model of accidental gas leakage from underwater pipelines / S. Podvalny, E. Vasiljev, E. Kutsova // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2022. –Vol. 857. – P. 165–173.

УДК 004.94

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ ПРОЦЕССА НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗЛИВКИ СТАЛИ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

**Д. А. Полещенко, А. В. Коренев**

*Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) НИТУ «МИСИС»*

**Аннотация.** В работе рассмотрена задача непрерывного мониторинга состояния технологических процессов и оборудования на основе анализа промышленных сигналов. В работе были проведены исследования по моделированию вибрационного сигнала промышленного процесса. Была создана модель для представления данного сигнала на основании гармоник спектра реальных промышленных данных. Адекватность данного метода была подтверждена на основе сравнения статистических и спектральных характеристик реальных и сгенерированных сигналов.

**Ключевые слова:** моделирование технологических сигналов, сигнал виброускорения, непрерывная разливка стали, искусственный сигнал, частотные характеристики, гармонические составляющие сигналов.

## Введение

В настоящее время анализ технологических сигналов с целью непрерывного мониторинга состояния технологических процессов и работоспособности промышленных агрегатов является актуальной задачей [1, 2]. Решение данной задачи имеет высокую практическую значимость, поскольку аварийные остановки оборудования сопряжены с большими экономическими потерями.

В данной работе рассмотрена одна из таких задач в металлургической промышленности — определение момента истечения шлака из сталеразливочного ковша при непрерывной разливке стали [3] на основе анализа сигнала виброускорения защитной трубы машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ).

На сегодняшний день задача является достаточно актуальной в виду существенных потерь, которые несут металлургические комбинаты при разливке стали.

Исследования проводились на сигналах, снятых с реального промышленного объекта. Акселерометры разной чувствительности для определения лучших показателей были установлены на манипулятор защитной трубы МНЛЗ. Запись сигнала виброускорения начиналась при массе стальковша 20–30 тонн. Остановка записи производилась по сигналу оператора о начале поступления шлака в промежуточный ковш. Таким образом были получены данные о 15 плавках. Пример исходного сигнала представлен на рис. 1.

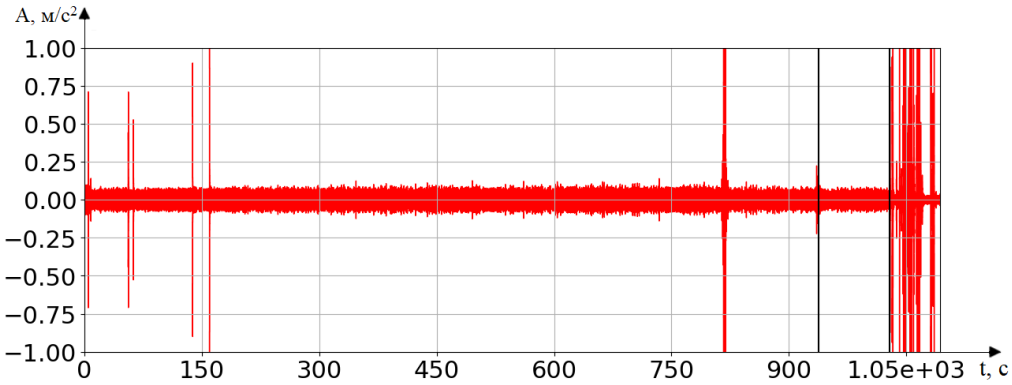



*Рис. 1. Исходный сигнал виброускорения*

На графике левая вертикальная черная линия соответствует моменту отключения автоматического регулирования шибера, правая — моменту закрытия шибера оператором.

Для решения задачи раннего распознавания шлака при разливке стали авторами были предложены несколько различных методов [4, 5], однако существенная стохастичность вибрационных сигналов обусловила определенные ограничения в обобщении экспериментальных данных.

В данной работе предложен новый метод моделирования временных рядов высокой стохастичности на основе спектральных характеристик реальных данных (сигналов вибрации) для выявления их основных закономерностей.

## 1. Математическое представление сигналов вибрации

Основным источником вибрации является биение потока стали о шиберный затвор, препятствующий движению металла. Кроме того, свой вклад в итоговый вид сигнала также вносят шумовые компоненты, которые в первую очередь обусловлены работой различных технологических агрегатов и технических устройств в цехе.

В общем виде сигнал виброускорения можно представить выражением:

$$y(t) = y_i(t) + y_n(t), \tag{1}$$

где $y_i(t)$ — информативная компонента сигнала;

$y_n(t)$ — остаточные шумы.

Таким образом, сигнал формируется как сумма информативной и шумовой составляющей.

## 2. Формирование искусственного сигнала

Для имитации вибрационного сигнала защитной трубы при сливе стали из стальковша в промковш была разработана математическая модель синтетического сигнала, основанная на суперпозиции гармонических компонент с изменяющимися во времени амплитудными и фазовыми характеристиками.

Синтез искусственного временного ряда выполнялся на основе частотных характеристик исходных сигналов вибрации. Для этого была сформирована выборка амплитуд и начальных фаз гармонических составляющих сигналов.

Модель в общем виде была представлена следующим выражением:

$$x_{synthetic}[n] = \sum_{m=0}^{M-1} A_m \cos(2\pi f_m t_n + \varphi_m), \tag{2}$$

где $n = 0,\ 1,\ ...,\ N-1$;

$t_n = \dfrac{n}{f_s}$ — дискретные моменты времени (время в секундах, соответствующее $n$-му отсчёту);

$f_s$ — частота дискретизации;

$N = T \cdot f_s$ — число отсчётов сигнала длительностью $T$;

$M$ — количество спектральных компонент (гармоник);

$f_m$ — фиксированные частоты;

$A_m$ и $\varphi_m$ — амплитуда и начальная фаза $m$-й гармоники.

Формирование $A_m$ и $\varphi_m$ было выполнено в соответствии с законом нормального распределения. Для этого первоначально на основе реальных данных были рассчитаны средние и СКО $A_m$, а также $\varphi_m$. При этом диапазон изменения был ограничен минимумом и максимумом величин амплитуды и начальной фазы реальных данных. Пример графиков участков сигналов во временной области представлены на рис. 2.

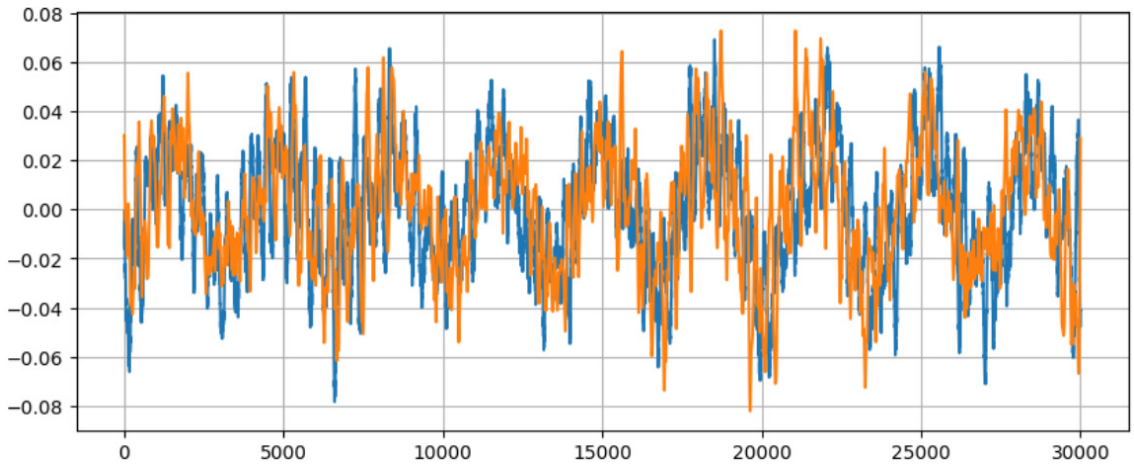



*Рис. 2. Сравнение исходного и сгенерированного сигналов*

На рисунке видно, что сгенерированный временной ряд в большей степени соответствует как амплитудным, так и фазовым значениям исходного сигнала.

Адекватность полученного сигнала была оценена с помощью статистических и спектральных показателей, таких как СКО, спектральная косинусная близость, а также построения квантильного графика (Q-Q plot).

Q-Q plot представляет собой график, на котором квантили одного распределения сравниваются с квантилями другого. В данной работе рассмотрен случай сопоставления квантилей реальных и сгенерированных данных. Если выборки происходят из того же распределения, тогда график является линейным.

Рассчитанное СКО составило 0,0225 м/с$^2$ для реального сигнала и 0,0223 м/с$^2$ для искусственного, что свидетельствует о достижении статистической близости с параметрами исходного физического процесса.

Построение графика Q-Q также подтвердило близость двух сигналов (см. рис. 3).

Значение спектральной косинусной близости составило 0,9582, что также продемонстрировало значительное сходство сигналов в частотном представлении.

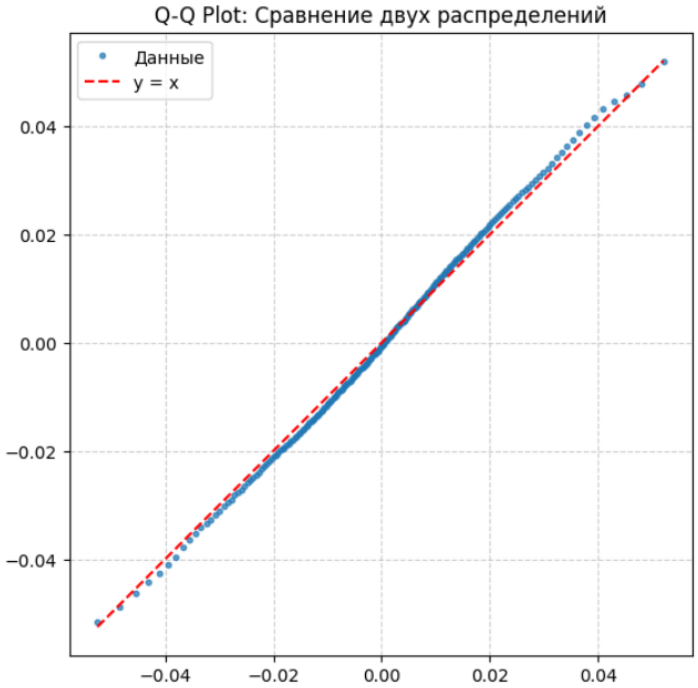



*Рис. 3. Квантиль-квантиль график*

Верификация комплекса характеристик подтвердила репрезентативность синтезированного сигнала относительно исходных данных.

## Заключение

Экспериментальные результаты подтвердили осуществимость моделирования технологических стохастических процессов непрерывной разливки стали.

Полученная модель может составить основу для верификации методов идентификации аномальных состояний промышленных сигналов.

## Литература

1. *Kochergin V.* Optimization of technical monitoring processes / V. Kochergin, D. Plotnikov, A. Ilinykh, S. Glushkov // Transportation Research Procedia. – 2021. – Vol. 54. – P. 166–172.

2. *Zhao C.* Condition-driven data analytics and monitoring for wide-range nonstationary and transient continuous processes / C. Zhao, J. Chen, H. Jing // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. – 2020. – Vol. 18, No 4. – P. 1563–1574.

3. *Chakraborty A.* Vision-based detection system of slag flow from ladle to tundish with the help of the detection of undulation of slag layer of the tundish using an image analysis technique / A. Chakraborty, J. Ghose, S. Chakraborty, B. Chakraborty // Ironmaking & Steelmaking. 2022. Vol. 49, No 1. P. 10–15.

4. *Poleshchenko D. A.* Criteria for early detection of slag in steel casting / D. A. Poleshchenko, A. V. Korenev, Y. A. Kovrizhnykh // Metallurgist. – 2024. – Vol. 68, No 7. – P. 951–960.

5. *Полещенко Д. А.* Разработка метода раннего распознавания шлака сталеразливочного ковша машины непрерывного литья заготовок / Д. А. Полещенко, А. В. Коренев // Управление большими системами: сборник трудов. – 2024. – № 107. – С. 121–141.

УДК 004.9

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕЛЯЦИОННОЙ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ НАУЧНЫХ ПЛАТФОРМ

**А. В. Поначугин, В. В. Фот**

*Нижегородский государственный педагогический университет им. Козьмы Минина*

**Аннотация.** В статье рассматриваются основные принципы проектирования и создании реляционной базы данных, которая используется в платформе для организации научных исследований студентов, научных руководителей и организаций. Особо следует обратить внимание на нормализацию данных, построению необходимых связей между таблицами. Представлены способы, которые направлены на поддержку высокой скорости проверки и обработки данных, реализована надёжная сохранность данных, а также увеличение объемов научной платформы в условиях возрастания количества пользователей и проектов.
**Ключевые слова:** база данных, SQL-запросы, нормализация данных, PostgreSQL, производительность системы, хранение данных.

## Введение

Современная цифровая среда требует создание необходимых условий для реализации платформы для организации научных исследований студентов. С каждым годом растет объем данных в системах, что является проблемой для современных платформ. В таких средах ежедневно обрабатываются множество запросов, которые связаны с регистрацией пользователей, публикацией каких-либо материалов, хранение результатов исследований и отчетов. Для контроля и обеспечения стабильности работы платформы нужно создать реляционную базу данных и реализовать оптимизированные запросы, которые позволяют достичь большей эффективности и надёжности системы.

## 1. Выбор предметной области

Создание реляционной базы данных начинается с выбора предметной области, а также выделения основных сущностей в ней, ведь в дальнейшем они будут отражать логическую структуру научной платформы. К ним относятся пользователи (студенты, научные руководители и организации), проекты, публикации, комментарии, чаты и файлы. Начало происходит с этапа моделирования, на котором важно не только описать отношения между таблицами, но и исключить копирование данных, это достигается при помощи нормализации. Использование форм позволяет снизить возможность изменений при обновлении или утечки данных, помогая обеспечить сохранность информационной структуры.

Оптимизирование базы данных не может существовать без индексации. Индексы делают эффективным выполнение запросов при фильтрации и сортировки больших объемов данных. Стоит учесть, что чрезмерное использование индексов может негативно влиять на скорость записи, поэтому важно искать равновесие между скоростью и временем обновления используемых таблиц. В нынешних информационных системах, которые используют такие СУБД как PostgreSQL или MySQL, применяются составные, частичные и полнотекстовые индексы, ведь они повышают гибкость обработки данных в зависимости от обрабатываемой информации.

Стоит упомянуть проектирование схемы данных, ведь после выбора предметной области нужно узнать ключевые таблицы и отношения между ними. Например, таблица пользователей будет содержать поля, необходимые для идентификации участника данной системы (имя, роль, id). Таблица проект будет включать такие поля, как название проекта, его краткое описание, список участников, а также дата начала и окончания проекта. Связи между данными

таблицами оснащаются путем добавления ключей, которые позволяют связать данные пользователей с их проектами, публикациями и тому подобное.

Кроме выше сказанного, необходимо учитывать потенциальные изменения в структуре данных. Если же база данных будет разрабатываться для долгосрочного использования, то рекомендуется предусмотреть возможности для расширения модели данных, ведь это позволит добавлять новые связи и сущности, которые не требуются значительных переделок существующей инфраструктуры. Один из подходов данного направления является создание схем данных, где каждая часть представлена абстрактной моделью, которая будет способна адаптироваться к разным требованиям данной предметной области. Данный подход помогает избежать проблем связанный с масштабируемостью и обеспечивает перспективу легкого внесения изменений в будущем.

## 2. Оптимизация SQL-запросов

Одни из важных направлений является оптимизация SQL-запросов. Не редко причиной снижения эффективности является чрезмерное использование подзапросов или неверная организация объединения таблиц (JOIN). [1-3] Для того, чтобы информационная система эффективно работает следует учесть, что база данных будет использовать аналитические функции, необходимо ограничивать выборку только необходимыми полями и использовать для анализа планы выполнения запросов при помощи таких инструментов как: EXPLAN и ANALYZE. Данный метод поможет выявлять «узкие места» в базе данных и помогает повысить скорость отклика информационной системы.

Важным аспектом для ускорения работы информационной системы помогает кэширование, которое часто используется с большим объемом данных. Оно позволяет уменьшить нагрузку на сервер и повысить отказоустойчивость системы. Самыми популярными решениями в этом движении становятся Redis и Memcached, которые обеспечивают сохранность временных данных в оперативной памяти. Кэширование также полезно для страниц с большой частотой обращений, например, списков проектов или аккаунтов пользователей.

Для того чтобы обеспечить стабильность работы научной платформы необходимо продумать способы резервного копирования и восстановления данных, ведь потеря какой-либо информации может привести к ущербам полученных результатов исследований, следовательно, регулярное создание резервных копий и повторении данных на несколько рабочих серверов являются неотъемлемыми элементами архитектуры.

Помимо оптимизации самих запросов, необходимо понимать, что настройка конфигурации сервера баз данных имеет важное значение в данной сфере. Параметры, например, размер буферного кэша, количество соединений, а также стратегия параллельного выполнения запросов, оказывают большое влияние на производительность. Правильно созданная конфигурация позволяет устранить задержки и ускорить пропускную способность системы. Регулярное обновление программного обеспечения и его драйвера помогает повышению производительности, ведь разработчики часто выпускают различные патчи и улучшения, которые будут направлены на повышение стабильности и скорости работы.

Еще одним способом улучшения производительности становится вертикальное и горизонтальное масштабированием. Начнем с вертикального масштабирования, ведь оно предполагает увеличение количество ресурсов отдельного сервера, таких как процессор, оперативная память и диски, тогда как горизонтальное масштабирование предполагает распределение всей нагрузки между несколькими серверами. Данные подходы имеют как преимущества, так и недостатки, и выбор оптимального метода также зависит от особенностей используемой системы и ожидаемой нагрузки. Например, для маленьких проектов хватает вертикального мас-

штабирования, но крупные системы требуют большего подхода с использованием различных кластеров и репликации данных.

### 3. Расширение информационной системы

При создании реляционной базы данных необходимо также учитывать и способность расширения информационной системы, ведь с увеличением количества пользователей на платформе и большим объемом проектов возрастает нагрузка на базу данных, поэтому нужно заблаговременно предусмотреть создание горизонтального и вертикального масштабирование, а также включение распределённых систем хранения информации. Например, система PostgreSQL может поддерживать репликацию и шардинг, что делает возможным успешную работу платформы даже при больших объемах данных [5].

Современные научные платформы постепенно становятся не обычным инструментам при хранении данных, но также и полноценными система анализа информации. Успешная база данных помогает использовать накопленные сведения для создания статических отчетов, поиска закономерностей и прогнозирования результативности научных проектов. [4] С помощью автоматизированных запросов можно создать интеллектуальные функции. Например, поиск, по ключевым словам, а также фильтрация по направлению исследований (биология, информатика, химия) и формирование статистики участников, ведь это расширит аналитические возможности информационной системы и создает ценность не только для студентов, но также для компаний и научных руководителей.

Одним из перспектив развития современных научных платформ становится интеграция технологий машинного обучения, а также искусственного интеллекта. Данные технологии помогают автоматизировать и оптимизировать процессы анализа данных, выявить скрытые зависимости и прогнозировать результаты исследований. Например, различные алгоритмы машинного обеспечения могут требоваться для автоматической классификации публикаций по различным тематикам, рекомендации статей и проектов пользователей на основе их предпочтения и их предыдущих действий. Данные инструменты будут значительно упрощать навигацию по большему трафику данных и помогать педагогам или студентам быстрее находить нужные данные [6].

Другое же направление, связанное с расширением функциональности, имеет отношение с поддержкой междисциплинарных исследований. На данный момент научные проблемы часто требуют использование знаний из различных областей науки, ведь это требует соответствующих механизмов использования внутри информационной системы. Создание специализированных интерфейсов и платформ, поддерживающих передачу информации между различными дисциплинами, является необходимым условием успешного функционирования современной научной платформы. Использование открытых данных и стандартов метаданных играет огромную роль в обеспечении совместного доступа информации для большого круга исследователей.

## Заключение

Отсюда следует, что оптимизация запросов и создании реляционной базы данных является основными этапами при проектировании научной платформы. От результативности этих процессов зависит скорость работы системы, удобство пользователей и устойчивость платформы к нагрузкам. Грамотно спроектированная архитектура реляционной базы данных содействует не только повышению производительности, но и создании надежной основы для развития цифровых решений в сфере современного образования и науки.

**Литература**

1. *Акатьев Я. А.* Построение алгоритма выбора оптимальной нормальной формы при проектировании реляционных баз данных / Я. А. Акатьев, Д. Д. Бабынина, А. В. Яковчук // Научный аспект. – 2024. – Т. 38, № 1. – С. 4934-4943. – EDN JWGZOC.

2. *Ильичев В. Ю.* Обзор средств оптимизации реляционных баз данных на примере СУБД MySQL / В. Ю. Ильичев, В. Е. Драч, А. Н. Мельникова // Системный администратор. – 2024. – № 3(256). – С. 92-95. – EDN CXDYCQ.

3. *Конде А. К.* Оптимизация запросов в реляционных базах данных / А. К. Конде // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. – 2024. – № 7. – С. 103-107. – DOI 10.37882/2223-2966.2024.7.22. – EDN DJVCIN.

4. *Поначугин А. В.* Влияние цифровой трансформации на управление проектами / А. В. Поначугин, В. А. Соколов // Век качества. – 2023. – № 2. – С. 114-129. – EDN NUERHI.

5. *Ульянов Е. А.* Перенос данных из XML в реляционную базу данных SQL / Е. А. Ульянов // Постулат. – 2024. – № 6(104). – EDN HQISXN.

6. *Шиганова М. В.* Особенности внедрения мобильных платформ в сфере технического образования / М. В. Шиганова, Н. А. Романова, С. В. Болдин // Информационные технологии в организации единого образовательного пространства : сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции преподавателей, студентов, аспирантов, соискателей и специалистов, Нижний Новгород, 01–31 декабря 2017 года / Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина. – Нижний Новгород : федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина», 2017. – С. 13-17. – EDN ZXUYCP.

УДК 519.8

# НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ БАРЬЕРНЫХ ОПЦИОНОВ

**Д. В. Постолова**

*Южный федеральный университет*

**Аннотация.** В работе рассматриваются современные подходы к численному решению уравнений в частных производных, описывающих ценообразование финансовых деривативов. Основное внимание уделено использованию искусственных нейронных сетей (ИНС) для аппроксимации решения уравнения Хестона, применяемых при вычислении цен барьерных опционов. Предлагается алгоритм, позволяющий учитывать граничные условия барьерного типа с использованием сглаживающих функций. Проводится численная реализация модели, основанной на архитектуре однослойной нейронной сети, и проводится сравнение с методом Монте-Карло. Результаты демонстрируют высокую точность и устойчивость нейросетевого метода.

**Ключевые слова:** барьерные опционы, модель Хестона, искусственные нейронные сети, стохастическая волатильность, нейросетевые методы ценообразования опционов, финансовая математика, численные решения, автоматическое дифференцирование, уравнения в частных производных, прогнозирование цен финансовых активов.

## Введение

В последние годы нейросетевые методы в задачах прогнозирования цен активов получили широкое распространение в финансовой математике. Эти подходы позволяют моделировать нелинейные зависимости и выявлять скрытые паттерны в динамике рынков, что делает их особенно ценными в условиях высокой волатильности и неопределенности. В отличие от традиционных статистических моделей, таких как ARIMA или GARCH, нейронные сети способны обеспечивать более высокую точность предсказаний и адаптироваться к изменяющейся рыночной среде.

Ряд современных исследований подтверждает эффективность глубоких архитектур в данной области. Так, в работе [1] продемонстрировано применение сверточных и рекуррентных нейронных сетей для прогнозирования краткосрочных колебаний цен на рынке криптовалют. Авторы подчеркивают сложность моделирования цифровых активов классическими методами и показывают, что нейросети значительно превосходят традиционные подходы по точности.

Важным направлением является разработка гибридных архитектур. В исследовании [2] предложена комбинация CNN и LSTM, позволяющая извлекать как пространственные, так и временные признаки из данных. Эксперименты подтвердили, что такой подход обеспечивает более высокую точность прогнозирования по сравнению с использованием отдельных архитектур. Подобные результаты свидетельствуют о необходимости комплексных решений для анализа финансовых временных рядов.

На фоне быстрого роста объемов данных классические методы машинного обучения, такие как случайный лес или градиентный бустинг, уступают место глубоким архитектурам. В обзоре [3] особое внимание уделяется трансформерам, которые изначально разрабатывались для обработки текста, но показали высокую эффективность и в прогнозировании цен активов. Их ключевое преимущество связано с механизмом самовнимания, позволяющим учитывать значимые временные зависимости.

Еще один важный аспект связан с интерпретируемостью моделей. В работе [4] рассматриваются методы объяснимого искусственного интеллекта (XAI), включая LIME и SHAP, приме-

ненные к LSTM-сетям. Авторы отмечают, что высокая точность глубоких моделей должна сопровождаться прозрачностью и объяснимостью, что особенно актуально в условиях строгого финансового регулирования.

Устойчивость нейросетевых моделей в условиях высокой неопределенности исследуется в работе [5], где предложена гибридная архитектура LSTM-Transformer. Авторы подчеркивают, что данный подход демонстрирует высокую точность даже в условиях пандемий и геополитических кризисов, что делает его особенно актуальным для практического применения.

Нейросетевые методы становятся ключевым инструментом в современной финансовой математике. Они не только обеспечивают высокую точность прогнозов, но и позволяют адаптироваться к условиям нестабильности, учитывать сложные межрыночные связи и обеспечивать интерпретируемость результатов. Разработка гибридных архитектур и внедрение методов XAI формируют новое направление в области прогнозирования цен активов, которое продолжает активно развиваться и демонстрирует высокий практический потенциал.

## 1. Постановка задачи

Модель Хестона является одной из наиболее популярных стохастических моделей волатильности, применяемых для оценки деривативов. В отличие от классической модели Блэка-Шоулза [6], где волатильность постоянна, в модели Хестона она подчиняется стохастическому процессу, что позволяет учитывать реальные рыночные эффекты, включая «эффект улыбки волатильности» [7]. Динамика цены базового актива $S_t$ и его дисперсии $v_t$ описывается системой стохастических дифференциальных уравнений (1).

$$\left\{\begin{aligned} d_t &= \mu_t S dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S, \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\, dW_t^v, \\ dW_t^S W_t^v &= pdt, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\mu$ — средняя доходность актива,

$\kappa$ — скорость возврата волатильность к среднему значению $\theta$,

$\sigma$ — коэффициент волатильности самой волатильности («vol-of-vol»),

$W_t^S W_t^v$ — винеровские процессы.

Из этой системы можно вывести дифференциальное уравнение в частных производных (PDE) для цены опциона $u(S,v,t)$ (2).

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} vS^2 \frac{\partial V}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial V}{\partial v} - rV = 0. \tag{2}$$

Барьерные опционы предъявляют дополнительные требования. Для барьерного колл-опциона с верхним барьером $H$ необходимо наложить граничное условие $u(H,v,t) = 0, \forall t \in [0,T]$. Это условие отражает полное обнуление стоимости опциона при достижении барьера. Для малых значений цены актива $S \to 0$ также накладывается граничное условие $u(0,v,t) = 0$. Граничные условия в сочетании с сильными градиентами вблизи барьера создают сложности для традиционных сеточных методов численного решения PDE, так как резкие изменения функции могут приводить к нестабильности и потере точности.

Таким образом, задача заключается в построении численной модели, которая способна аппроксимировать решение уравнения Хестона для барьерного опциона с сохранением начальных и граничных условий. При этом требуется корректное поведение функции вблизи барьера и малых значений актива, а также высокая точность на всей области определения. Эффективное решение задачи должно позволять рассчитывать цену барьерных колл-опционов с учётом случайной волатильности, избегая ограничений традиционных сеточных методов,

и демонстрировать согласие с результатами, полученными классическими методами, такими как, например, метод Монте-Карло.

## 2. Модель Хестона и нейросетевая аппроксимация

Для численного решения уравнения Хестона с барьерным колл-опционом использовалась нейросетевая модель на основе полносвязной сети с сигмоидной функцией активации. Выбор такой архитектуры обоснован теоремой Цыбенко, которая утверждает, что один скрытый слой с нелинейной активацией способен аппроксимировать любую непрерывную функцию на компактном подмножестве $R^n$ с произвольной точностью [8].

Сетевая архитектура включает 64 нейрона в скрытом слое и линейный выходной слой с одним нейроном, выдающим приближённое значение цены опциона.

Модель аппроксимирует функцию $u(x, v, \tau)$, зависящую от трёх переменных: логарифма цены актива $x = \log S$, мгновенной дисперсии v и оставшегося времени до экспирации $\tau = T - t$. Все необходимые производные для подстановки в уравнение Хестона вычисляются с помощью автоматического дифференцирования (3).

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial v}. \tag{3}$$

Стандартная функция выплат колл-опциона $(e^x - K)_+$ не является дифференцируемой в точке $x = \log K$. Для корректного обучения нейросети используется её сглаженная версия (4).

$$f(x) = (e^x - K) \cdot \sigma(\alpha(e^x - K)),\ \sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}},\ \alpha >> 1. \tag{4}$$

Функция потерь модели (5) является взвешенной суммой трёх компонентов: ошибки выполнения уравнения $L_{PDE}$ (6), ошибки начального условия $L_{IC}$ (7) и ошибки на барьере $L_{barrier}$ (8).

$$L_{total} = \lambda_{PDE} \cdot L_{PDE} + \lambda_{IC} \cdot L_{IC} + \lambda_{barrier} \cdot L_{barrier}, \tag{5}$$

где

$$L_{PDE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left( -\frac{\partial u}{\partial \tau_i} + \left( r - \frac{1}{2} v_i \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \kappa(\theta - v_i) \frac{\partial u}{\partial v_i} + \frac{1}{2} v_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial v_i} - r u_i \right)^2, \tag{6}$$

$$L_{IC} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (u(x_i, v_i, \tau = T) - (e^{x_i} - K)_+)^2, \tag{7}$$

$$L_{barrier} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{R} (u(x_i = \log H, v_i, \tau_i))^2. \tag{8}$$

Обучение модели проводилось на 150 000 итераций с использованием оптимизатора Adam (lr = $10^{-3}$, weight_decay = $10^{-5}$) и планировщика уменьшения шага при отсутствии прогресса по функции потерь (рис. 1).

## 3. Численные эксперименты

Для оценки качества предложенной нейросетевой модели была проведена серия численных экспериментов с последующим сравнением результатов с эталонным методом Монте-Карло. Целью экспериментов являлась проверка точности аппроксимации цены барьерного опциона в модели Хестона и оценка способности нейросети воспроизводить нелинейные зависимости между параметрами.

Для тестирования использовались значения начальной цены базового актива $S_0$ из диапазона [0.5, 1.6] с шагом 0.05. Для каждого значения $S_0$ рассчитывались следующие показатели:

– $V_{MC}$ — цена опциона, вычисленная методом Монте-Карло при 100 000 симуляциях;

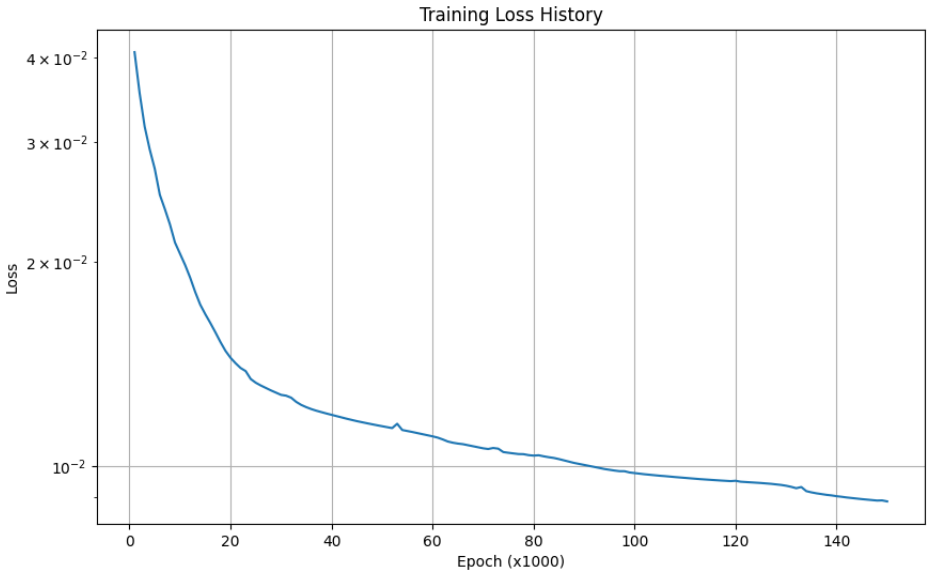



*Рис. 1. График ошибки обучения*

– $V_{NN}$ — цена опциона, предсказанная обученной нейросетевой моделью;
– абсолютная ошибка $|V_{NN} - V_{MC}|$.
Визуальное сравнение распределений цен представлено на рис. 2.

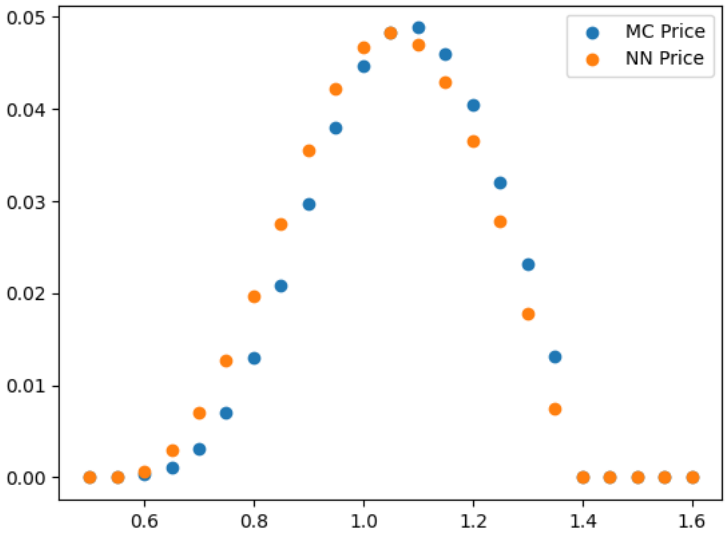



*Рис. 2. График сравнения цен, рассчитанных методом Монте-Карло и ИНС*

После обучения и тестирования модели была проведена количественная оценка точности аппроксимации с использованием стандартных метрик регрессии.

Коэффициент детерминации $R^2 = 0.966294$, близкий к единице, свидетельствует о высокой степени согласованности между предсказаниями модели и эталонными результатами метода Монте-Карло. Средняя абсолютная ошибка (MAE) показывает, что в среднем нейросетевая модель отклоняется от референсных значений менее чем на 0.0023, а низкое значение RMSE = 0.003341 подтверждает отсутствие значительных ошибок на отдельных участках тестовой выборки.

## Заключение

В работе был предложен и реализован нейросетевой подход к решению задачи ценообразования барьерных опционов в модели Хестона. В отличие от классических численных методов,

таких как метод Монте-Карло, предлагаемый подход основан на прямой аппроксимации решения уравнения в частных производных с использованием искусственных нейронных сетей. Это позволяет одновременно учитывать начальные и граничные условия, а также сложную стохастическую динамику волатильности.

Результаты численных экспериментов показали, что разработанная нейросетевая модель способна точно воспроизводить значения цен барьерных опционов, полученные методом Монте-Карло. Предложенный метод обладает рядом преимуществ: он позволяет существенно сократить время вычислений после обучения сети, легко адаптируется к различным типам граничных условий и может быть обобщён на другие классы производных финансовых инструментов. Таким образом, нейросетевые методы представляют собой перспективное направление для ускоренного численного решения задач финансовой математики, особенно в случаях, когда традиционные аналитические или численные методы оказываются неэффективными.

Дальнейшее развитие работы может быть связано с исследованием устойчивости модели при изменении параметров волатильности, расширением архитектуры сети за счёт использования рекуррентных или свёрточных слоёв, а также применением подходов PINN для более строгого включения динамики стохастических процессов в функцию потерь.

**Литература**


1. *Akouaouch I.* A new deep learning approach for predicting high-frequency short-term cryptocurrency price / I. Akouaouch, A. Bouayad // Bulletin of Electrical Engineering and Informatics. – 2025. – Vol. 14. – P. 513–523.

2. *Assis C.* Hybrid deep learning approach for financial time series classification / C. Assis, E. Jabbur Machado, A. Pereira, E. Carrano // Revista Brasileira de Computacao Aplicada. – 2018. – Vol. 10. – P. 54–63.

3. *Bahoo S.* Artificial intelligence in finance: a comprehensive review through bibliometric and content analysis / S. Bahoo, M. Cucculelli, X. Goga, J. Mondolo // SN Business & Economics. – 2024. – Vol. 4.

4. *Muhammad D.* An explainable deep learning approach for stock market trend prediction / D. Muhammad, I. Ahmed, K. Naveed, M. Bendechache // Heliyon. – 2024. – Vol. 10.

5. *Kabir M.* LSTM-Transformer-Based Robust Hybrid Deep Learning Model for Financial Time Series Forecasting / M. Kabir, D. Bhadra, M. Ridoy, M. Milanova // Sci. – 2025. – Vol. 7.

6. *Black F.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, № 3. – P. 637–654.

7. *Heston S. L.* A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options / S. L. Heston // Review of Financial Studies. – 1993. – Vol. 6, № 2. – P. 327–343.

8. *Cybenko G.* Approximation by superpositions of a sigmoidal function / G. Cybenko // Mathematics of Control, Signals and Systems. – 1989. – Vol. 2, № 4. – P. 303–314.

9. *Postolova D. V.* Improving the Interpretability of Artificial Neural Networks Using the Example of the Pricing Options Problems / D. V. Postolova, O. E. Kudryavtsev // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2024. – Vol. 69, № 10–12. – P. 417–427.

10. *Постолова Д. В.* О повышении интерпретируемости искусственных нейронных сетей на примере задач вычисления цен опционов / Д. В. Постолова, О. Е. Кудрявцев // Информационные процессы. – 2024. – Т. 24, № 4. – С. 405–420.

УДК 519.673

# АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ SMC-СЕТКИ С АДАПТИВНЫМ УТОЧНЕНИЕМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО РЕЖИМА АЗОВСКОГО МОРЯ

**С. В. Проценко**

*Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ)*

**Аннотация.** В статье представлен новый алгоритм генерации сферических мультиячеистых сеток (Spherical Multiple-Cell, SMC) для моделирования ветрового волнения в прибрежных акваториях. Разработанный алгоритм использует рекурсивную процедуру и предоставляет два метода уточнения: классический метод прибрежного уточнения и расширенный метод уточнения произвольных областей, задаваемых замкнутыми кривыми. Это позволяет гибко управлять разрешением расчетной сетки, концентрируя вычислительные ресурсы в зонах, наиболее важных для точности моделирования. Алгоритм апробирован путем построения 6-уровневой SMC-сетки для Азовского моря. Верификация результатов моделирования, выполненного в модели WAVEWATCH III, показала хорошее согласие с данными натурных наблюдений. Средняя ошибка расчетных значений значительной высоты волны не превышает 15 см. Предложенный подход демонстрирует существенные преимущества по сравнению с использованием регулярных сеток, особенно на мелководных акваториях со сложной батиметрией.

**Ключевые слова:** сферические мультиячеистые сетки, SMC-сетка, алгоритм генерации сеток, WAVEWATCH III, модель ветрового волнения, Азовское море, прибрежное уточнение, гидродинамическое моделирование, верификация модели, значительная высота волны, батиметрия, зональное уточнение, рекурсивный алгоритм, волновой режим, прогнозирование волнения.

## Введение

Современное прогнозирование ветрового волнения и моделирование гидродинамических процессов в прибрежных акваториях сталкивается с фундаментальным вызовом, заключающимся в необходимости совмещения высокой точности расчётов с приемлемыми вычислительными затратами. Сложность батиметрии, динамичная береговая линия, а также процессы рефракции и дифракции требуют использования расчетных сеток с высоким пространственным разрешением в прибрежной зоне, в то время как для глубоководных районов достаточно более крупных ячеек [1, 2]. Классические подходы к решению этой проблемы, такие как использование вложенных сеток (nesting), неструктурированных треугольных сеток или полностью адаптивных методов, несмотря на свою популярность, зачастую обладают существенными недостатками [3, 4]. К ним относятся сложность реализации и управления, громоздкая пред- и постобработка данных, а также жесткие ограничения на шаг интегрирования, обусловленные наличием ячеек минимального размера [5].

Перспективным направлением, позволяющим эффективно управлять разрешением, являются сферические мультиячеистые сетки (Spherical Multiple-Cell, SMC), изначально предложенные Ли [6, 7]. Данный подход использует иерархическую структуру ячеек, размер которых изменяется в геометрической прогрессии, и компактные схемы адвекции, что делает SMC-сетки мощным инструментом для оперативных моделей прогнозирования волнения [8]. В отличие от неструктурированных сеток, SMC сохраняет логику структурированной сетки (массив индексов), что упрощает распараллеливание и организацию вычислений, особенно в глобальных моделях, таких как WAVEWATCH III [9].

Однако, широкое внедрение и адаптация SMC-сеток для региональных исследований, в частности для морей с развитой береговой линией, таких как Азовское море, сдерживаются

отсутствием удобных и гибких инструментов их генерации. Существующие решения, такие как стандартная утилита в составе WAVEWATCH III или инструментарий от Метеорологического бюро Великобритании, предлагают лишь ограниченные, предопределённые конфигурации с глобальным или фиксированным прибрежным уточнением [10]. Альтернативные инструменты, например, пакет от Darnton and Salter [11], предоставляют базовые функции для уточнения прямоугольных областей, но требуют от пользователя самостоятельной разработки основной логики генератора и не обладают достаточной гибкостью для создания сеток со сложной геометрией уточнения.

Таким образом, актуальной задачей является разработка алгоритма, который бы не только автоматизировал процесс построения SMC-сеток, но и предоставил исследователю инструмент для гибкого управления зонами уточнения в произвольных областях, выходя за рамки простого прибрежного измельчения.

В данной статье представлен новый алгоритм генерации SMC-сетки, основанный на рекурсивной процедуре и предлагающий два метода уточнения: классический метод уточнения прибрежной зоны и расширенный метод уточнения произвольных областей, задаваемых замкнутыми кривыми. Целью работы является демонстрация возможностей алгоритма для построения расчётной сетки Азовского моря, верификация результатов моделирования волновых параметров по данным натурных наблюдений и оценка гибкости предложенного подхода. Разработанный метод устраняет ключевое ограничение существующих инструментов, позволяя целенаправленно повышать разрешение в районах с ожидаемой сложной волновой динамикой, например, вблизи портовой инфраструктуры или на мелководных акваториях.

## 1. Алгоритм генерации мультиячеистой SMC-сетки

### *1.1. Основные принципы и определения*

Сферическая мультиячеистая сетка (SMC) представляет собой иерархическую структуру, состоящую из вложенных прямоугольных ячеек, размер которых изменяется в геометрической прогрессии с коэффициентом 2. Данный подход позволяет эффективно управлять разрешением расчетной области, концентрируя мелкие ячейки в регионах, требующих детального моделирования (прибрежная зона, мелководья), и используя крупные ячейки для глубоководных акваторий [6, 7]. Формально определим базовые понятия.

Уровень сетки $(N)$ — целочисленный параметр, определяющий размер ячейки. Минимальной длине стороны ячейки (наивысшее разрешение) присваивается уровень 1 и размер, условно равный 1.

Размер ячейки $N$-го уровня определяется как

$$L_N = 1 + 2 + 4 + ... + 2^{N-2}.$$

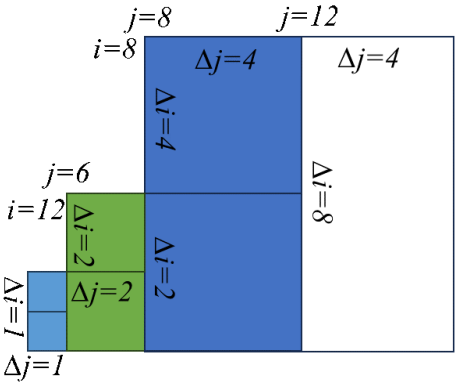



*Рис. 1. 4-уровневая уточненная SMC-сетка*

Таким образом, 4-уровневая SMC-сетка будет состоять из ячеек с длинами сторон 1, 2, 4 и 8.

Базовая сетка (Base Grid) — самая крупная ячейка в иерархии, формирующая каркас расчетной области.

Иерархическая структура 4-уровневой прибрежной уточненной SMC-сетки схематично представлена на рис. 1. Ключевым ограничением, обеспечивающим корректность расчетов и устойчивость численных схем, является плавное изменение размеров соседних ячеек. SMC-сетка может масштабироваться только в соотношении 1:1 (соседние ячейки одного уровня) или 1:2 (ячейка граничит с ячейкой вдвое большего или меньшего размера) [9].

### *1.2. Рекурсивный алгоритм построения сетки*

Для автоматизированного построения SMC-сетки, удовлетворяющей заданным ограничениям, был разработан алгоритм, основанный на рекурсивной процедуре деления. Алгоритм принимает на вход данные о батиметрии с разрешением, соответствующим минимальной ячейке (1-й уровень), и последовательно обрабатывает область, начиная с базовой сетки.

Процесс генерации управляется следующими ограничениями:

1. Масштабирование — дочерняя ячейка может быть создана только с уровнем, на единицу превышающим уровень родительской ячейки.

2. Глубина — ячейка должна быть исключена (помечена как «суша»), если ее глубина меньше критического значения, заданного в модели WW3.

3. Пристенное ограничение — для обеспечения корректного разрешения вблизи береговой линии введен концепт «ограниченного радиуса». В пределах этого расстояния от суши запрещено наличие ячеек с уровнем, отличным от 1. Ограниченный радиус $R_{lim}$ для $N$-уровневой сетки рассчитывается по формуле:

$$R_{lim} = \sum_{k=0}^{N-2} 2^k = 2^{N-1} - 1.$$

Алгоритм, схема которого представлена на рис. 2, реализуется следующим образом:

1. Инициализация.

В качестве начального элемента принимается базовая сетка, покрывающая всю модельную область.

2. Проверка ограничений.

Для текущей ячейки проверяется выполнение условий (1-3).

3. Рекурсивное деление.

Если ячейка не удовлетворяет ограничениям, она помечается к разделу на четыре дочерние ячейки следующего уровня. Для каждой из этих дочерних ячеек рекурсивно вызывается та же процедура проверки и деления.

4. Завершение.

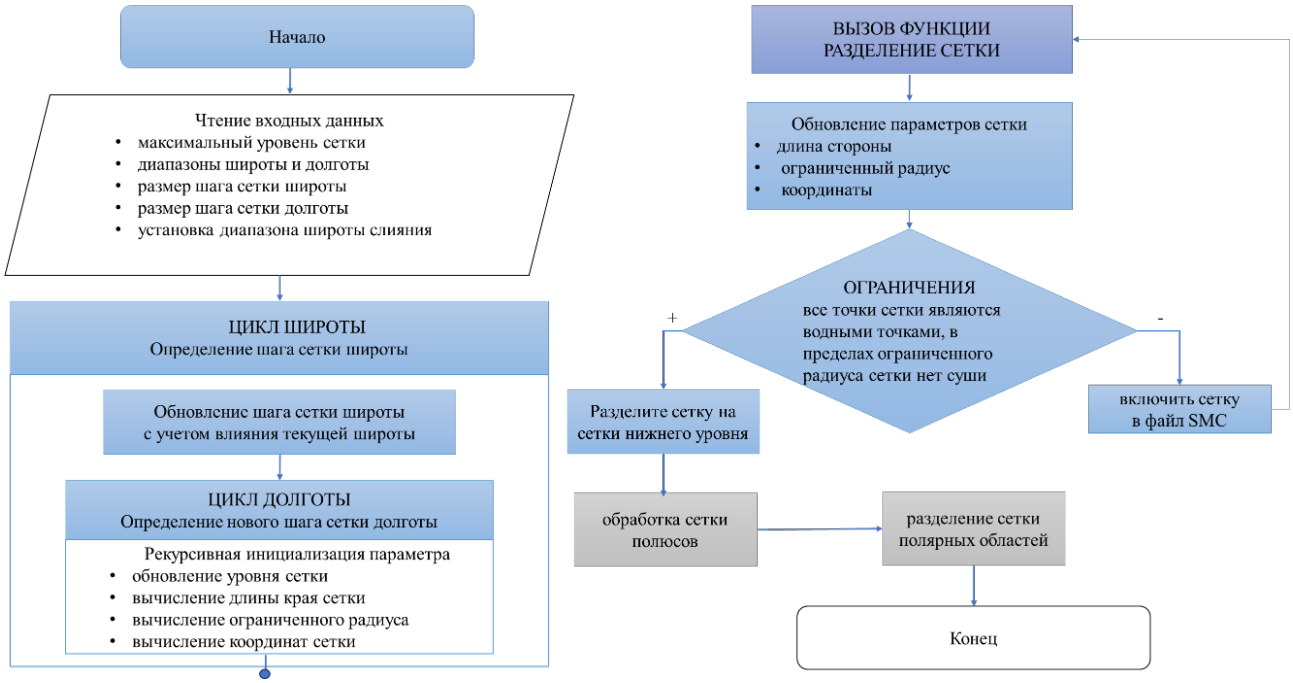



*Рис. 2. Алгоритм организации рекурсивного циклического прибрежного уточнения*

Процесс завершается, когда для всех ячеек ограничения выполнены либо дальнейшее деление невозможно. Результирующий набор ячеек записывается в файл сетки для его последующего использования. Данный рекурсивный подход обеспечивает полный охват области без пропусков и наложений, гарантируя при этом соблюдение всех физических и численных ограничений.

### *1.3. Методы уточнения сетки*

Для повышения гибкости алгоритма были реализованы два метода уточнения: классический прибрежный и расширенный — для произвольных областей.

Метод прибрежного уточнения является базовым и использует в качестве основного критерия для деления ячеек расстояние до береговой линии в сочетании с ограниченным радиусом $R_{lim}$. Это обеспечивает автоматическое повышение разрешения вблизи сложной береговой черты.

Метод уточнения произвольной области был разработан для целенаправленного уточнения сетки в специфических акваториях (устьевые области, зоны морских сооружений, пути судоходства).

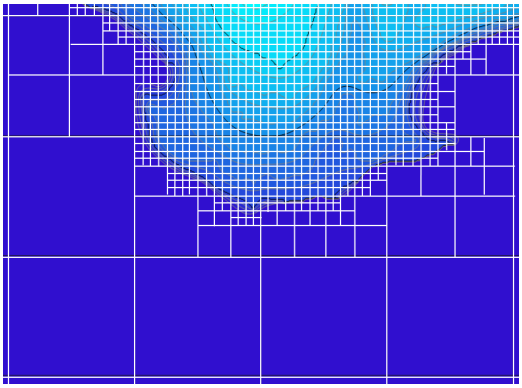


*Рис. 3. Схема использования кривых для уточнения сетки*

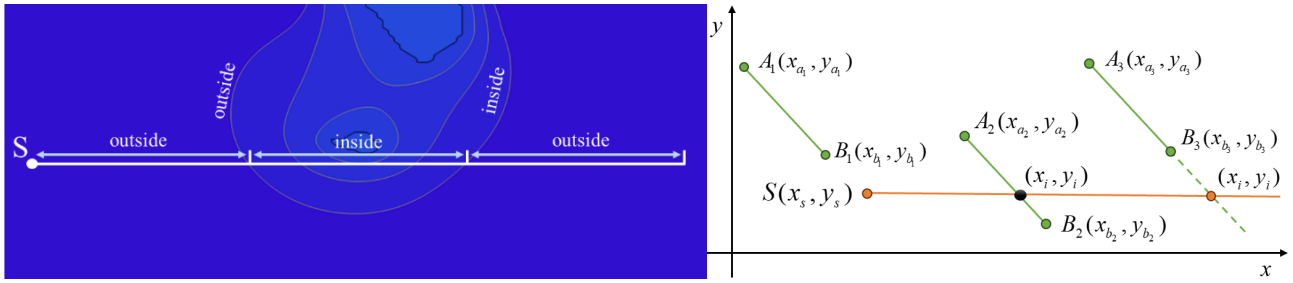



*Рис. 4. Лучевой метод, используемый для определения того, находится ли точка внутри кривой*

Логика алгоритма адаптирована следующим образом: ячейка $N$-го уровня должна находиться внутри области, ограниченной кривой $N$-го уровня, и при этом вне области, ограниченной кривой $(N-1)$-го уровня. Базовая сетка должна находиться вне любого контура уточнения. Если кривая пересекает ячейку, последняя считается принадлежащей зоне уточнения. Для обеспечения корректной работы иерархии контуров и соблюдения условия плавного изменения размеров ячеек (1:2) наложены дополнительные ограничения: контуры не могут пересекаться, контур уровня $(N-1)$ должен быть полностью заключен внутри контура уровня $N$, минимальное расстояние между контурами уровней $N$ и $(N-1)$ должно превышать длину стороны ячейки уровня $N$.

Для определения принадлежности ячейки с координатами её центра $(x_p, y_p)$ области, ограниченной кривой, используется надежный лучевой метод [12]. Аппроксимируя кривую зам-

кнутым многоугольником, из точки $(x_p, y_p)$ выпускается луч, параллельный оси абсцисс. Если количество пересечений луча со сторонами многоугольника нечетное, точка находится внутри контура; если четное — снаружи.

Как показано на рис. 4, мы проводим луч из точки $S$, луч делится кривыми на отрезки, а промежутки с левой и правой сторон кривой всегда противоположны. Поскольку диапазон кривой ограничен, мы можем легко определить, что самый внешний отрезок линии должен находиться за пределами кривой. Если количество отрезков четное, отрезок линии, на котором расположена точка $P$, занимает то же пространство, что и самый внешний отрезок линии (за пределами кривой). Если количество отрезков нечетное, точка $P$ находится внутри кривой. При применении лучевого метода для аппроксимации кривой используется многоугольник. Таким образом, необходимо подсчитать количество пересечений между лучом и каждым ребром многоугольника. Формула для оценки пересечения:

$$\begin{cases} y_s \geq \min(y_a, y_b), \\ y_s \leq \max(y_a, y_b) : \text{intersection}, \\ x_s < x_i, \end{cases}$$

где $(x_p, y_p)$ — это координаты оцениваемой точки, $(x_a, y_a)$ и $(x_b, y_b)$ — координаты конечных точек ребра, $(x_i, y_i)$ — координаты точки пересечение прямой и луча, где расположен сегмент $AB$.

Кривая непрерывна и дифференцируема везде; однако многоугольник состоит из вершин и ребер, и поэтому лучевой метод будет недействителен, когда луч проходит через вершину многоугольника или совпадает с ребром многоугольника. Чтобы устранить эти неправильные оценки, математическое выражение для оценки пересечения адаптировано к следующему уравнению:

$$\begin{cases} y_s > \min(y_a, y_b), \\ y_s \leq \max(y_a, y_b) : \text{intersection}, \\ x_s < x_i. \end{cases}$$

Данная модификация позволяет избежать двойного счета или пропуска пересечений в вырожденных случаях, обеспечивая надежность алгоритма для сеток любой сложности.

### 4. Генерация SMC-сетки и верификация модели для Азовского моря

Для апробации разработанного алгоритма была поставлена задача построения SMC-сетки для Азовского моря, характеризующегося сложной береговой линией, обширными мелководными акваториями и значительными градиентами батиметрии. Использование традиционных структурных сеток с равномерным разрешением для данного водоема является неэффективным, так как приводит к избыточному количеству ячеек на глубоководных участках при недостаточном разрешении в критически важных прибрежных зонах.

Была сгенерирована 6-уровневая SMC-сетка. Согласно введенной иерархии, это позволяет иметь ячейки с относительными размерами от 1 (минимальный размер) до 32. Исходные данные о батиметрии были получены из базы данных GEBCO с разрешением ~500 метров, что обеспечило необходимую детализацию для построения сетки 1-го уровня.

Процесс генерации включал последовательное применение двух методов уточнения. Автоматическое прибрежное уточнение на основе батиметрических данных и ограниченного радиуса, что гарантировало наличие ячеек высокого разрешения (1-3 уровни) вдоль всей береговой линии. Целевое уточнение произвольных областей для ключевых акваторий. В частности, дополнительное уточнение до 4-го уровня было применено для Керченского пролива и зоны вблизи дельты реки Кубань, где ожидаются сложные картины течений и трансформации волнения.

Результирующая сетка, представленная на рис. 5, демонстрирует эффективное адаптивное покрытие акватории. Наибольшая плотность ячеек сосредоточена в узкой прибрежной полосе и указанных выше областях, в то время как центральная глубоководная часть моря покрыта крупными ячейками.

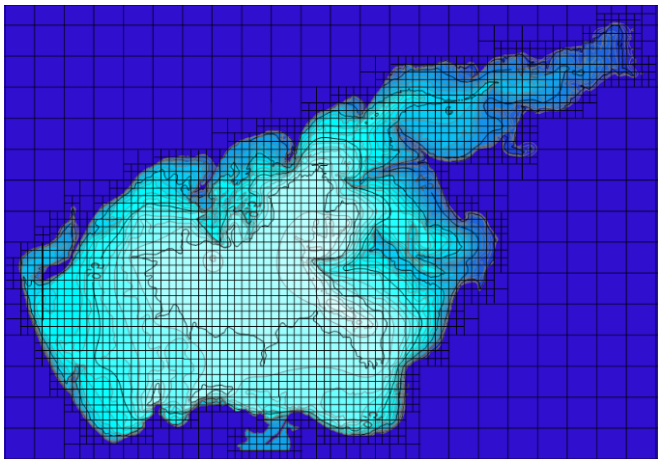


*Рис. 5. SMC сетка для Азовского моря*

Верификация разработанной сетки проводилась на основе модели ветрового волнения WAVEWATCH III (версия 6.07). В качестве входных данных использовались поля приземного ветра и льда из реанализа ERA5 Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF) с пространственным разрешением 0.25° и временным разрешением 1 час [13].

Рассчитанные модельные параметры (значительная высота волны *Hs*, период и направление) выводились с часовым разрешением для последующего сравнения с данными наблюдений.

Для визуальной оценки результатов моделирования на рис. 6 представлены рассчитанные поля значительной высоты волны *Hs*. Карты демонстрируют физически адекватную картину: увеличение высоты волны от подветренных берегов к наветренным и к центру моря, а также удлинение периода по мере распространения волнения.

Модель адекватно воспроизводит тот факт, что в Азовском море преобладают волны высотой менее 1 м (суммарная повторяемость около 85 %), а волны высотой более 2 м являются редкими событиями. Средняя ошибка расчетных значений высот волн для климатологического анализа составила 5–15 см.

Качественный анализ показывает, что модель адекватно воспроизводит пространственную структуру волновых полей. Особенно важно отметить, что в зонах целевого уточнения (Керченский пролив) не наблюдается артефактов или численных шумов, что подтверждает корректность построенной SMC-сетки и соблюдение условий плавности изменения размеров ячеек. Детальное количественное сравнение с данными наблюдений и оценка ошибок моделирования будут представлены в следующем разделе.

Для демонстрации преимуществ SMC-сетки был проведен сравнительный эксперимент с использованием традиционной регулярной сетки с постоянным шагом, эквивалентным разрешению 1-го уровня SMC в прибрежной зоне. Сравнение результатов показало, что регулярная сетка при прочих равных условиях приводит к завышению высот волн на мелководье на 10–20 % из-за недостаточного разрешения батиметрии и эффектов рефракции. Разработанная SMC-сетка позволила значительно снизить эту ошибку, корректно разрешая процессы трансформации волн на континентальном шельфе.

Таким образом, верификация результатов подтвердила, что применение адаптивной SMC-сетки, сгенерированной по предложенному алгоритму, в сочетании с моделью WAVEWATCH III позволяет получать физически адекватные и количественно точные оценки волновых параметров для акватории Азовского моря.

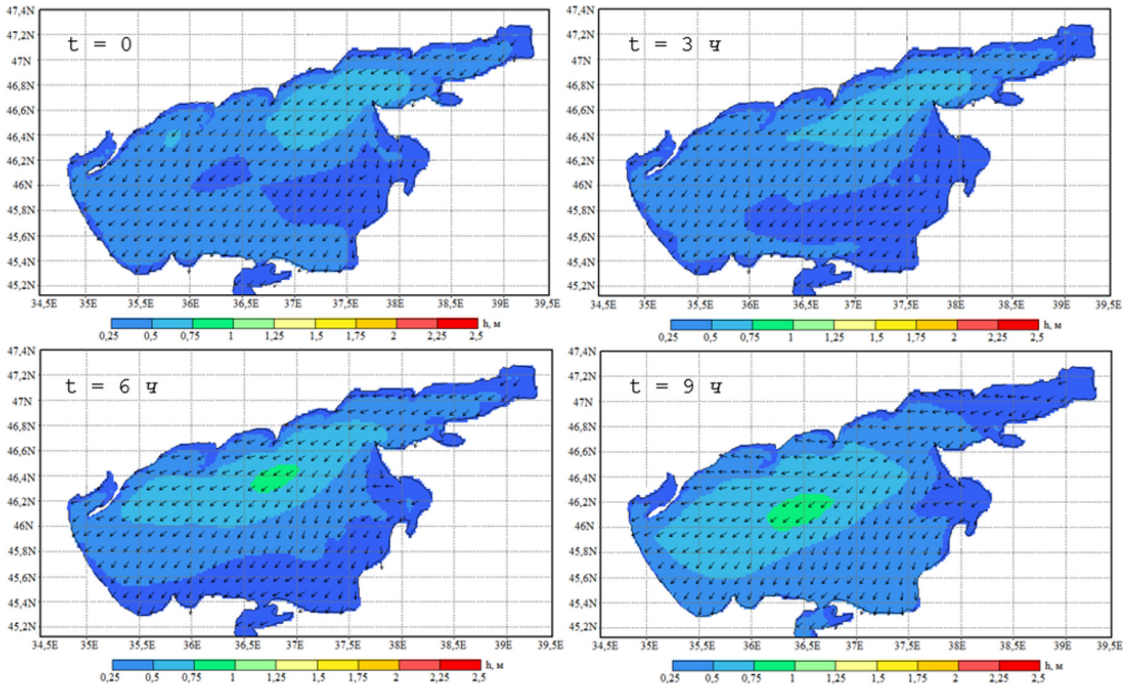



*Рис. 6. Результаты моделирования направления и высот преобладающих волн в различные моменты времени в Азовском море – в начальный момент, через 3, 6 и 9 часов. Стрелками показано среднее направление распространения волн*

## Заключение

В результате проведенного исследования разработан и успешно апробирован новый алгоритм генерации сферических мультиячеистых сеток (SMC) для моделей волнения. Основные научные и практические результаты работы заключаются в следующем:

Создан универсальный алгоритм, реализующий два метода уточнения сетки: классический прибрежный и расширенный метод уточнения произвольных областей с использованием иерархии замкнутых кривых. Алгоритм демонстрирует значительную гибкость по сравнению с существующими аналогами, позволяя целенаправленно повышать разрешение в специфических акваториях, представляющих особый интерес для исследований.

Разработанный метод успешно применен для построения 6-уровневой SMC-сетки Азовского моря, учитывающей сложную батиметрию и особенности береговой линии. Сетка обеспечила эффективное пространственное разрешение с концентрацией вычислительных ресурсов в прибрежной зоне и районах с наибольшими градиентами глубины.

Верификация результатов моделирования волновых параметров с использованием модели WAVEWATCH III показала высокую точность воспроизведения волнового режима Азовского моря. Средняя ошибка расчетных значений значительной высоты волны составила 5–15 см при коэффициенте корреляции более 0.9. Модель адекватно воспроизвела пространственно-временную изменчивость волновых полей и статистику повторяемости высот волн, согласующуюся с данными натурных наблюдений.

Проведенный анализ подтвердил, что использование адаптивных SMC-сеток позволяет существенно повысить точность моделирования на мелководных акваториях по сравнению с регулярными сетками за счет лучшего разрешения батиметрии и процессов трансформации волн.

Перспективы дальнейших исследований связаны с развитием алгоритма для работы с многосеточными конфигурациями (multi-grid), что откроет возможности для совместного моделирования волнения в регионах с существенно различающимися пространственными мас-

штабами. Кроме того, предлагаемый метод может быть эффективно адаптирован для других акваторий с сложной береговой линией и батиметрией — в частности, для архипелагов, фьордовых зон и устьевых областей крупных рек.

Разработанный алгоритм генерации SMC-сеток представляет собой эффективный инструмент для оперативного прогноза волнения и климатологических исследований в прибрежных морских акваториях, сочетающий в себе высокое пространственное разрешение в ключевых областях и вычислительную эффективность.

**Литература**


1. *Roland A.* An operational wave forecasting system for the Baltic Sea / A. Roland, A. V. Babanin, D. V. Chalikov // Coastal Engineering. – 2012. – Vol. 64. – P. 1–10. – DOI: 10.1016/j.coastaleng.2012.02.001.

2. *Zijlema M.* Computation of wind-wave spectra in coastal waters with SWAN on unstructured grids / M. Zijlema // Coastal Engineering. – 2010. – Vol. 57, No 3. – P. 267–277. – DOI: 10.1016/j.coastaleng.2009.10.011.

3. A multigrid wave forecasting model / A. Chawla [et al.] // Journal of Geophysical Research: Oceans. – 2013. – Vol. 118, No 6. – P. 3356–3370. – DOI: 10.1002/jgrc.20212.

4. A nested-grid wave model / Y. L. Hsu [et al.] // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. – 2005. – Vol. 22, No 8. – P. 1205–1219. – DOI: 10.1175/JTECH1766.1.

5. *Popinet S.* The Quadtree-adaptive model / S. Popinet // Journal of Computational Physics. – 2010. – Vol. 229, No 12. – P. 4786–4820. – DOI: 10.1016/j.jcp.2010.03.001.

6. *Li J. G.* A multi-resolution approach to global ocean modeling / J. G. Li // Ocean Modelling. – 2008. – Vol. 69. – P. 211–232. – DOI: 10.1016/j.ocemod.2013.05.005.

7. *Li J. G.* A multi-resolution ocean circulation model / J. G. Li // Ocean Modelling. – 2011. – Vol. 39, No 3-4. – P. 195–207. – DOI: 10.1016/j.ocemod.2011.04.005.

8. Application of SMC grid in a global wave model / S. Liu [et al.] // Acta Oceanologica Sinica. – 2019. – Vol. 38, № 4. – P. 1–10. – DOI: 10.1007/s13131-019-1410-x.

9. The WAVEWATCH III® Development Group. User manual and system documentation of WAVEWATCH III® version 6.07 : tech. note 333 / The WAVEWATCH III® Development Group ; NOAA/NWS/NCEP/MMAB. – 2019. – URL: https://github.com/NOAA-EMC/WW3/wiki/Manual (дата обращения: 01.10.2023).

10. The Met Office global coupled model 3.0 and 3.1 (GC3.0 and GC3.1) configurations / A. Saulter [et al.] // Geoscientific Model Development. – 2020. – Vol. 13, No 1. – P. 235–275. – DOI: 10.5194/gmd-13-235-2020.

11. *Darnton J.* WW3 Open Tools : GitHub repository / J. Darnton, S. H. Salter. – URL: https://github.com/ww3-opentools (дата обращения: 01.10.2023).

12. *Sutherland I. E.* Reentrant Polygon Clipping / I. E. Sutherland, G. W. Hodgman // Communications of the ACM. – 1974. – Vol. 17, No 1. – P. 32–42. – DOI: 10.1145/360767.360802.

13. The ERA5 global reanalysis / H. Hersbach [et al.] // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. – 2020. – Vol. 146, No 730. – P. 1999–2049. – DOI: 10.1002/qj.3803.

УДК 519.876.5

# КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ПРОТОКОЛОВ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЯХ

**О. В. Пьянков[1], Н. С. Бакулин[2]**

*[1]Воронежский институт МВД России*
*[2]ЦИТСиЗИ ГУ МВД России по Воронежской области*

**Аннотация.** В статье рассматривается один из этапов решения задачи приоритезации трафика в вычислительных сетях на основе кластеризации протоколов передачи данных. Для анализа используется набор из 47 типовых протоколов, охарактеризованных 10 метриками. Предложена математическая модель, включающая этапы предобработки данных, анализа мультиколлинеарности, снижения размерности методом главных компонент и факторного анализа, кластеризации методами k-средних и иерархической кластеризации. Модель реализована в виде приложения на языке Python. Полученные данные являются основой для реализации дальнейших этапов, а именно расчета весовых коэффициентов и объективного ранжирования протоколов при планировании трафика в условиях ограниченной пропускной способности каналов связи.
**Ключевые слова:** сети связи, метрики протоколов, анализ данных, кластеризация, приоритезация трафика, вычислительные сети.

## Введение

Приоритезация трафика вычислительных сетей является ключевым вопросом по обеспечению эффективного использования каналов связи в условиях повышенной нагрузки. Необходимость приоритезации трафика определяется растущими объёмами передаваемой информации, поскольку модернизация каналов связи влечёт за собой большие экономические затраты, или же осложняется внешними условиями среды.

Приоритезация позволяет максимально повысить эффективность использования каналов связи и значительно снизить потери ключевых данных в условиях повышенной нагрузки на вычислительную сеть.

Целью данной работы является кластеризация и дальнейший анализ основных метрик протоколов для последующего использования полученных данных в рамках реализации математической модели анализа приоритетов протоколов.

## 1. Основные метрики протоколов.

Для осуществления анализа и кластеризации протоколов рассмотрено 47 типовых протоколов, используемых в вычислительной сети и 10 основных метрик данных протоколов:

1. Максимально допустимая задержка (в миллисекундах) — это время доставки пакета от источника к получателю, превышение данного времени может привести к нарушениям в работе.

2. Допустимый джиттер (в миллисекундах) — это разница между средним временем прохождения пакета и максимальным или минимальным временем прохождения пакета.

3. Допустимый уровень потерь пакетов (в процентах) — это коэффициент потери пакетов, превышение данного коэффициента может привести к нарушению в работе.

4. Допустимая деградация (в процентах) — это уровень снижения качества пакета, при повышении значений данного уровня пакет считается не работоспособным.

5. Наличие механизмов повторной передачи (0 — нет, 1 — да) — это наличие в протоколе механизмов вторичной отправки повреждённых или утерянных пакетов данных.

6. Средний размер пакета (в байтах) — это усреднённое значение размера пакета, передаваемого конкретным протоколом.

7. Протокольные накладные расходы (в процентах) — это дополнительные затраты ресурсов на передачу служебной информации, например контрольные суммы или временные метки.

8. Тип трафика (постоянный — 0, пульсирующий — 1, интерактивный — 2) — это классификация протокола по характеру трафика.

9. Приоритет по умолчанию (10 — низкий, 30 — стандартный, 60 — критический), это наиболее часто используемое значение приоритета данного протокола.

10. Чувствительность к порядку пакетов (в процентах) — это коэффициент, показывающий чувствительность данного протокола к порядку приёма пакетов.

Метрики и перечень протоколов представлены в табл. 1.

Таблица 1

*Метрики протоколов*

| Протокол | Порядковые номера метрик | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| CITRIX | 50 | 30 | 1 | 5 | 1 | 20000000 | 5 | 2 | 50 | 30 |
| DHCP | 1000 | 100 | 5 | 20 | 1 | 342 | 10 | 1 | 60 | 0 |
| DNS | 100 | 50 | 5 | 10 | 1 | 100 | 15 | 2 | 50 | 0 |
| FTP | 1000 | 100 | 5 | 10 | 1 | 1500 | 10 | 1 | 30 | 10 |
| GRE | 100 | 50 | 2 | 30 | 0 | 1476 | 5 | 0 | 10 | 20 |
| H323 | 150 | 20 | 1 | 5 | 0 | 1200 | 5 | 2 | 60 | 40 |
| HTTP | 100 | 100 | 3 | 10 | 1 | 1500 | 2 | 1 | 40 | 10 |
| HTTP-Proxy | 200 | 100 | 3 | 10 | 1 | 1500 | 3 | 1 | 40 | 10 |
| HTTPS | 150 | 100 | 3 | 5 | 1 | 1500 | 5 | 1 | 45 | 10 |
| IGMP | 100 | 50 | 5 | 30 | 0 | 100 | 5 | 0 | 10 | 0 |
| IKE | 100 | 50 | 2 | 10 | 0 | 1000 | 15 | 2 | 50 | 30 |
| IMAP | 150 | 100 | 3 | 10 | 1 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 10 |
| IPSec ESP | 100 | 30 | 2 | 10 | 0 | 1400 | 10 | 0 | 50 | 30 |
| Kerberos | 100 | 50 | 2 | 5 | 1 | 1200 | 5 | 2 | 50 | 5 |
| L2TP | 100 | 30 | 2 | 20 | 0 | 1500 | 5 | 0 | 10 | 30 |
| LDAP | 150 | 50 | 3 | 10 | 1 | 1500 | 5 | 2 | 40 | 10 |
| Lotus Notes | 200 | 100 | 3 | 5 | 1 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 10 |
| MS-SQL | 100 | 30 | 1 | 5 | 1 | 1500 | 5 | 1 | 50 | 15 |
| MySQL | 100 | 30 | 2 | 10 | 1 | 1500 | 5 | 1 | 50 | 15 |
| NTP | 100 | 5 | 1 | 20 | 0 | 100 | 5 | 0 | 30 | 0 |
| NetBIOS DGM | 100 | 100 | 5 | 20 | 0 | 1500 | 5 | 1 | 30 | 0 |
| NetBIOS-NC | 100 | 100 | 5 | 20 | 1 | 1500 | 5 | 1 | 30 | 0 |
| NetMeeting | 150 | 20 | 1 | 5 | 0 | 1200 | 15 | 2 | 60 | 40 |
| PING | 50 | 50 | 10 | 20 | 0 | 64 | 20 | 0 | 10 | 0 |
| POP3 | 150 | 100 | 3 | 10 | 1 | 1500 | 5 | 2 | 40 | 10 |
| PPTP | 100 | 30 | 2 | 20 | 0 | 1500 | 5 | 0 | 10 | 30 |
| Postgres | 100 | 30 | 2 | 10 | 1 | 1500 | 5 | 1 | 50 | 15 |
| RADIUS | 100 | 50 | 2 | 10 | 0 | 400 | 5 | 2 | 50 | 0 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RDP | 100 | 30 | 1 | 5 | 1 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 40 |
| RTSP | 100 | 30 | 1 | 5 | 1 | 1200 | 5 | 2 | 60 | 20 |
| SCCP | 100 | 20 | 1 | 5 | 0 | 1000 | 5 | 2 | 50 | 40 |
| SIP | 150 | 20 | 1 | 5 | 1 | 800 | 5 | 2 | 60 | 30 |
| SMTP | 100 | 100 | 5 | 10 | 1 | 1500 | 5 | 2 | 40 | 10 |
| SNMP | 500 | 100 | 5 | 20 | 0 | 500 | 10 | 1 | 30 | 0 |
| SNMP-Traps | 500 | 100 | 10 | 10 | 0 | 500 | 15 | 1 | 30 | 0 |
| SSH | 150 | 50 | 2 | 5 | 1 | 1500 | 5 | 2 | 45 | 15 |
| Syslog | 1000 | 100 | 10 | 20 | 0 | 1024 | 5 | 1 | 30 | 0 |
| TFTP | 1000 | 100 | 10 | 10 | 0 | 512 | 5 | 1 | 30 | 0 |
| Telnet | 150 | 50 | 2 | 20 | 1 | 1500 | 5 | 2 | 30 | 10 |
| UPnP | 100 | 100 | 5 | 5 | 0 | 1000 | 5 | 0 | 10 | 5 |
| VMC | 100 | 20 | 1 | 10 | 0 | 1500 | 5 | 2 | 10 | 20 |
| ViPNet C. | 100 | 10 | 1 | 10 | 0 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 50 |
| ViPNet MFTP | 100 | 50 | 1 | 5 | 0 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 30 |
| ViPNet SGA | 100 | 20 | 1 | 10 | 0 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 30 |
| ViPNet SW | 100 | 10 | 1 | 5 | 0 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 40 |
| ViPNet б.с. | 100 | 20 | 1 | 5 | 0 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 30 |
| ViPNet м.к. | 100 | 10 | 1 | 5 | 0 | 1500 | 5 | 2 | 50 | 40 |

Данный набор протоколов является типовым для вычислительных сетей, а числовые значения метрик каждого конкретного протокола собраны их открытых источников.

## 2. Подготовка данных и статистический анализ.

Подготовка и статистический анализ являются предварительным этапом, позволяющим произвести общую оценку имеющихся метрик. Под подготовкой данных понимается нормализация значений, производимая с целью приведения всех метрик к единому масштабу, по причине их различия в диапазоне значений, что может сказаться на дальнейших результатах в сторону доминирования метрик с большими числовыми значениями.

Для оценки тенденции распределения данных рассчитывается среднее арифметическое значение по каждой метрике. Для оценки разброса данных относительно среднего значение рассчитывается стандартное отклонение. Также для визуализации линейных зависимостей между метриками строится корреляционная матрица.

Полученная матрица корреляций не только позволяет оценить линейные зависимости пар метрик, но и визуализировать полученные данные для упрощения анализа и чёткого понимания взаимосвязи метрик протоколов, представлена на рис. 1. Порядковые номера протоколов отображённые на корреляционной матрице соответствуют их порядковым номерам , представленным в разделе 1 настоящей работы.

Для нормализации числовых значений метрик, после их статистической оценки, используется алгоритм Z-score.

$$Z_{ij} = \frac{x_{ij} - \mu_j}{\sigma_j}. \quad (1)$$

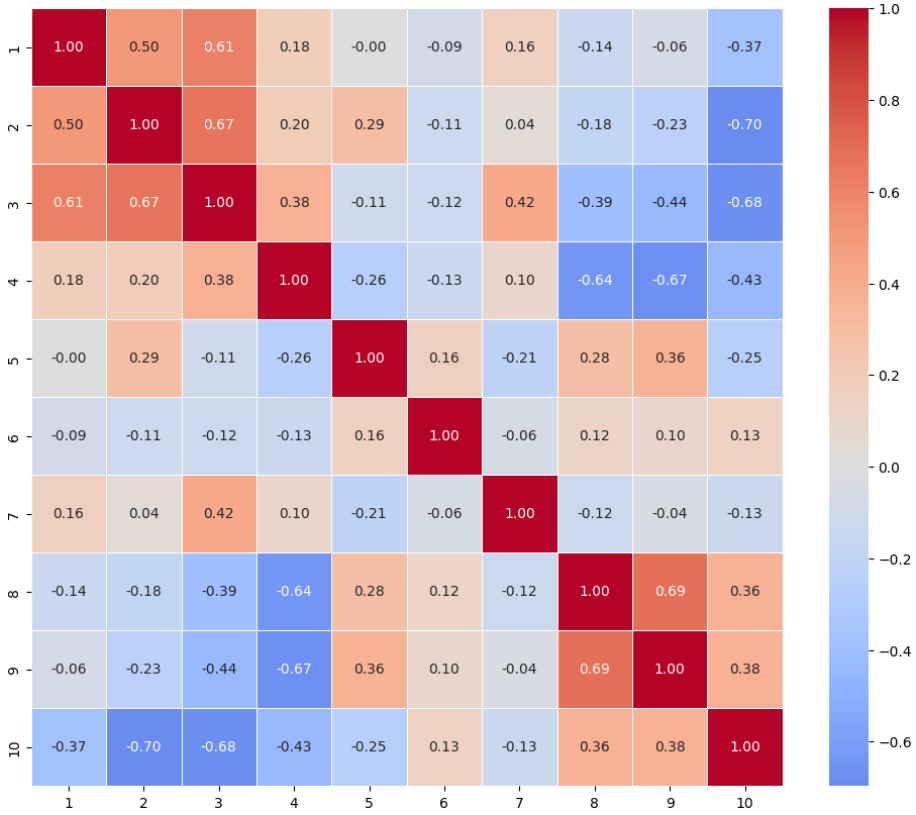



*Рис. 1. Корреляционная матрица*

### 3. Анализ мультиколлинеарности

Мультиколлинеарность показывает наличие двух и более сильно коррелирующих метрик, что может вызвать затруднения при определении уникального влияния каждой из них и существенно снизить надёжность оценок модели. Выявление мультиколлинеарности осуществляется путём расчёта коэффициента инфляции дисперсии (VIF).

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}, \tag{2}$$

$$R_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \mu_j)^2}. \tag{3}$$

Полученные коэффициенты VIF интерпретируется согласно табл. 2.

Таблица 2

*Уровни интерпретации VIF*

| Диапазон VIF | Уровень мультиколлинеарности |
|---|---|
| $VIF < 1$ | Низкая |
| $1 \le VIF < 5$ | Умеренная |
| $5 \le VIF < 10$ | Высокая |
| $VIF \ge 10$ | Критическая |

Метрики, имеющие критический уровень мультиколлинеарности, для дальнейшего анализа не используются, табл. 3.

Таблица 3

*Результаты анализа мультиколлинеарности*

| Метрика | VIF | Уровень мультиколлинеарности |
|---|---|---|
| Максимально допустимая задержка | 1.9504 | Умеренная |
| Допустимый джиттер | 2.9525 | Умеренная |
| Допустимый уровень потерь пакетов | 4.9364 | Умеренная |
| Допустимая деградация | 2.3270 | Умеренная |
| Наличие механизмов retransmission | 1.8984 | Умеренная |
| Средний размер пакета | 1.0772 | Умеренная |
| Протокольные накладные расходы | 1.5365 | Умеренная |
| Тип трафика | 2.1834 | Умеренная |
| Приоритет по умолчанию | 3.0075 | Умеренная |
| Чувствительность к порядку пакетов | 3.2233 | Умеренная |

## 4. Метод главных компонент

Для снижения размерности данных и сохранения их максимальной информативности (дисперсии) используется метод главных компонент. Для этого рассчитывается ковариационная матрица нормализованных данных.

$$\mathbf{C} = \frac{1}{n-1}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

После для полученной матрицы находятся собственные значения и собственные векторы, решается характеристическое уравнение.

$$C \cdot v_k = \lambda_k \cdot v_k. \tag{5}$$

Главные компоненты:

$$PC_k = \mathbf{Z} \cdot v_k. \tag{6}$$

Для оценки информативности компонент, определяется доля дисперсии, объясняемой каждой главной компонентой.

$$VE_k = \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j}, \tag{7}$$

где $p$ — общее количество главных компонент, в результате чего получаем гистограмму доли объяснённой дисперсии главных компонент, представлена на рис. 2.

Накопленная дисперсия представлена на рис. 2, представляет собой суммарную долю дисперсии объясняемой первыми m главными компонентами.

$$CVE_m = \sum_{k=1}^{m} VE_k. \tag{8}$$

Оптимальное количество значимых компонент определяется как минимальное количество главных компонент, которые объясняют не менее 95 % общей дисперсии данных.

Согласно рис. 2 можно сделать вывод, что 8 главных компонент достаточно для объяснения подавляющей части вариативности данных, с учётом используемого порогового значения дисперсии.

## 5. Факторный анализ

В рамках изучения структуры данных реализуется факторный анализ, основная модель факторного анализа вида:

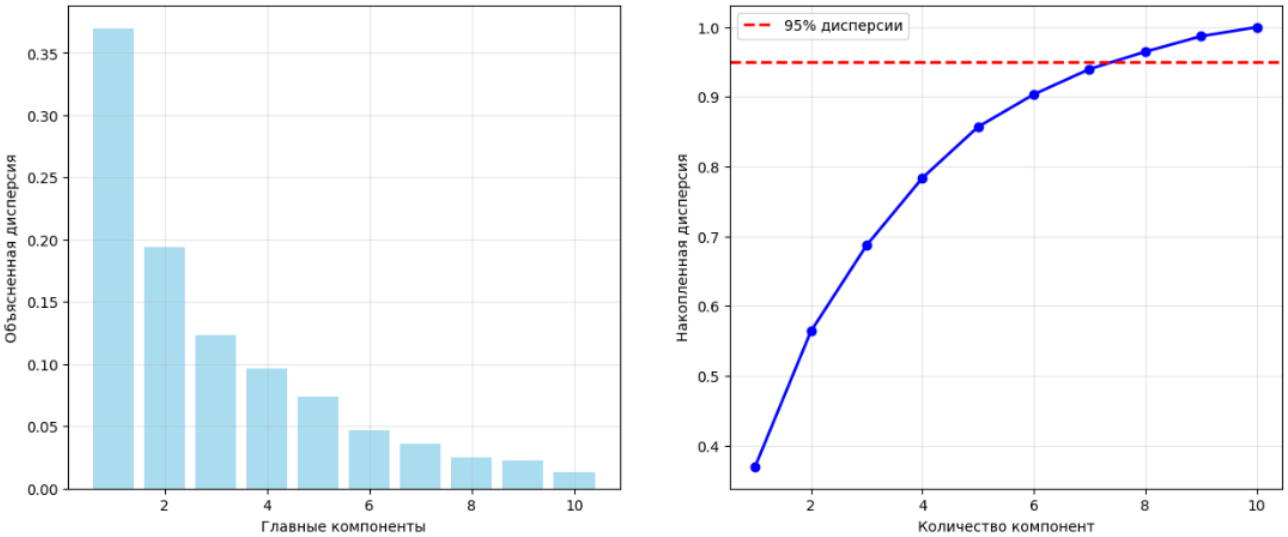



*Рис. 2. Графики объяснённой и накопленной дисперсии*

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Lambda F} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{9}$$

Наблюдаемые переменные выражаются как линейная комбинация скрытых факторов плюс ошибка. В рамках факторного анализа рассчитывается ковариационная матрица вида:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Z} + \psi. \tag{10}$$

Для упрощения факторов используется Varimax ротация, которая максимизирует дисперсию квадратов факторных нагрузок по столбцам, что значительно упрощает структуру по причине наличия у каждой переменной высоких нагрузок на небольшое количество факторов.

## 6. Кластерный анализ

В рамках кластеризации используется два метода расчёта оптимального количества кластеров, а именно метод силуэта и метод локтя, целевая функция кластеризации имеет следующий вид.

$$WCSS = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} \omega_{ik} \left\| z_i - \mu_k \right\|. \tag{11}$$

Целевая функция минимизирует сумму квадратов расстояний от наблюдений до центров их кластеров. В рамках расчёта оптимального количества кластеров методом локтя, перейдём к нормализации значений для корректного вычисления углов:

$$WCSS_{norm} = \frac{WCSS - WCSS_{\min}}{WCSS_{\max} - WCSS_{\min}}. \tag{12}$$

После чего происходит вычисление векторов, соединяющих последовательные точки на графике локтя и расчёт угла между последовательными отрезками:

$$\theta_i = \arccos\left(\cos(\theta_i)\right) \cdot \frac{180}{\pi}. \tag{13}$$

После чего определяется оптимальное количество кластеров как точки с максимальным углом между отрезками. Результат представлен на рис. 3.

Метод силуэта реализуется путём расчёта среднего внутрикластерного и минимального межкластерного расстояния, после чего рассчитывается силуэтный коэффициент

$$s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max\left\{a(i), b(i)\right\}}. \tag{14}$$

После чего рассчитывается средний силуэтный коэффициент для всей кластеризации, данный показатель говорит о качестве кластеризации. Оптимальное количество кластеров определяется по максимальному среднему силуэтному коэффициенту. Результат представлен на рис. 3.

Для реализации иерархической кластеризации используется метод Уорда для вычисления расстояния между кластерами.

$$D(C_i, C_j) = \frac{1}{|C_i||C_j|} \sum_{x \in C_i} \sum_{y \in Cj} d(x, y). \quad (15)$$

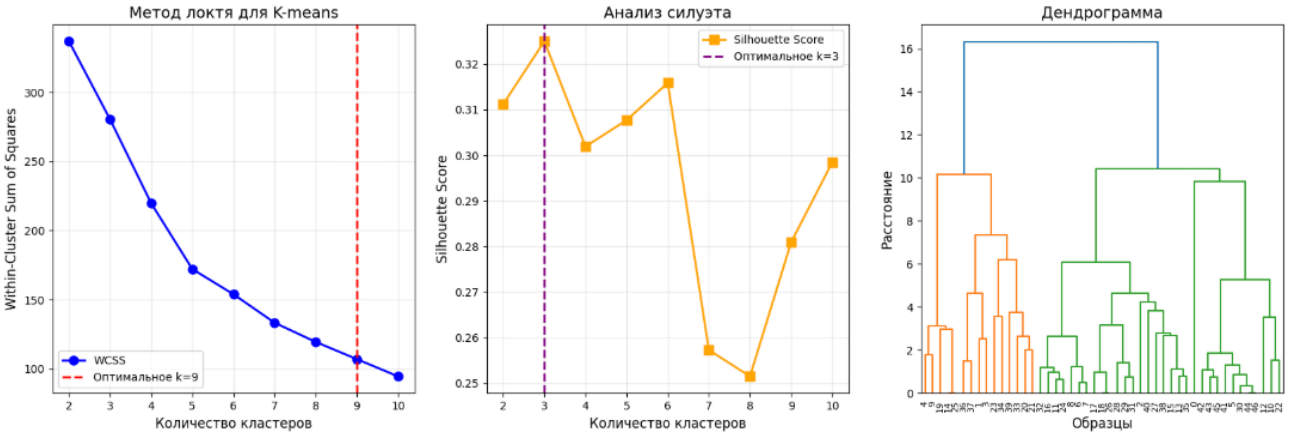



*Рис. 3. Графики кластеризации*

На рис. 3 представлены комплексные результаты работы метода локтя, метода анализа силуэта и дендрограмма как результат иерархической кластеризации.

## Заключение

В результате данной работы была разработана математическая модель, схема представлена на рис. 4, подготовки данных и анализа структур метрик протоколов, для последующего использования полученных значений, а именно скорректированных метрик, главных компонент, факторных значений, оптимальных кластеров и дендрограммы, для дальнейшего расчёта приоритетов протоколов, в рамках решения задачи по приоритезации трафика в вычислительных сетях, опираясь на типовой набор протоколов.

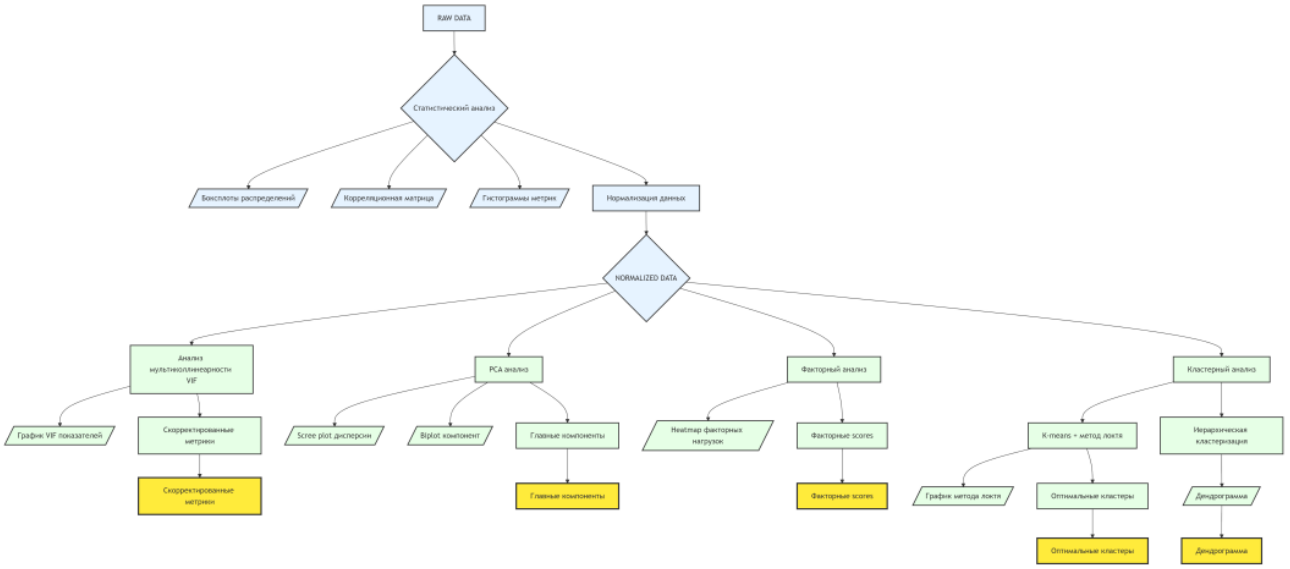



*Рис. 4. Концептуальная схема математической модели*

Расчёты и построение графиков автоматизированы программными средствами, а именно данная математическая модель реализована в виде Desktop приложения на языке программирования Python, с возможностью предварительного задания различных параметров анализа, например порога дисперсии метода главных компонент. Полученные данные в дальнейшем будут использоваться в следующих этапах обработки, а именно расчёте весов протоколов, их ранжировании, валидации и финальной агрегации с целью объективного расчёта приоритетов протоколов для систем QoS.

**Литература**


1. *Маккинни У.* Python для анализа данных / У. Маккинни ; пер. с англ. А. В. Слинкина. – 2-е изд. – Москва : Диалектика, 2022. – 598 с.

2. *Хасти Т.* Статистическое обучение с приложениями в R / Т. Хасти, Р. Тибширани, Дж. Фридман ; пер. с англ. С. А. Анисимов [и др.]. – Москва : ДМК Пресс, 2022. – 767 с.

3. *Журавлев А. В.* Прикладные методы статистического анализа : учеб. пособие / А. В. Журавлев, И. Г. Зенкин. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2023. – 411 с.

4. *Мангазеев В. В.* Многомерный статистический анализ в научных исследованиях : учеб. пособие / В. В. Мангазеев, Л. В. Щербакова. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та, 2019. – 215 с.

5. Метрики и производительность в сетях специального назначения : сб. ст. / под ред. А. А. Петрова, В. С. Иванова ; МТУСИ. – Москва : МТУСИ, 2021. – 211 с.

6. *Таненбаум Э.* Компьютерные сети : 16+ / Э. Таненбаум, Н. Фимстер, Д. Уэзеролл ; [перевел с английского С. Черников]. - 6-е изд. - Санкт-Петербург [и др.] : Питер ; Минск : Питер, 2023. – 989 с.

УДК 621.391.8

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УИШАРТА ДЛЯ АНАЛИЗА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ПРИЕМА МНОГОАНТЕННЫХ СИСТЕМ БЕСПРОВОДНОЙ СВЯЗИ

**Н. В. Савищенко, А. А. Пелин**

*Военная орденов Жукова и Ленина Краснознаменная академия связи имени Маршала Советского Союза С. М. Буденного*

**Аннотация.** В статье рассматривается применение аппарата теории случайных матриц, в частности распределения Уишарта, для статистического анализа характеристик многоантенных систем связи (MIMO). Описана математическая модель векторного гауссовского канала с замираниями и проанализирована работа линейного приемника, использующего алгоритм обнуления (Zero-Forcing). Показано, что свойства ковариационной матрицы канала, определяющие выходное отношение сигнал/шум и вероятность битовой ошибки, описываются центральным или нецентральным распределением Уишарта в зависимости от наличия пространственной корреляции. Проведена оценка влияния корреляции замираний на эффективность пространственного разнесения. Обоснована необходимость использования данного математического аппарата для расчета пропускной способности и синтеза алгоритмов обработки сигналов в перспективных беспроводных сетях.

**Ключевые слова:** MIMO-системы, распределение Уишарта, теория случайных матриц, помехоустойчивость приема, метод обнуления (ZF), матрица канала связи, пространственная корреляция, пропускная способность канала, отношение сигнал/шум (SNR), линейный приемник, замирания Релея, нецентральное распределение Уишарта, вероятность ошибки, многомерный статистический анализ.

## Введение

Развитие беспроводных телекоммуникационных систем, с неуклонно возрастающими требованиями к пропускной способности каналов, помехоустойчивости и скорости передачи информации, представляет собой закономерный процесс. На начальных этапах становления и развития систем связи применялись преимущественно системы с одной приемопередающей антенной — SISO (Single-Input-Single-Output). Однако по мере усложнения структуры информационных потоков и увеличения количества абонентских терминалов, данный подход продемонстрировал ограниченность в возможности выполнять возрастающие требования. Принципиальное значение в данном контексте приобретают многоантенные системы MIMO (Multiple-Input-Multiple-Output), внедрение которых ознаменовало собой качественный скачок в теории и практике беспроводной связи [2, 4]. Переход к многоантенным конфигурациям был обусловлен объективной необходимостью преодоления логарифмического характера зависимости пропускной способности SISO — систем от отношения сигнал/шум SNR (Signal-to-Noise Ratio). Технология MIMO позволяет использовать пространственное измерение для мультиплексирования или разнесения информационных потоков, что является практической реализацией концепции применения многомерных подходов для решения задач, имеющих ограничения в меньших размерностях.

Адекватное математическое описание и анализ функционирования MIMO-систем невозможны без привлечения аппарата теории случайных матриц. Основополагающую роль в рассматриваемом аппарате играет распределение Уишарта, являющееся многомерным обобщением $\chi$-распределения. Это обуславливает необходимость его применения для корректного статистического моделирования беспроводных каналов с многоэлементными антенными решетками. Математическая модель MIMO-канала предполагает, что матрица $\mathbf{H}$, элементами которой являются комплексные коэффициенты передачи между парами антенн, носит случайный характер.

Ковариационные свойства такого канала описываются матричными произведениями вида эрмитова сопряжения, которые при выполнении общепринятых допущений о гауссовом характере замираний в канале подчиняются комплексному распределению Уишарта.

Все векторы и матрицы выделены жирным шрифтом. Если матрица $\mathbf{X}$ имеет размерность $m \times n$ и ее элементы являются вещественными $\mathbb{R}$ (комплексными $\mathbb{C}$) числами, то, соответственно, обозначаем $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ или $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Если $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ и, $x_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то $x_{ij} = [\mathbf{X}]ij$ обозначает $(i, j)$-й элемент матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_k$ $k$-я вектор-строка матрицы $\mathbf{X}$. Соответственно, $\det \mathbf{X} = |\mathbf{X}|$ — определитель матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_{ij}$ обозначает минор для элемента матрицы $x_{ij}$. Запись $\mathbf{X}^H = (\mathbf{X}^*)^T = (\overline{\mathbf{X}})^T = (\mathbf{X}^T)^*$ обозначает эрмитову операцию транспонирования, где $x^* = \overline{x}$ — комплексно-сопряженное число, а $\mathrm{X}^\dagger$, имеющая, соответственно, размерность $n \times m$, обозначает псевдообратную матрицу (обобщенную обратную матрицу) для $\mathbf{X}$ [21]. Если $m = n$ и матрица $\mathbf{X}$ имеет обратную матрицу, то она совпадает с псевдообратной матрицей.

## 1. Математическая модель канала связи MIMO

В системах MIMO на передающей и приемной сторонах используются многоэлементные антенны или антенные решетки. Пусть рассматривается канал связи в многоантенной системе связи с $L_t$ передающими и $L_t$ приемными антеннами. Заметим, что пропускная способность в канале связи с замираниями и большим отношением сигнал/шум в $\min\ (L_t \times L_r)$ раз больше пропускной способности канала без многоэлементных антенн. На передающей стороне формируется комплексный векторный сигнал $s$ размерности $(L_t \times 1)$, компонентами которого являются сигналы $s_m$, $m = 0, \ldots, L_t - 1$, передаваемые через $(m+1)$-ю антенну. Матрица канала связи $\mathbf{H} = \mathbf{H}_c + i\mathbf{H}_s$, $i^2 = -1$ является комплексной прямоугольной матрицей размерности $L_r \times L_t$. Компонент матрицы канала $h_{km} = [\mathbf{H}]_{km}$ представляют собой комплексный коэффициент передачи канала связи от $m$-й передающей антенны к $k$-й приемной антенне и являются случайной величиной, имеющей нормальное распределение, $h_{km} \in \mathcal{CN}(0,1)$. Соответственно, $|h_{km}|$ имеет релеевское распределение и $|h_{km}|^2$ — экспоненциальное (показательное) распределение с единичным математическим ожиданием, $\mathbf{M}[|\, h_{km}\,|^2] = 1$. Следовательно, $\mathbf{M}[\|\mathbf{H}\|_F^2] = L_t L_r$, где норма Фробениуса матрицы $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{i,j=1}^{r,t}$ размерностью $r \times t$ определяется как $\|\mathbf{M}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{t} |\, m_{ij}\,|^2 = tr(\mathbf{M}\mathbf{M}^H) = tr(\mathbf{M}^H\mathbf{M})$. Будем полагать, что энергия сигнала в каждой приемной антенне равна суммарной энергии сигналов, излучаемых всеми $L_t$ передающими антеннами.

Математическая модель канала связи имеет вид [8, 9, 12, 16, 17, 21]:

$$y = \mathbf{H}s + n, \tag{1}$$

где $y \in \mathbb{C}^{L_r \times 1}$ — комплексный вектор принимаемого сигнала размером $(L_r \times 1)$; $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{L_r \times L_t}$ — матрица канала связи, компоненты которой, в общем случае, являются случайными процессами или случайными величинами; $s$ — передаваемый сигнал, $s \in \mathbb{C}^{L_t \times 1}$, где $E_s$ — средняя энергия сигнала, используемая одной передающей антенной; $n \in \mathbb{C}^{L_r \times 1}$ — комплексный вектор аддитивного белого гауссовского шума размером $(L_r \times 1)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_n = M[nn^H] = N_0\mathbf{E}_{L_r} = 2\sigma_n^2\mathbf{E}_{L_r}$, где $N_0$ — односторонняя спектральная плотность мощности шума и $\mathrm{E}_{L_r}$ — единичная матрица размером $(L_r \times L_r)$, т. е. $n \in \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2\mathbf{E}_{L_r})$. Таким образом, предполагается, что дисперсии шума во всех приемных антеннах являются одинаковыми. Данное ограничение не является существенным. Так, если дисперсии различны, то можно, например, рассматривать максимальную дисперсию. Нетрудно убедиться, что ковариационная матрица для сигнала определяется как $\mathbf{R}_{ss} = M[ss^H] = E_s\mathbf{E}_{L_t}$ и, соответственно, $M[s^H s] = E_s L_t$. Таким образом, (1) определяет векторный гауссовский канал.

Заметим, что если $\mathbf{X}=[\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n]$ случайная матрица размером $m\times n$, полученная из $n$ случайных независимых векторов размерами $m\times 1$ с ковариационной матрицей $\mathbf{R}:\mathbf{X}=[\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n]$, где $\mathrm{cov}(\mathbf{X}_k)=\mathbf{R}$, $k=1,\ldots,n$, то тогда ковариационная матрица имеет размерность $mn\times nm$ $\mathrm{cov}[\mathrm{vec}(\mathbf{X})]=\mathbf{E}_n\otimes\mathbf{R}$, где $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ — произведение Кронекера матриц. Если квадратная матрица $\mathbf{X}$ размерностью $n\times n$ имеет ранг $r$, а случайная матрица $\mathbf{H}$ размерностью $p\times n$ элементы которой нормальные случайные величины с невырожденной ковариационной матрицей, то тогда с вероятностью 1 справедливо соотношение $\mathrm{rang}(\mathbf{HXH}^T)=\min(r,p)$ [1].

## 2. Демодуляция методом обнуления для случайной матрицы канала связи

Известно несколько алгоритмов демодуляции на приемной стороне: Метод обнуления — ZF (Zero Forcing) [6]; Метод демодуляции по критерию минимума среднеквадратической ошибки — MMSE (Minimum Mean Square Error); Метод максимального правдоподобия — ML (Maximum Likelihood), используемый в многоантенных системах на основе архитектуры BLAST (Bell Laboratories Layered Space Time). Первые два неоптимальных метода относятся к линейным приемникам, которые включают в себя линейное преобразование полученного вектора и из-за их возможности снижения сложности часто применяют на практике. В этом случае принятый сигнал $y$ фильтруется линейным фильтром с подавлением мешающих сигналов. Известно, что при $L_r\gg L_t\gg 1$ линейные приемники, используемые в massive MIMO, приближаются к оптимальным приемникам [14].

Из (1) следует, что ковариационная матрица принимаемого сигнала определяется как

$$\mathbf{R}_{yy}=\mathrm{M}[yy^H]=\mathbf{HR}_{ss}\mathbf{H}^H+\mathrm{M}[nn^H]=\mathbf{HR}_{ss}\mathbf{H}^H+N_0\mathbf{E}_{L_r},$$

где ковариационная матрица передаваемого сигнала $\mathbf{R}_{ss}=E_s\mathbf{E}_{L_t}$, с учетом предположения о равномерном распределении энергии на передающей стороне, т. е. в предположении, что сигналы, излучаемые передающими антеннами, имеют одинаковую энергию $E_s$.

Таким образом,

$$\mathbf{R}_{yy}=\mathbf{HR}_{ss}\mathbf{H}^H+N_0\mathbf{E}_{L_r},\quad \mathbf{R}_{ss}=E_s\mathbf{E}_{L_t},\ \mathbf{R}_n=N_0\mathbf{E}_{L_r}. \tag{2}$$

В общем случае, при использовании линейного приемника используется некоторое линейное преобразование $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ зависящее от матрицы канала связи $\mathbf{H}$: $\hat{s}=\mathcal{L}(\mathbf{H})\mathbf{H}s+\mathcal{L}(\mathbf{H})n$. В качестве соответствующего линейного преобразования выбирается матрица $\mathbf{A}$, такая, что $\mathbf{AH}$ представляет собой диагональную матрицу: $\hat{s}=\mathbf{A}y=\mathbf{A}(\mathbf{H}s+n)=\mathbf{AH}s+\mathbf{A}n$.

Суть метода обнуления заключается в умножении обратной матрицы $\mathbf{G}_{ZF}$ на вектор принятых отчетов [7]:

$$\hat{s}=\mathbf{G}_{ZF}y=\mathbf{G}_{ZF}(\mathbf{H}s+n)=s+\mathbf{G}_{ZF}n, \tag{3}$$

где $\mathbf{G}_{ZF}=\mathbf{H}^{\dagger}=(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H$ — псевдообратная матрица канала.

Ковариационная матрица шума, влияющего на принятие решения после произвольного линейного преобразования $\mathbf{G}$, имеет следующий вид: $\mathbf{R}_{\mathbf{G},n}=M[(\mathbf{G}n)(\mathbf{G}n)^H]=\mathbf{GR}_n\mathbf{G}^H$. Следовательно, из (2) отношение сигнал/шум на выходе ZF приемника в $k$-й ветви определяется как

$$\gamma_{ZF,k}=\left[\frac{\mathbf{R}_{ss}}{\mathbf{R}_{ZF,n}}\right]_{kk}=\left[\frac{E_s\mathbf{E}_{L_t}}{\mathbf{G}_{ZF}N_0\mathbf{E}_{L_r}\mathbf{G}_{ZF}^H}\right]_{kk}=\frac{\gamma}{\left[\mathbf{G}_{ZF}\mathbf{G}_{ZF}^H\right]_{kk}}.$$

Тогда, применяя свойства транспонирования Эрмита, получаем

$$\mathbf{G}_{ZF}\mathbf{G}_{ZF}^H=(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\left[(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\right]^H=(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H(\mathbf{HH}^H)^{-1}\mathbf{H}=(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}.$$

Окончательно получаем, что [10]

$$\gamma_{ZF,k}=\frac{\gamma}{[(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}]_{kk}}=\frac{\gamma}{(\mathbf{W}^{-1})_{kk}},$$

где $\mathbf{W}=\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ и $\gamma=E_s/N_0$ — отношение сигнал/шум на каждой приемной антенне.

Таким образом, для метода ZF оценочная версия передаваемого вектора символов получается после умножения в математической модели левой и правой части на псевдообратную матрицу $\mathbf{H}^{\dagger}$ в виде: $\hat{s} = s + \mathbf{H}^{\dagger} n$, где используется псевдообратная функция Мура — Пенроуза $\mathbf{H}^{\dagger}$, которая равна $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$, если столбцы матрицы $\mathbf{H}$ имеют полный ранг (столбцы линейнонезависимы) и тогда матрица $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ обратима или $\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H)^{-1}$, если строки матрицы $\mathbf{H}$ имеют полный ранг (строки линейнонезависимы) и тогда матрица $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ обратима.

Заметим, что

$$\mathrm{M}\left[[\mathbf{W}^{-1}]_{kk}\right] = (L_r - L_t)^{-1}; \qquad \mathrm{M}\left[\frac{1}{[\mathbf{W}^{-1}]_{kk}}\right] = L_r - L_t + 1, \qquad k = 1, \ldots, L_t.$$

Нетрудно убедиться, что $[\mathbf{W}^{-1}]_{km} = (-1)^{k+m} \det \mathbf{W}_{mk} / \det \mathbf{W}$, где $\mathbf{W}_{mk}$ определяет минор элемента $[\mathbf{W}]_{km}$. Следовательно,

$$\gamma_k = \frac{\gamma}{[\mathbf{W}^{-1}]_{kk}} = \frac{\det \mathbf{W}}{\det \mathbf{W}_{kk}} \gamma = \mathbf{W}_{kk}^{sc} \gamma, \quad k = 1, \ldots, L_t.$$

Если $\mathbf{W}$ имеет распределение Уишарта, то функция плотности распределения вероятности и, соответственно, функция распределения для $\gamma_k$, определяются как [13, 28]

$$f(\gamma_k) = \frac{1}{\Gamma(L_r - L_t + 1)\gamma_{0,k}} \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{0,k}}\right)^{L_r - L_t} e^{-\gamma_k / \gamma_{0,k}}, \qquad k = 1, \ldots, L_t$$

$$F(\gamma_k) = \frac{1}{\Gamma(L_r - L_t + 1)\gamma_{0,k}} \gamma\left(L_r - L_t + 1, \frac{\gamma_k}{\gamma_{0,k}}\right), \qquad k = 1, \ldots, L_t,$$

где $\gamma_{0,k} = \dfrac{\gamma}{\left[\mathbf{R}^{-1}\right]_{kk}}$, $k = 1, \ldots, L_t$ и $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\gamma(a, z)$ — неполная гамма-функция [18].

### 3. Центральное и нецентральное распределение Уишарта

Распределение Уишарта [5, 10, 11, 15, 22, 23, 25] — это семейство распределений для симметричных положительно определенных матриц. Пусть $x_k = (x_{(1,k)}, x_{(2,k)}, ..., x_{n,k})^T \in \mathbb{C}^{p \times 1}$, $k = 1, ..., n$ — независимые комплексные случайные нормальные вектора размерности $p$ с математическим ожиданием $\mu_k$, $k = 1, \ldots, n$ и матрицей ковариации $\Sigma : x_k \in \mathrm{C}N_p(\mu_k, \Sigma)$, $k = 1, ..., n$. Случайная матрица данных размерности $p \times n$ образуется как совокупность случайных векторов: $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Пусть $\mathbf{M} = [\mu_1, \ldots, \mu_k]$ — матрица математических ожиданий размерности $p \times n$.

Если $\mu = 0$, то тогда случайная матрица размерности $p \times p$ определяется как $\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k^H \in \mathbb{C}^{p \times p}$ имеет (центральное) распределение Уишарта с $n$ степенью свободы, которое обозначается как $\mathbf{Z} \in \mathcal{W}_p(n, \mathbf{\Sigma})$. Если $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{E}$ — единичная матрица, то тогда распределение Уишарта называется стандартным: $\mathbf{Z} \in \mathcal{W}_p(n, \mathbf{E})$.

Распределение Уишарта представляет собой многомерное расширение распределения $\chi$-квадрат. В частности, при $p = 1$, $X \in \mathcal{CN}_1(0, \sigma^2)$, тогда $\mathcal{W}_1(n, \sigma^2) = \sigma^2 \chi_n^2$. Таким образом, одномерное распределение Уишарта фактически является распределением $\chi$-квадрат. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{Z}$, определяемые как

$$\mathrm{diag}(\mathbf{Z}) = (y_1, y_2, \ldots, y_p) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_{1,k}|^2, \sum_{k=1}^{n} |x_{2,k}|^2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} |x_{n,k}|^2\right)$$

имеют $\chi$ -квадрат распределение с $2n$ степенями свободы, т. е. $y_m \in \chi(0, 2n)$ для всех $m$:

$$f_{y_m}(x) = \frac{x^{n-1} e^{-x/2}}{[2^n \Gamma(n)]}, \quad m = 1, 2, \ldots, p.$$

Для положительно определенной матрицы $\mathbf{Z} > 0,\ \mathbf{Z} \in \mathcal{W}_p(n, \mathbf{\Sigma})$ плотность (центрального) распределения Уишарта при $n \geq p$ имеет вид:

$$f_{\mathcal{W}}(\mathbf{Z}) = \frac{|\mathbf{Z}|^{(n-p-1)/2}}{2^{np/2}\Gamma_p(n/2)|\mathbf{\Sigma}|^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Z})\right),$$

где $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A}$ и — определитель $\mathbf{A}$ и

$$\Gamma_m(z) = \pi^{n(n-1)/4}\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(z - \frac{k-1}{2}\right), \qquad Re\, z > \frac{n-1}{2} \tag{4}$$

— многомерная (обобщенная) гамма-функция [15, Теорема 2.1.12].

Отметим некоторые свойства распределения Уишарта: 1) математическое ожидание для распределения Уишарта $\mathrm{M}[\mathbf{Z}] = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}[x_k x_k^H] = n\mathbf{\Sigma}$; 2) Если независимые случайные матрицы имеют распределение Уишарта, т. е. $\mathbf{Z}_i \in \mathcal{W}_p(n_i, \mathbf{\Sigma}),\ i = 1, 2, \ldots, k,$ то тогда матрица $\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{k}\mathbf{Z}_i$ также имеет распределение Уишарта: $\mathbf{Z} \in \mathcal{W}_p(\sum_{i=1}^{k} n_i, \mathbf{\Sigma})$; 3) Если $\mathbf{Z} \in \mathcal{W}_p(n, \mathbf{\Sigma})$ и задана матрица $\mathbf{A}$ размерности $p \times m$, тогда $\mathbf{A}^T\mathbf{Z}\mathbf{A} \in \mathcal{W}_m(n, \mathbf{A}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{A})$; 4) Если $\mathbf{Z} \in \mathcal{W}_p(n, \mathbf{\Sigma})$, и задана матрица $\mathbf{R} > 0$, тогда $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{Z}\mathbf{\Sigma}^{-1/2} \in \mathcal{W}_p(n, \mathbf{E}_p)$. 5) Если $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ независимые матрицы и $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z} \in \mathcal{W}_p(n, \mathbf{\Sigma})$, тогда, если $\mathbf{Z}_1 \in \mathcal{W}_p(n_1, \mathbf{\Sigma})$, то $\mathbf{Z}_2 \in \mathcal{W}_p(n - n_1, \mathbf{\Sigma})$; 6) Из свойства функции следа матрицы $\mathrm{tr}(ab^T) = b^T a$, следует что

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{Z} = \mathrm{tr}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k x_k^T\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[x_k x_k^T\right] = \sum_{k=1}^{n} x_k^T x_k \in \chi^2_{np}.$$

Следовательно, $\mathrm{tr}\,\mathbf{Z}$ как сумма $n$ независимых элементов, имеющих распределение $\chi$-квадрат, имеет распределение $\chi^2_{np}$.

Характеристическая функция $\varphi_S(\mathbf{T}) = M[\exp(i\,\mathrm{tr}(\mathbf{TS}))]$. Произвольной случайной величины S размером $p \times p$, где $\mathbf{T}$ — симметрическая матрица размером $p \times p$, для распределения Уишарта $\mathbf{Z} \in \mathcal{W}_p(n, \mathbf{\Sigma})$ определяется как $\varphi_Z(\mathbf{T}) = |\mathbf{E}_p - 2i\mathbf{\Sigma}\mathbf{T}|^{-n/2}$.

Нецентральное распределение Уишарта. Пусть $\mathbf{M} \neq 0$, тогда матрица $\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k^H$, где $x_k \in \mathcal{N}(\mu_k, \mathbf{\Sigma})$ имеет нецентральное распределение Уишарта $\mathbf{Z} \in \mathcal{W}_n(p, \mathbf{\Sigma}; \mathbf{\Delta})$ с $n$ степенями свободы, матрицей ковариации $\mathbf{\Sigma}$ и матрицей (параметром) нецентральности [15]:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{\mu}_k\mathbf{\mu}_k^H = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{M}^H.$$

Плотность распределения нецентрального распределения Уишарта $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_m(n, \mathbf{\Sigma}; \mathbf{\Delta})$ с $n$ степенями свободы, ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}$ и параметром нецентральности $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}^H\mathbf{M}$ при $n \geq p$ (при $n \leq p$ для матрицы $\mathbf{Z}$ не существует распределения) имеет вид [15]:

$$f_{\mathcal{W}}(\mathbf{Z}) = \frac{|\mathbf{A}|^{(n-p-1)/2}}{2^{np/2}\Gamma_p(n/2)|\mathbf{\Sigma}|^{n/2}}\,\mathrm{etr}\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{\Delta}\right)\right)_0 F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{4}\mathbf{\Delta}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Z}\right), \quad \mathbf{Z} > 0$$

где $\Gamma_n(\mathbf{Z})$ определена в (4); $\mathrm{etr}(\mathbf{M}) = \exp\mathrm{tr}(\mathrm{M}))$ $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}^H\mathbf{M}$ и ${}_0F_1(\alpha; \mathbf{A})$ — матричная гипергеометрическая функция, аргументом которой является матрица [15, 13].

### 4. Применение распределения Уишарта в технологии MIMO

В реальных условиях распространения сигналы с затуханием не являются независимыми. В системах беспроводной связи имеет место пространственная корреляция замираний между сигналами в различных антеннах. При преобразовании коэффициентов пространственной корреляции в корреляционные матрицы, соответственно, для приемной и передающей антенн, нормализованная матрица каналов может быть записана в виде $\mathbf{H} = \mathbf{R}_r^{1/2}\mathbf{H}_w\mathbf{R}_t^{1/2}$, где $\mathbf{R}_r = \mathbf{R}_r^{1/2}\mathbf{R}_r^{H/2}$ и $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_t^{1/2}\mathbf{R}_t^{H/2}$ положительно определенные эрмитовы корреляционные матрицы, соответственно, на приеме и передаче [2, 21, 24]. Кроме того, $\mathbf{H}_w \in \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{E}_{L_r} \otimes \mathbf{E}_{L_t})$ — ма-

трица размерностью $L_r \times L_t$, элементами которой являются независимые и одинаково распределенные комплексные гауссовские случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, что соответствует некоррелированным замираниям Релея.

Канал связи с корреляцией только между передающими антеннами: $\mathbf{R}_t \neq \mathbf{E}$, $\mathbf{R}_r = \mathbf{E}$. Пусть рассматривается только корреляция между передающими антеннами. Тогда получаем $\mathbf{H} = \mathbf{H}_w \mathbf{R}_t^{1/2}$, строки которой являются независимыми случайными векторами, но столбцы коррелируют с теми же средними значениями и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_t$. Таким образом, для релеевских замираний это означает, что матрица $\mathbf{W}$ имеет распределению Уишарта со степенью свободы $L_r$, размерностью $L_t$, и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_t$ [5, 11]. Можно доказать, что величина $\mathbf{W}_{kk}^{sc}$ имеет одномерное распределение Уишарта со степенью $(L_r - L_t + 1)$ свободы и дисперсией $\mathbf{R}_{t,kk}^{sc}$. Из одного из свойств распределения Уишарта это означает, что $\mathbf{W}_{kk}^{sc}$ является случайной величиной $\chi$-квадрат со степенью свободы $2(L_r - L_t + 1)$ и дисперсией $\sigma_k^2 = [2\mathbf{R}_{t,kk}^{sc}]^{-1} = (2[\mathbf{R}_t^{-1}]_{kk})^{-1}$. Следовательно, отношение сигнал/шум $\gamma_k$ в $k$-м потоке также является случайной величиной, распределенной по закону $\chi$-квадрат с функцией плотности распределения вероятности:

$$f(\gamma_k) = \frac{1}{2(L_r - L_t)!\sigma_k^2 \gamma} \left( \frac{\gamma_k}{2\sigma_k^2 \gamma} \right)^{L_r - L_t} \exp\left( -\frac{\gamma_k}{2\sigma_k^2 \gamma} \right), \qquad k = 1, \ldots, L_t.$$

Следовательно, математическое ожидание и начальный момент второго порядка определяются как

$$M\gamma_k = 2(L_r - L_t + 1)\sigma_k^2 \gamma = \frac{L_r - L_t + 1}{[\mathbf{R}_t^{-1}]_{kk}} \gamma, \qquad k = 1, \ldots, L_t$$

$$M\gamma_k^2 = 4(L_r - L_t + 1)(L_r - L_t + 2)\sigma_k^4 \gamma^2, \qquad k = 1, \ldots, L_t.$$

Поскольку алгоритм ZF декодирует каждый поток данных отдельно, то вероятность ошибки $P_{e|b}^{(k)}$ для каждого $k$-го потока может быть получена независимо. Анализ плотности распределения вероятностей показывает, что порядок разнесения $L_r - L_t$, определяемый как разность между числом приемных и передающих антенн влияет на величину вероятности ошибки. Очевидно, что увеличение числа приемных антенн может улучшить порядок разнесения, в то время как увеличение числа передающих антенн приводит к уменьшению порядка разнесения. С другой стороны, корреляция на передающих антеннах снижает эффективное отношение сигнал/шум и приводит к ухудшению производительности разнесения, которая измеряется множителем $\sigma_k^2 = (2[\mathbf{R}_t^{-1}]_{kk})^{-1}$.

## Заключение

Теоретическая и практическая значимость аппарата, основанного на распределении Уишарта, определяется возможностью решения ряда фундаментальных задач, относящихся к технологии MIMO. К числу таких задач относится, прежде всего, аналитическое определение пропускной способности канала связи и помехоустойчивость системы связи, использующей технологию MIMO. Особый интерес в упомянутом аспекте представляет распределение собственных значений случайных матриц Уишарта, так как именно оно лежит в основе распределения многих параметров производительности MIMO-систем.

Следует также отметить, что исчерпывающее знание статистических свойств канала, формализованное посредством распределения Уишарта, является необходимым условием для синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов пространственно-временной обработки сигналов на приемной стороне. Наконец, в задачах имитационного моделирования распределение Уишарта применяется для генерации статистически корректных реализаций канальных матриц $\mathbf{H}$ с целью проведения численных экспериментов и верификации теоретических результатов.

Таким образом, распределение Уишарта является фундаментальным математическим инструментом, предоставляющим адекватные средства для анализа, моделирования и проектирования высокоэффективных систем беспроводной связи стандарта MIMO, что приводит к необходимости дальнейшего его изучения.

**Литература**


1. *Аренс Х., Лёйтер Ю.* Многомерный дисперсионный анализ. Москва : Финансы и статистика, 1985. – 230 с.

2. *Бакулин М. Г., Варукина Л. А., Крейнделин В. Б.* Технология MIMO: принципы и алгоритмы. Москва : Горячая линия-Телеком, 2016. – 244 с.

3. *Жданов В. И.* Введение в методы решения некорректных задач. Самара : СГАУ, 2006. – 87 с.

4. *Шлома А. М., Бакулин М. Г., Крейнделин В. Б., Шумов А. П.* Новые алгоритмы формирования и обработки сигналов в системах подвижной связи / под ред. А. М. Шломы. Москва : Горячая линия-Телеком, 2008. – 344 с.

5. *Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Savischenko N. V.* Handbook of Mellin transforms. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2019. – 764 p.

6. *Cheng Wang, Edward K. S. Au, Ross D. Murch, Wai Ho Mow, Roger S. Cheng, Vincent Lau.* On the Performance of the MIMO Zero-Forcing Receiver in the Presence of Channel Estimation Error // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2007. – Vol. 6, No 3. – P. 805–810.

7. *Dong Z., Zhang J.-K., Gao X.* Asymptotic SEP analysis for optimally precoded large MIMO channels with ZF detection // 2015 IEEE International Conference on Communications (ICC), London, UK, 2015. – P. 4834–4839.

8. *Gershman A. B., Sidiropoulos N. D.* Space-time processing for MIMO communications. Chichester : John Wiley & Sons, Ltd, 2005. – 369 p.

9. *Gore D., Heath R. W., Paulraj A.* On performance of the zero forcing receiver in presence of transmit correlation // Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory, Lausanne, Switzerland. – 2002. – P. 159–165.

10. *Gvozdarev A. S., Alishchuk A. M., Kazakova M. A.* Closed-Form Capacity Reliability Analysis of Multiuser MIMO System in the Presence of Generalized Multipath Fading // Sensors. – 2023. – Vol. 23, No 5. Art. 2289.

11. *Härdle W. K., Simar L., Fengler M. R.* Applied Multivariate Statistical Analysis. Cham : Springer, 2024. – 610 p.

12. *Jankiraman M.* Space-time codes and MIMO systems. Norwood, MA : Artech House, 2004. – 327 p.

13. *Lin Jiu, Koutschan C.* Calculation and properties of zonal polynomials // Mathematics in computer science. 2020. Vol. 14, No 3. – P. 623–640.

14. *Ma X., Zhou Q.* Massive MIMO and its detection. Boca Raton, FL : CRC Press/Taylor & Francis, 2014. – 466 p.

15. *Muirhead R. J.* Aspects of Multivariate Statistical Theory. New York : Wiley, 1982. – 673 p.

16. MIMO System Technology for Wireless Communications / edited by George Tsoulos. Boca Raton, FL : CRC Press, 2006. – 378 p.

17. *Paulraj A., Nabar R., Gore D.* Introduction to space-time wireless communications. Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 278 p.

18. *Savischenko N. V.* Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory. Singapore : World Scientific, 2014. – 640 p.

19. *Steyn J. J. J., Roux H. S.* Approximations for the non-central Wishart distribution // S. Afr. Statist. J. (South African Statistical Journal). – 1972. Vol. 6, No 2. – P. 165–173.

20. *Tan W. Y., Gupta R. P.* On approximating the non-central Wishart distribution with Wishart distribution // Communication in Statistical Theory and Method. – 1983. Vol. 12, No 22. – P. 2589–2600.

21. *Tse D., Viswanath P.* Fundamentals of Wireless Communication. Cambridge : Cambridge University Press, 2005. 323 p.

22. *Wishart J.* Proofs of the Distribution Law of the Second Order Moment Statistics // Biometrika. – 1948. – Vol. 35, No 1/2. – P. 55–57.

23. *Wishart J.* The Generalised Product Moment Distribution in Samples from a Normal Multivariate Population // Biometrika. – 1928. – Vol. 20A, No 1/2. – P. 32–52.

24. *Xin Li, Zaiping Nie.* Performance losses in V-BLAST due to correlation // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2004. – Vol. 3. – P. 291–294.

25. *Xu R., Lau F. C. M.* Performance analysis for MIMO systems using zero forcing detector over Rice fading channel // 2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Kobe, Japan, 2005. – P. 4955–4958.

УДК 517.923

# КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

**С. М. Ситник[1,2], М. Г. Маслов[1]**

*[1]Белгородский государственный национальный исследовательский университет*
*[2]Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет*

**Аннотация.** Рассматриваются результаты, в которых изучаются и анализируются спектральные свойства для одного класса обобщений дискретных преобразований Фурье — модифицированных дискретных преобразований Фурье. В работе рассмотрено обобщение дискретного преобразования Фурье, получаемое за счёт специальных перестановок комплексных корней единицы. На основе детальных вычислений параметров преобразования выдвинуты несколько гипотез, которые требуют дополнительного анализа и эмпирической валидации.
**Ключевые слова:** ДПФ, модифицированные дискретные преобразования Фурье (МДПФ), матрица Вандермонда, собственные числа, собственные векторы, кратность, спектр, единичная окружность.

## Введение

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) представляет собой ключевой математический аппарат, широко используемый в различных прикладных областях. Его значимость обусловлена его применимостью в таких дисциплинах, как электродинамика и оптика, где ДПФ позволяет анализировать спектральные характеристики электромагнитных полей и оптических сигналов. В теории кодирования и криптографии ДПФ служит основой для построения надежных алгоритмов шифрования и дешифрования.

Кроме того, ДПФ находит применение при анализе систем связи, фильтрации сигналов, разработке алгоритмов сжатия информации и в задачах вычислительной томографии. Важно отметить, что задачи вычисления ДПФ тесно связаны с задачами циклической свертки, умножения больших чисел и полиномов, что определяет его универсальность. Существенное значение для практической реализации ДПФ имеют быстрые алгоритмы, такие как алгоритмы Гуда, Кули-Тьюки, Винограда и Рейдера [1–3], которые позволяют существенно снизить вычислительную сложность преобразования. В современной криптографии ДПФ играет основополагающую роль, обеспечивая безопасность информационных систем [3–4].

Несмотря на хорошо изученные алгоритмические и вычислительные аспекты ДПФ, вопросы, связанные со спектральной структурой этого преобразования, остаются во многом открытыми. В частности, до сих пор не получено строгого аналитического описания распределения собственных значений и их кратностей для произвольных размерностей, что указывает на актуальность углублённого анализа спектральных свойств преобразования.

## 1. Матрица дискретного преобразования Фурье и её структура

Одной из ключевых причин широкого применения ДПФ является его фундаментальная связь с рядом важных вычислительных задач. В частности, вычисление ДПФ можно представить как умножение вектора входных данных на матрицу размера $n \times n$, элементами которой являются

$$f_{ki} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left( -i \frac{2\pi kj}{n} \right), \qquad 0 \le k \le n-1, \qquad 0 \le j \le n-1.$$

В итоге, можно констатировать, что матрица ДПФ, исключая нормирующий коэффициент, имеет следующую структуру: начальная строка и начальный столбец содержат только единицы, вторая строка включает корни n-й степени из единицы, выстроенные в порядке возрастания, а последующие строки формируются путем последовательного применения операции возведения в степень к элементам второй строки. Фактически, с точностью до константы, данная матрица представляет собой матрицу Вандермонда (или степенной определитель).

Чтобы проиллюстрировать структуру матриц ДПФ, рассмотрим случаи при $n=3$ и $n=4$. Соответствующие матрицы имеют вид:

$$F_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix},\qquad F_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}.$$

Таким образом, несмотря на общеизвестность преобразования ДПФ, некоторые стандартные задачи для него имеют незнакомые широкому кругу специалистов свойства. Рассмотрим в качестве примера естественную задачу о нахождении спектра ДПФ при любом $n$. Решение этой задачи отсутствует в стандартной литературе по преобразованиям Фурье и нетривиально. Известно, что четвертая степень ДПФ является оператором тождественного преобразования, и собственные значения ограничены множеством $\{\pm 1,\pm i\}$. Подчеркнем, что определение кратностей этих собственных значений представляет собой сложную задачу. Аналогия с интегральным преобразованием Фурье, где эти значения полностью равноправны, приводит к гипотезе о том, что при $n=4m$ собственные значения ДПФ также должны быть равноправными и иметь кратность $m$.

Однако вычисления, проведенные для случая $n=4$ опровергают эту гипотезу: значения $-1,-i$ являются простыми, значение 1 имеет кратность 2, а значение $i$ отсутствует в спектре. Это нарушает симметрию спектра, типичную для непрерывного случая.

Приведем значения кратностей точек спектра ДПФ в виде табл. 1.

Таблица 1

*Значения кратностей точек спектра ДПФ*

| $n$ | 1 | $i$ | $-1$ | $-i$ |
|---|---|---|---|---|
| $4n$ | $n+1$ | $n-1$ | $n$ | $n$ |
| $4n+1$ | $n+1$ | $n$ | $n$ | $n$ |
| $4n+2$ | $n+1$ | $n$ | $n+1$ | $n$ |
| $4n+3$ | $n+1$ | $n$ | $n+1$ | $n+1$ |

Данный результат был для произвольного $n$ доказан знаменитым математиком Исаем Шуром (I. Schur) в 1921 году [5]. Основным моментом при доказательстве неожиданно является тот факт, что для нахождения указанных кратностей необходимо вычисление знаменитых квадратичных тригонометрических сумм Гаусса (они являются следами матрицы ДПФ) [6–8]. Нахождение точной формулы для квадратичных тригонометрических сумм заняло у Гаусса около 10 лет с 1801 по 1811, сам он написал про данную задачу, «что решение многих трудных вопросов теории чисел не отняло столько дней, сколько взяло лет работы решение вопроса об этом» [8].

Данный эффект связан о геометрической интерпретацией матрицы ДПФ: корни из единицы обходятся по единичной окружности на комплексной плоскости против часовой стрелки

(для обратного ДВФ — по часовой стрелке). Это открывает возможность рассмотрения других способов упорядочивания корней, что приводит к появлению класса модифицированных дискретных преобразований Фурье, см. [12–14].

**Определение.** Пусть задано множество корней $n$-й степени из единицы, упорядоченное произвольным образом в виде: $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$. В отличие от стандартного ДПФ, где используется определенный порядок корней $n$-й степени из единицы, введем понятие модифицированного дискретного преобразования Фурье (МДПФ). Для этого рассмотрим множество корней степени $n$ из единицы, упорядоченное произвольным образом ($r$ — перестановка). МДПФ определяется как оператор, представляемый матрицей размера $n \times n$, построенной с использованием этой перестановки $r$. Матрица МДПФ размера $n \times n$ выглядит следующим образом:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ r_1 & r_2 & ... & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & ... & r_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & ... & r_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, становится очевидно, что результат представляет собой матрицу Вандермонда, умноженную на некоторый коэффициент. При заданном «» общее количество различных модифицированных преобразований достигает $n!$, что означает наличие $n!$ различных МДПФ. Стандартное, классическое ДПФ является лишь одним из элементов этого множества, в то время как остальные являются новыми, ранее не рассматривавшимися преобразованиями. В частности, при $n = 4$ возникает 24 различных МДПФ, а при $n = 5$ их число возрастает до 120.

В рамках представленного исследования ставится задача изучения спектральных особенностей предложенных модифицированных преобразований Фурье (МДПФ). Основное внимание уделяется случаю $n = 4m$, где в принципе возможно равенство размерностей собственных подпространств (а при $n = 4$ — простой спектр. Существенно, что для классического ДПФ подобное поведение не характерно ни при каких размерностях. Соответственно, преобразования с симметричным спектром могут рассматриваться как более естественные, чем стандартное ДПФ, поскольку лучше соответствуют принципу равноправия точек спектра, свойственному непрерывному случаю. Предполагается, что упрощенные спектральные свойства указанных МДПФ могут повысить их эффективность в различных вычислительных приложениях.

В продолжение изложенного, представлены результаты компьютерного моделирования, выполненного для случая $n = 4$. Полученные 24 модифицированных преобразования Фурье (МДПФ) были сгруппированы на основе схожих спектральных характеристик. Для каждой сформированной группы мы указываем порядковый номер преобразования и перестановку корней, которая его порождает, а также кратко описываем основные характеристики, демонстрируя их на примере первого преобразования в этой категории.

1. $r = \{1, -i, -1, i\}$ — это обычное ДПФ, 2. $r = \{1, i, -1, -i\}$ — его обратное.

Квадрат преобразования является действительной матрицей перестановок

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

спектр кратный $\{-1, -i, 1, 1\}$, характеристический полином получен в явном виде: $x^4 - (1-i)x^3 - -(1+i)x^2 + (1-i)x + i$.

Найден также в явном виде набор действительных собственных векторов: $\{-1, 1, 1, 1\}$, $\{0, -1, 0, 1\}$, $\{2, 1, 0, 1\}$, $\{1, 0, 1, 0\}$.

3. $r=\{-1,i,1,-i\}$, 4. $r=\{-1,-i,1,i\}$.

Квадрат преобразования имеет вид:

$$F_r^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

спектр кратный $\{i,i,-i,1\}$, характеристический полином получен в явном виде: $x^4-(1+i)x^3+$ $+(1+i)x^2-(1+i)x+i$.

Найден также в явном виде набор комплексных собственных векторов: $\{0,-1,0,1\}$, $\{-1,-2i,1,0\}$, $\{i,1,-i,1\}$, $\{1,0,1,0\}$.

В случаях 1–4 перестановки состоят из корней, занумерованных по кругу, причём нумерация начинается с не первообразных корней –1, 1. Четвёртая степень преобразования есть единичная матрица. Построено явно диагонализирующее преобразование.

5. $r=\{i,1,-i,-1\}$, 6. $r=\{-i,1,i,-1\}$, 7. $r=\{i,-1,-i,1\}$, 8. $r=\{-i,-1,i,1\}$.

В случаях 5–8 перестановки состоят из корней, занумерованных по кругу, причём нумерация начинается с первообразных корней $i$, $-i$.

Рассмотрим подробнее преобразование (5). Степени преобразования имеют вид:

$$F_r^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-i&0\end{pmatrix},\ F_r^4=\begin{pmatrix}i&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&i\end{pmatrix},\ F_r^{16}=E.$$

***Это МДПФ имеет простой спектр, состоящий из значений $\sqrt[4]{i}$ !!!***

Характеристический полином получен в явном виде: $x^4-i$. С этого момента начинаются вычислительные затруднения у пакета MATHEMATICA, он не смог посчитать по одной компоненте каждого из собственных векторов по своему алгоритму. Например, первому собственному значению соответствует такой собственный вектор:

$$\left\{s,(1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}})i,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,1\right\},$$

где $s$ является первым по нумерации пакета wolfram mathematica корнем уравнения восьмой степени

$$s^8-8s^7+32s^6-24s^5+2s^4+24s^3+32s^2+8s+1=0.$$

9. $r=\{1,-1,i,-i\}$, 10. $r=\{1,-1,-i,i\}$, 11. $r=\{1,i,-i,-1\}$, 12. $r=\{1,-i,i,-1\}$.

Это оставшиеся перестановки, начинающиеся с 1.

Квадрат преобразования является комплексной матрицей следующего вида

$$F_r^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}+\frac{i}{2}&-\frac{i}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}+\frac{i}{2}&\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\\0&\frac{1}{2}-\frac{i}{2}&\frac{1}{2}&\frac{i}{2}\end{pmatrix}..$$

Аналогично устроены другие чётные степени. Для примера из этой группы рассмотрим преобразование (9).

***Это МДПФ имеет простой спектр*** $\left\{-\frac{\sqrt{7}+1}{4}-\frac{\sqrt{7}-1}{4}i,\frac{\sqrt{7}-1}{4}+\frac{\sqrt{7}+1}{4}i,-1,1\right\}$ ***!!!***

Характеристический полином получен в явном виде: $x^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)x^3-(1+i)x^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)x+i.$

Найден в явном виде набор комплексных собственных векторов:

$$\left\{0,\frac{1}{2}i\left((2+i)+\sqrt{7}\right),-\frac{1}{2}i\left((2-i)+\sqrt{7}\right),1\right\},\ \left\{0,-\frac{1}{2}i\left((-2-i)+\sqrt{7}\right),-\frac{1}{2}i\left((-2+i)+\sqrt{7}\right),1\right\},$$

$$\{-1,1,1,1\},\ \{3,1,1,1\}.$$

Осталось рассмотреть все оставшиеся преобразования.

13. $r=\{i,1,-1,-i\}$, 14. $r=\{-i,1,-1,i\}$, 15. $r=\{-1,1,i,-i\}$, 16. $r=\{-1,1,-i,i\}$, 17. $r=\{i,-1,1,-i\}$, 18. $r=\{-i,i,1,-1\}$, 19. $r=\{-i,-1,1,i\}$, 20. $r=\{i,-i,1,-1\}$, 21. $r=\{i,-i,-1,1\}$, 22. $r=\{-i,i,-1,1\}$, 23. $r=\{-1,i,-i,1\}$, 24. $r=\{-1,-i,i,1\}$.

Они анализируются аналогично уже рассмотренным.

Таким образом, получается довольно неожиданный результат, что подавляющее большинство МДПФ при $n=4$ устроены проще стандартного — они имеют простой спектр. Из вышеизложенных результатов вычислений следует, что лишь четыре преобразования имеют кратный спектр, как и классическое. Они отвечают случаям, когда в перестановке корни обходятся на единичной окружности по часовой стрелке или против (циклично), причём начиная не с первообразных корней. МДПФ, отвечающие обходу по окружности при старте с первообразных корней, по-видимому, обладают наиболее простыми спектральными свойствами.

В дополнение к анализу случая $n=4,$ были проведены вычислительные эксперименты для $n=5,$ общее количество МДПФ для которого составляет 120. С использованием пакета Mathematica были вычислены собственные значения и собственные векторы для всех 120 МДПФ. Например, если вторая строка МДПФ выглядит либо так:

$$\left\{1,\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{5}-1}{4}-i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{5}-1}{4}-i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right\},$$

либо так:

$$\left\{1,\frac{\sqrt{5}-1}{4}-i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{5}-1}{4}-i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right\},$$

то их собственные значения совпадают и имеют следующий вид: $\{-1,1,1,-i,i\}$. Собственное значение «1» имеет кратность 2.

Для дальнейшего изучения свойств МДПФ был исследован случай $n=8.$ Ввиду огромного числа возможных перестановок корней из единицы $(8!=40320),$ был проведен анализ лишь нескольких репрезентативных перестановок. В качестве отправной точки был рассмотрен стандартный ДПФ, соответствующий последовательности:

$$\left\{1,\frac{1+i}{\sqrt{2}},i,\frac{-1+i}{\sqrt{2}},-1,\frac{-1-i}{\sqrt{2}},-i,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Далее были исследованы несколько различных вариантов МДПФ, вычислен их спектр и собственные значения.

При произвольных $n$ доказана унитарность всех МДПФ. Следовательно, все их спектры лежат на единичной окружности, и получен явный вид обратных преобразований. Это несложно установить, пользуясь тем, что все МДПФ являются произведениями обычного ДПФ и соответствующих матриц перестановок. Отметим, что рассмотренные здесь матрицы используются в современных быстрых алгоритмах Гуда и Рейдера [1–3].

К сожалению, установить строго другие содержательные результаты о спектральных свойствах при произвольных $n$ не удаётся ввиду сложности доказательств. При помощи компьютера для небольших $n$ вычислены начальные степени преобразований, проекторы на собственные подпространства и резольвенты. Получены важные для дальнейшего Жордановы формы матриц.

Основные факты, которые подтверждаются вычислениями, выскажем в качестве гипотез.

**Гипотеза 1.** При $n = 4m$ все размерности собственных подпространств не совпадают только для МДПФ, отвечающим циклическим перестановкам, стартующим не с первообразных корней.

Если эта гипотеза верна, то за стандартный ДПФ выбран самый неудачный вариант с точки зрения вопроса о простоте устройства спектра.

Один частный случай этой гипотезы удалось строго доказать в работе [11]; рассмотрен случай, когда нумерация корней стартует с ближайшего по окружности корня к 1, притом циклически, по или против часовой стрелки. Этот корень всегда является первообразным.

**Гипотеза 2.** Все МДПФ имеют базис из вещественных собственных векторов.

Отметим, что для компьютерного расчёта более сложных случаев очень полезен оказывается пакет SAGE, наряду с компьютерным пакетом MATEMATICA. При помощи SAGE, например, можно дорешать встретившиеся в работе выше уравнения высоких степеней до явного представления корней.

Мы рассмотрели в этой работе варианты с перестановками корней, то есть столбцов матрицы обычного ДПФ. Можно рассмотреть дальнейшее обобщение, когда одновременно переставляются и строки, то есть мы отказываемся от того, чтобы МДПФ определялось матрицей Вандермонда. Такие преобразования также являются унитарными и частично исследованы на компьютере. Например, их удобно использовать для анализа сигналов, в которых редкие ненулевые элементы разбросаны среди нулевых. Тогда можно при помощи первой матрицы перестановки собрать все ненулевые элементы вместе, выполнить преобразование, а затем при помощи второй матрицы обратной перестановки восстановить первоначальный порядок следования элементов в массиве данных.

Введённые МДПФ позволяют обобщить тригонометрические суммы Гаусса.

**Определение.** Обобщённой квадратичной суммой Гаусса называется след соответствующего МДПФ, то есть

$$G(P,Q,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left( i\frac{2\pi}{n} p(k)q(k) \right), \;\; P = (p(0), p(1), ..., p(n-1)), \;\; Q = (q(0), q(1), ..., q(n-1)),$$

где $P$ и $Q$ — две произвольные перестановки множества чисел $(0,1,...,n-1)$.

**Гипотеза 3.** Обобщённые квадратичные суммы Гаусса могут быть вычислены в явном виде в терминах перестановок $P$ и $Q$, порождающих соответствующее МДПФ.

Автору представляется, что это очень сложная задача. Решение позволило бы находить размерности собственных подпространств МДПФ теоретически, без компьютера.

Представляет очевидный интерес изучение быстрых алгоритмов вычисления МДПФ по аналогии с обычным случаем.

В плане вычисления в явном виде базисов из собственных и присоединённых векторов МДПФ представляет существенный интерес обобщение результатов работы [10] для классического ДПФ. В этой работе собственные вектора строятся по явным формулам через функции Эрмита. Возможно, аналогичный результат для МДПФ потребует привлечения более сложных специальных функций. Для классического ДПФ аналогичные вопросы рассматриваются в [9].

В дальнейшей работе авторами предполагается приложение полученных результатов к анализу матричных систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dx}x(t) = F \cdot x(t),\ \ x(0) = \nu,$$

где $F$ — одна из рассмотренных в данной работе матриц МДПФ, $x(t)$, $\nu$ — векторы соответствующих размерностей. Как известно, формулы для представления решений этой задачи как раз используют вычисленные в этой работе для различных МДПФ собственные значения, собственные функции, нормальные формы Жордана для матриц $F$ в случае кратных собственных значений и другие вычисленные ингредиенты.

В заключение, принимая во внимание важность ДПФ для криптографии [4], результаты настоящей работы могут послужить основой для разработки альтернативных алгоритмов шифрования. В качестве концепции предлагается использовать один из вариантов МДПФ известного порядка для кодирования информации, при условии, что выбор конкретного варианта известен только авторизованным пользователям. Хотя формальная оценка криптостойкости данного подхода требует дальнейших исследований, быстрый рост числа возможных МДПФ с увеличением порядка $n$ (как $n!$) предполагает потенциальную стойкость к перебору, сравнимую с традиционными методами шифрования. Кроме того, данный подход обладает привлекательной особенностью — минимальным объемом изменений, необходимых для адаптации существующих программных решений, а именно только заменой матрицы ДПФ на соответствующую матрицу МДПФ. Однако следует отметить, что для полноценной оценки предложенного метода необходимы дальнейшие исследования, направленные на анализ его устойчивости к различным типам криптоатак.

## Заключение

В ходе проведённого исследования выполнен системный анализ спектральных свойств модифицированных дискретных преобразований Фурье, получаемых путём перестановки корней единицы в матрице классического ДПФ. Полученные результаты позволили сформулировать ряд гипотез, касающихся закономерностей распределения собственных значений и структуры собственных подпространств. В частности, показано, что особенности спектра зависят от типа перестановки корней: циклические перестановки, начинающиеся с не первообразных корней, приводят к появлению кратных собственных значений, тогда как перестановки, стартующие с первообразных корней, обеспечивают простую спектральную структуру. Доказана унитарность всех МДПФ, а также установлено, что для них возможна конструкция базиса из вещественных собственных векторов.

## Литература


1. *Блэйхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М. : Мир, 1989. – 432 с.

2. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свёрток. – М. : Радио и связь, 1985. – 280 с.

3. *Ноден П., Китте К.* Алгебраическая алгоритмика. – М. : Мир, 1999. – 368 с.

4. *Черемушкин А. В.* Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии. – М. : МЦНМО, 2002. – 192 с.

5. *Schur I.* Über die Gaussschen Summen // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. – 1921. – S. 147–153.

6. *Berndt B. C., Evans R. J., Williams K. S.* Gauss and Jacobi Sums. – New York : John Wiley & Sons, 1998. – XIII, 583 p.

7. *Гаусс К. Ф.* Труды по теории чисел. – М. : Издательство АН СССР, 1959. – 424 с.

8. *Делоне Б. Н.* Работы Гаусса по теории чисел // В кн.: Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. – М. : Издательство АН СССР, 1959. – Приложение.

9. *Matveev V. B.* Intertwining relations between the Fourier transform and discrete Fourier transform // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 633–657.

10. *Mehta M. L.* Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform // Journal of Mathematical Physics. – 1987. – Vol. 28. – P. 781–785.

11. *Певный А. Б., Ситник С. М.* Модифицированное дискретное преобразование Фурье и его спектральные свойства // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Вып. 4 (25). – С. 15–19.

12. *Ситник С. М.* Модифицированное дискретное преобразование Фурье // Вестник Воронежского института МВД России. – 2006. – № 7. – С. 196–201.

13. *Ситник С. М.* Компьютерный анализ спектральных свойств модифицированных дискретных преобразований Фурье // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2007. – Т. 9, № 1. – С. 98–103.

14. *Ситник С. М.* Перестановочные преобразования Фурье // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева: Тезисы докладов. – Санкт-Петербург, 24–29 сентября 2007 г. – Санкт-Петербург, 2007. – С. 69–71.

УДК 519.6

# ИССЛЕДОВАНИЕ УГОНА ВОД ТАГАНРОГСКОГО ЗАЛИВА НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ И СРЕДСТВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Н. А. Скориков, А. Е. Чистяков, А. В. Никитина**

*Донской государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается редкий по наглядности эпизод штормового угона вод Таганрогского залива Азовского моря в конце 2017 года и, связанный с ним, перенос донной взвеси. Цель исследования — построить и численно реализовать математическую модель ветрового сгона воды. Математическая модель представляет собой задачу аэродинамики и транспорта загрязняющих веществ (ЗВ). Расчетная область — фрагмент Таганрогского залива. Численная реализация выполнена на равномерной сетке с использованием явных и полуявных конечно-разностных схем. Проведён численный эксперимент с устойчивым восточным ветром штормовой силы, соответствующим метеоусловиям 2017 года. Полученные результаты согласуются с наблюдениями и демонстрируют возможность использования модели и разработанного программного модуля как основы для более детальных сценарных экспериментов.

**Ключевые слова:** Таганрогский залив, сгонно-нагонные явления, ветровой сгон воды, мелководная акватория, уравнения мелкой воды, перенос взвешенных частиц, загрязняющие вещества, адвекция–диффузия–оседание, прибрежные системы, приземный слой атмосферы, численное моделирование расчётов, оценка инженерных рисков, прибрежные инфраструктуры.

## Введение

Таганрогский залив Азовского моря — мелководная акватория, остро реагирующая на ветровые воздействия. При длительных штормах здесь наблюдаются ярко выраженные сгонно-нагонные явления: вода уходит от одного берега и накапливается у другого, обнажается дно, по которому ещё накануне проходили судовые ходовые пути.

В конце 2017 года при сильном восточном ветре в Таганрогском заливе был зафиксирован эпизод значительного сгона воды: вдоль побережья на отдельных участках дно обнажилось настолько, что по бывшему дну залива могли передвигаться автомобили и пешеходы. Этот редкий по наглядности случай делает залив естественной «лабораторией» для исследования ветрового воздействия и связанного с ним транспорта взвешенных частиц — донного ила, песка, а по аналогии и атмосферной пыли.

Классические основы численного решения уравнений газо- и гидродинамики, лежащие в основе современных моделей течений в атмосфере и океане, изложены в работах Самарского А. А. [1] и представителей его научной школы, посвященных применению разностных методов для решения задач газовой динамики, исследованию вопросов устойчивости и аппроксимации конечно-разностных схем. Развитые ими подходы активно используются при построении алгоритмов для численной реализации моделей мелкой воды, а также задач диффузии–конвекции, сопряжённых задач переноса примесей.

Существенный вклад в математическое моделирование динамики атмосферы, общей циркуляции и переноса газовых примесей внесены Марчуком Г. И. [2, 3] и его учениками. В их трудах по изучению глобальных переносов примеси в атмосфере рассматриваются модели переноса аэрозолей и газовых загрязнителей в атмосфере, разностные схемы для их дискретизации, а также всевозможные методы расщепления. Эти исследования формируют теоретическую базу для интерпретации задач переноса взвеси в терминологии аэродинамики приземного слоя. Подходы к моделированию гидродинамики и транспорта загрязняющих веществ в

мелководных и прибрежных водоёмах, а также суперкомпьютерные реализации соответствующих моделей изложены в ряде работ [2–6, 9–14], вопросы аппроксимации и оценки погрешности разностных схем диффузионного типа рассмотрены в [7, 8].

Для задач, требующих учёта взаимодействия турбулентного течения и акустических/аэроакустических эффектов, развиты высокопроизводительные численные технологии на основе уравнений Навье — Стокса и интегральных соотношений Фокса–Уилльямса — Хокингса. В частности, в работе Бахвалова П. А., Якобовского М. В. и др. [15] предложен метод расчёта акустических возмущений в дальнем поле течения, ориентированный на использование неструктурированных сеток и суперкомпьютерных вычислений. Аэродинамические расчёты для областей сложной формы, таких как идеализированные горные ущелья, рассмотрены в работе Каменецкого Е.С. с соавторами [16].

Цель настоящей работы — построить и численно реализовать модель ветрового сгона воды. Математическая модель представляет собой задачу аэродинамики и транспорта загрязняющих веществ (ЗВ). При её разработке использовались классические подходы, изложенные в монографии [19]. Модель ориентирована на качественное описание явления и может быть использована как основа для более подробных численных экспериментов.

## Постановка задачи

Рассматривается мелководная акватория, представляющая собой процесс транспорта загрязняющего вещества (ЗВ) фрагмент Таганрогского залива (см. рис. 1) (прямоугольная областью длиной $L$ и шириной $B$). Глубина покоя моря $H_0$ предполагается постоянной. Над водной поверхностью действует однородное по площади ветровое поле с постоянной скоростью $\mathbf{U}_a$, направленной вдоль оси $x$ (вдоль залива). Ветровое воздействие приводит к формированию поверхностного течения и градиента уровня воды $\eta(x, y, t)$. При достаточно сильном и длительном ветре в подветренной части акватории уровень снижается, а в наветренной — повышается, что и наблюдается при сгонно-нагонных явлениях. В толще воды и у дна присутствуют взвешенные частицы (взвесь донных отложений, ил), их движение можно описывать так же, как транспорт аэрозольных частиц в приземном слое атмосферы: перенос течением, турбулентное перемешивание и выпадение (оседание).

*Рис. 1. Спутниковый снимок района исследования*

Движение водной среды опишем двумерной системой мелкой воды:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(H_0 + \eta)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(H_0 + \eta)v] = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial \eta}{\partial y}+\nu_h\Delta v+\frac{\tau_x}{\rho_w(H_0+\eta)}-\frac{\tau_{bx}}{\rho_w(H_0+\eta)},\qquad(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial \eta}{\partial y}+\nu_h\Delta v+\frac{\tau_y}{\rho_w(H_0+\eta)}-\frac{\tau_{by}}{\rho_w(H_0+\eta)}.$$

Здесь $u,v$ — горизонтальные компоненты скорости течения водного потока; $g$ — ускорение свободного падения; $\nu_h$ — коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости; $\tau_y$ $\tau_x$ — проекции касательных напряжений ветра; $\tau_{bx}$, $\tau_{by}$ — донные касательные напряжения; $\rho_w$ — плотность воды.

Опишем ветровое и донное трение. Касательное напряжение ветра зададим по формуле:

$$\boldsymbol{\tau}=\rho_a C_d\,|\,\mathbf{U}_a\,|\,\mathbf{U}_a,$$

где $\rho_a$ — плотность воздуха, $C_d$ — коэффициент аэродинамического сопротивления, $\mathbf{U}_a$ — скорость ветра на высоте 10 м.

Донное трение представим формулой квадратичного сопротивления:

$$\boldsymbol{\tau}_b=\rho_w C_f\sqrt{u^2+v^2}\,(u,v),$$

где $C_f$ — коэффициент донного трения.

Опишем транспорт взвешенных частиц (аналогия с пылью). Изменение концентрации взвешенных частиц $C(x,y,t)$ опишем уравнением адвекции–диффузии–оседания:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=K_h\Delta C-w_s\frac{C}{H_0+\eta}+S(x,y,t),\qquad(2)$$

где $K_h$ — коэффициент горизонтального перемешивания, $w_s$ — скорость оседания частиц (аналог скорости гравитационного выпадения пыли), $S$ — функция источника частиц (подъём донного материала при сдвиговых напряжениях выше порогового).

Модель базируется на математических моделях транспорта аэрозолей в приземном слое атмосферы, рассмотренных в работах [1–3]. Ветер создаёт сдвиг, поднимает частицы в поток, затем они переносятся и частично осаждаются.

Опишем геометрию расчётной области, а также зададим граничные условия. Пусть область, $D=\{(x,y):0\le x\le L,0\le y\le B\}$ соответствует условному «каналу» Таганрогского залива. На боковых береговых границах задаём условия непротекания:

$$u\bullet n_x+v\bullet n_y=0.$$

На открытой границе (со стороны Азовского моря) задаём либо уровень $\eta=0,$ либо радиационные условия, пропускающие волны наружу. Для концентрации взвеси на берегах принимаем нулевой поток:

$$\frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}}=0,$$

а на открытой границе — либо фиксированное фоновое значение $C=C_0,$ либо тоже нулевой поток.

Зададим начальное условие: спокойная вода $\eta(x,y,0)=0,$ нулевые скорости, начальное распределение концентрации:

$$C(x,y,0)=C_0(x,y),\quad (x,y)\in D.\qquad(3)$$

### Численный эксперимент

Для реконструкции штормового угона Таганрогского залива в 2017 году зададим устойчивый восточный ветер со скоростью 20–25 м/с, дующий вдоль оси залива в течение 10–12 часов. При анализе метеоусловий в районе исследуемой акватории было установлено, что именно

такое направление ветра приводит к уходу воды из восточной части Таганрогского залива и её накоплению в западной.

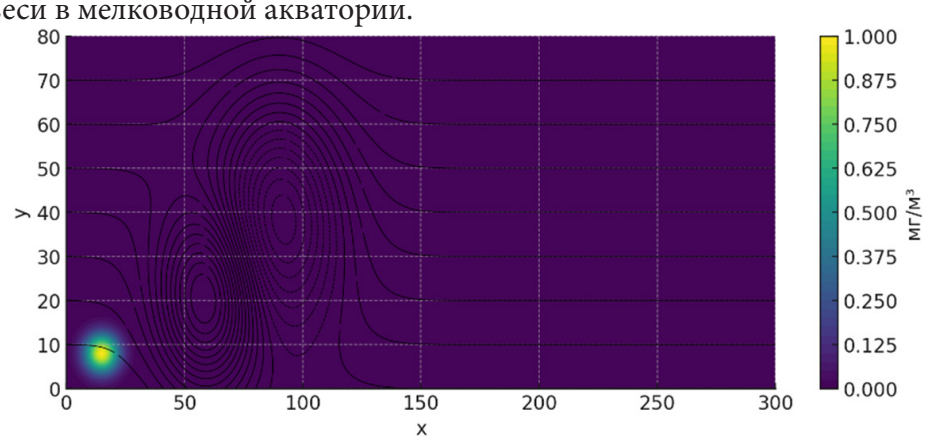
Численное решение системы уравнений выполняется на равномерной сетке с шагами по пространству $\Delta x$, $\Delta y$, временная интеграция — явной или полуявной конечно-разностными схемами с шагом $\Delta t$, удовлетворяющим условию устойчивости по числам Куранта. Полученные поля $\eta(x, y, t)$ показывают постепенное формирование наклона свободной поверхности: в подветренной зоне уровень уменьшается на десятки сантиметров и более, в наветренной — повышается. При достаточно сильном ветре и мелкой акватории снижение уровня может достигать величин сравнимых с глубиной покоя, что приводит к обнажению дна. Это согласуется с наблюдениями угона вод 2017 года, когда в отдельные часы по бывшему дну залива перемещались машины и пешеходы.

Параллельно вычисляется изменение концентрации взвеси $C(x, y, t)$. В подветренной части, где сдвиговые напряжения велики, источник $S(x, y, t)$ становится положительным — донный материал поднимается в толщу воды. Поток уносит взвесь в наветренную часть залива, где по мере ослабления течения и возрастания глубины частицы оседают, формируя зоны отложений повышенной концентрации.

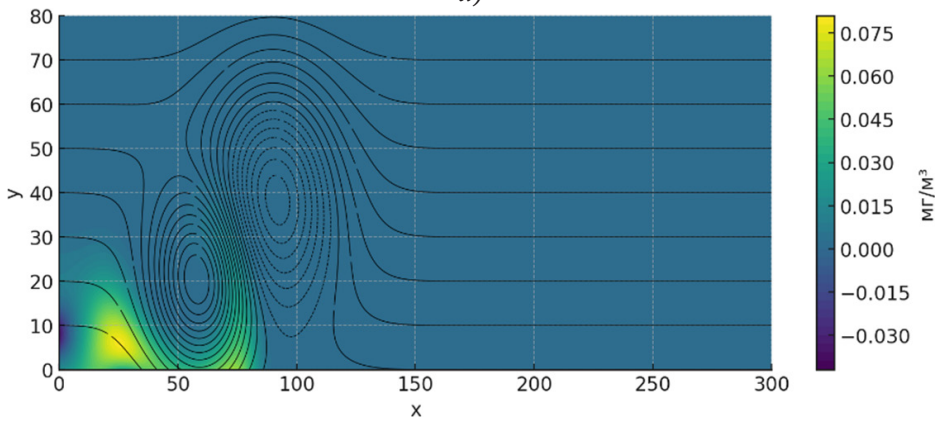
Такие сценарные эксперименты иллюстрируют аналогию с решением задачи транспорта атмосферной пыли: сильный продольный ветер поднимает частицы с поверхности и переносит их на значительные расстояния.

Для иллюстрации аналогичной структуры поля концентрации загрязняющего вещества (ЗВ) на рис. 2 приведены результаты численного моделирования переноса загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы над прибрежной зоной г. Таганрога [1].

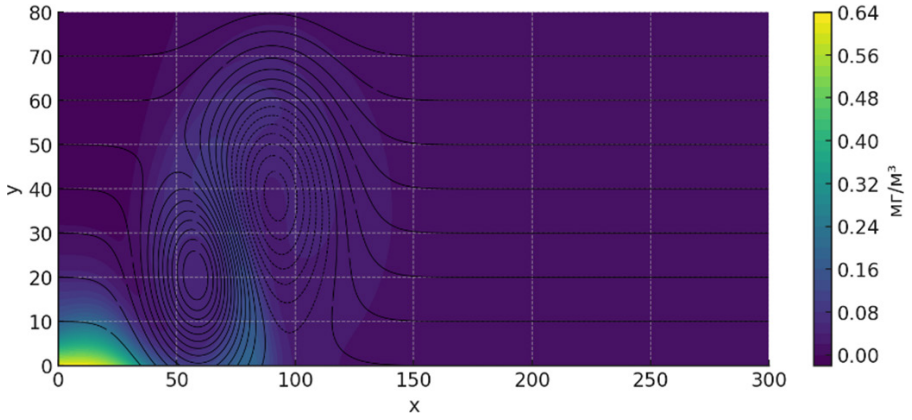
Характер распределения концентрации (область повышенных значений в следе за источником, последующее сглаживание фронта) качественно повторяет гидрофизический процесс переноса взвеси в мелководной акватории.




*а)*




*б)*




*в)*

*Рис. 2. Поле концентраций ЗВ через а)0, б)10 и в)100 с. после начала выброса*

Несмотря на гидродинамическую природу явления, его можно интерпретировать в аэродинамических терминах:

• ветер над заливом играет роль «движущей стенки», создающей сдвиг в приземном (приповерхностном) слое;

• за счёт этого сдвига формируется поток в тонком слое жидкости, подобно тому как формируется пограничный слой в аэродинамике изучаемого процесса;

• транспорт взвешенных частиц подчиняется тем же уравнениям, что и перенос пыли в атмосфере: адвекция, турбулентное перемешивание, гравитационное оседание.

## Заключение

В работе предложена модель ветрового сгона воды в Таганрогском заливе, используемая для реконструкции штормового угона вод Таганрогского залива 2017 года, как результат продолжительного воздействия сильного ветра (более 37 м/с) вдоль акватории. На основе системы уравнений мелкой воды и уравнения транспорта взвешенных частиц показано, что:

• устойчивый ветер восточного направления формирует значительный градиент уровня, приводящий к обнажению дна в подветренной части залива;

• связанный с этим поток способствует подъёму донных частиц и их переносу в наветренную область;

• описание изучаемого процесса переноса ЗВ базируется на математических моделях аэродинамики и транспорта пыли в приземном слое атмосферы;

• разработанный на языке C++ программный модуль (ПМ) представляет собой численную реализацию взаимосвязанных математических моделей аэродинамики и транспорта вещества, позволяет проводить вычислительные эксперименты в широком диапазоне параметров.

Разработанный ПМ может быть расширен для моделирования процессов аэродинамики и транспорта взвеси в областях сложной формы (Таганрогский залив, Азовское море). Расчёты нестационарных полей воздушной среды могут использоваться для оценки инженерных рисков при эксплуатации и перестройки объектов прибрежной инфраструктуры.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-71-20001, https://rscf.ru/project/25-71-20001/

**Литература**


1. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. Учебное пособие. 3-е изд., доп. – М. : Наука, 1992. – 424 с.

2. *Марчук Г. И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана. – Л. : Гидрометеоиздат, 1974. – 300 с.

3. *Марчук Г. И., Алоян А. Е.* Глобальный перенос примеси в атмосфере // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. – 1995. – Т. 31, № 5. – С. 597–606.

4. *Белова Ю. В., Филина А. А., Чистяков А. Е.* Прогнозирование динамики летних видов фитопланктона на основе методов усвоения спутниковых данных // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2024. – 8(4). P. 27–34.

5. *Лященко Т. В., Чистяков А. Е., Никитина А. В.* Моделирование процесса распространения загрязнения водной экосистемы фосфатами // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2023. – 7(4). – P. 47–53.

6. *Сухинов А. И., Кузнецова И. Ю.* Математическая модель транспорта трехкомпонентной взвеси // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2023. – 7(3). – P. 39–48.

7. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V.* Error estimate for diffusion equations solved by schemes with weights // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2014. – V. 6, No 3. – P. 324–331.

8. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Бондаренко Ю. С.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 6–13.

9. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Belova Y. V., Nikitina A. V., Sumbaev V. V., Semenyakina A. A.* Supercomputer modeling of hydrochemical condition of shallow waters in summer taking into account the influence of the environment // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – V. 910. – P. 336–351.

10. *Sukhinov A. I., Nikitina A. V., Chistyakov A. E., Semenov I. S., Semenyakina A. A., Khachunts D. S.* Mathematical modeling of eutrophication processes in shallow waters on multiprocessor computer system // В сборнике: PCT 2016 Parallel Computing Technologies. Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies. – 2016. – P. 320–333.

11. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Сидорякина В. В., Проценко Е. А.* Экономичные явно-неявные схемы решения многомерных задач диффузии-конвекции // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 435–445.

12. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Кузнецова И. Ю., Атаян А. М., Никитина А. В.* Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 2. – С. 85–100.

13. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Никитина А. В., Атаян А. М., Литвинов В. Н.* Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях // Математическое моделирование. – 2023. – Т. 35, № 3. – С. 35–58.

14. *Сухинов А. И., Никитина А. В., Атаян А. М., Литвинов В. Н., Белова Ю. В., Чистяков А. Е.* Суперкомпьютерное моделирование гидробиологических процессов прибрежных систем // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 1. – С. 81–103.

15. *Бахвалов П. А., Козубская Т. К., Корнилина Е. Д., Морозов А. В., Якобовский М. В.* Технология расчета акустических возмущений в дальнем поле течения // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 11. – С. 33–47.

16. *Каменецкий Е. С., Радионов А. А.* Математическое моделирование аэродинамики идеализированных горных ущелий // Геология и геофизика Юга России. – 2024. – Т. 14, № 3.

17. *Кудинов Н. В., Филина А. А., Никитина А. В., Бондаренко Д. В., Развеева И. Ф.* Моделирование вертикальных движений морской воды в стратифицированных водоемах // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2023. – 23(2). – С. 212–224.

18. *Литвинов В. Н., Руденко Н. Б., Грачева Н. Н.* Разработка модели параллельно-конвейерного вычислительного процесса для решения системы сеточных уравнений // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2023. – 23(3). – С. 329–339.

19. *Чистяков А. Е., Хачунц Д. С.* Моделирование процессов переноса загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы прибрежной зоны. Монография. – 2023. – С. 19–61.

УДК 539.374

# К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

**Д. И. Соломатин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В рамках теории малых упругопластических деформаций предложен алгоритм численного решения задачи определения упругопластического состояния толстостенной цилиндрической трубы, подверженной комбинированной нагрузке. Пластические деформации и напряжения связаны нормальным законом. Рассматриваются гладкие нелинейные функции пластичности. Параметры материала считаются постоянными величинами.

**Ключевые слова:** нелинейное условие пластичности, ассоциированный закон пластического деформирования, теория малых деформаций, сжимаемое упругопластическое тело.

## Введение

Имеется большое количество работ, в которых анализируется упругопластическое состояние цилиндрических тел. Так в работе [1] в рамках теории пластического течения и условия пластичности Мизеса изучалось влияние упругой сжимаемости материала и коэффициента линейного упрочнения на напряженно-деформированное состояние упругопластического пространства с цилиндрической полостью. Было показано сильное влияние упругой сжимаемости материала и незначительное влияние линейного упрочнения. Большая часть работ связана с выбором кусочно-линейных функций пластичности [2–5], что позволяет получить аналитическое решение ряда задач. Выбор нелинейных функций пластичности, в основном, требует численного решения задач [6–8].

## Постановка задачи

Рассматривается задача определения внутренних (искомых) параметров состояния цилиндрических тел в зависимости от значения внешних параметров системы.

## Принятые обозначения

$a$ — внутренний радиус цилиндра,
$b$ — внешний радиус цилиндра,
$E$ — модуль Юнга,
$\nu$ — коэффициент Пуассона,
$k$ — предел пластичности,
$p_a$ — давление на границе $\rho = a$,
$p_b$ — давление на границе $\rho = b$,
$p_a$ — давление на границе $\rho = a$,
$\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$ — компоненты тензора напряжений,
$\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ — компоненты тензора деформаций,
$\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$ — компоненты тензора пластических деформаций,
$u$ — радиальная компонента вектора перемещений,
$\alpha$ — параметр пластической сжимаемости.

## Основные соотношения

Математическая модель включает:

уравнение равновесия в собственной системе отсчета [2] (уравнение движения в инерциальной системе отсчета [3])

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=-m\rho;$$

соотношения закона Гука

$$E\varepsilon_\rho^e=\sigma_\rho-\nu(\sigma_\theta+\sigma_z),$$
$$E\varepsilon_\theta^e=\sigma_\theta-\nu(\sigma_\rho+\sigma_z),$$
$$E\varepsilon_z^e=\sigma_z-\nu(\sigma_\rho+\sigma_\theta).$$

условие совместности полных деформаций

$$\rho\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho}+\varepsilon_\theta-\varepsilon_\rho=0.$$

В пластической области дополнительно условие пластичности

$$F(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z)=k,$$

пластические деформации

$$\varepsilon_\rho^p=\varepsilon_\rho-\varepsilon_\rho^e,$$
$$\varepsilon_\theta^p=\varepsilon_\theta-\varepsilon_\theta^e,$$
$$\varepsilon_z^p=\varepsilon_z-\varepsilon_z^e.$$

также

$$\varepsilon_\rho^p=\frac{\partial F}{\partial\sigma_\rho},$$
$$\varepsilon_\theta^p=\frac{\partial F}{\partial\sigma_\theta},$$
$$\varepsilon_z^p=\frac{\partial F}{\partial\sigma_z}.$$

## Упругое состояние цилиндра

Если в начальном состоянии (до момента нагружения) в диске необратимые деформации равны нулю, то компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в упругой области диска определяются по формулам [9]

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho=A-\frac{B}{\rho^2}-\frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{m\rho^2}{8},\\
&\sigma_\theta=A+\frac{B}{\rho^2}-\frac{1+2\nu}{1-\nu}\frac{m\rho^2}{8},\\
&\sigma_z=\nu(\sigma_\rho+\sigma_\theta),\\
&Eu=(1+\nu)\rho\left((1-2\nu)A+\frac{B}{\rho^2}-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{m\rho^2}{8}\right).
\end{aligned}\qquad(1)$$

Из (1) находим

$$\sigma_\rho|_{\rho=a}=A-\frac{B}{a^2}-\frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{ma^2}{8},$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=b}=A-\frac{B}{b^2}-\frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{mb^2}{8}.$$

$$Eu|_{\rho=a}=(1+\nu)a\left((1-2\nu)A+\frac{B}{a^2}-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{ma^2}{8}\right),$$

$$Eu|_{\rho=b}=(1+\nu)b\left((1-2\nu)A+\frac{B}{b^2}-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{mb^2}{8}\right). \tag{2}$$

Для граничных условий

$$u|_{\rho=a}=u_a,\quad u_{\rho=b}=u_b, \tag{3}$$

имеем

$$A=\frac{a^2+b^2}{1-\nu}\frac{m}{8}+\frac{bEu_b-aEu_a}{(1+\nu)(1-2\nu)(b^2-a^2)},$$

$$B=-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{ma^2b^2}{8}+\frac{ab(bEu_a-aEu_b)}{(1+\nu)(b^2-a^2)}.$$

Выберем функцию пластичности [10].

$$F=\left(\frac{(2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)^{2n}+(2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1)^{2n}+(2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2)^{2n}}{2+2^{2n}}\right)^{1/2n}=k. \tag{4}$$

В упругой области $\sigma_{eq}=F$.

Если $n=1$, то из (4) следует условие

$$(\sigma_\rho-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\rho)^2=2k^2.$$

Пусть

$$Eu|_{\rho=a}=0,$$

$$Eu|_{\rho=b}=0, \tag{5}$$

Тогда из (4) (5) и (1), (2) следует

$$F|_{\rho=a}=\frac{(1-2\nu)^2(b^2-a^2)^2}{1-\nu}\frac{m^2}{8}=2k^2,$$

и, учитывая, что $m\geq 0$ находим условие зарождения пластической области

$$m=\frac{4k(1-\nu)}{(1-2\nu)(b^2-a^2)}. \tag{6}$$

На рис. 1 приведены графики напряжений и перемещений, когда выполняется (6)

Для граничных условий

$$\sigma_\rho|_{\rho=a}=-p_a,\quad \sigma_\rho|_{\rho=b}=-p_b,$$

имеем

$$A=\frac{3-2\nu}{1-\nu}(b^2+a^2)\frac{m}{8}+\frac{a^2p_a-b^2p_b}{b^2-a^2},$$

$$B=\frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{b^2a^2m}{8}+\frac{p_a-p_b}{b^2-a^2}a^2b^2. \tag{7}$$

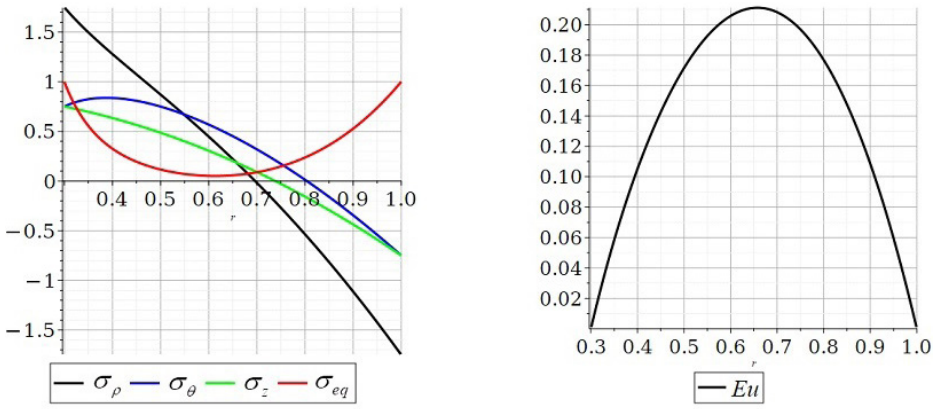



*Рис. 1.* $\nu = 0.3, m = 7.6923$

Пусть

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=a} = 0, \quad \sigma_\rho\,|_{\rho=b} = 0, \tag{8}$$

тогда, учитывая (7), (8), (1) имеем

$$F\,|_{\rho=a} = \left(\frac{(1-2\nu)a^2 + (3-2\nu)b^2}{1-\nu}\right)^2 (1-\nu+\nu^2)\frac{m^2}{8} = 2k^2, \tag{9}$$

Учитывая, что $m \geq 0$ из (9) находим условие зарождения пластической области

$$m = \frac{4(1-2\nu)k}{((1-2\nu)a^2 + (3-2\nu)b^2)\sqrt{1-\nu+\nu^2}}, \tag{10}$$

На рис. 2 приведены графики напряжений и перемещений, когда выполняется (10).

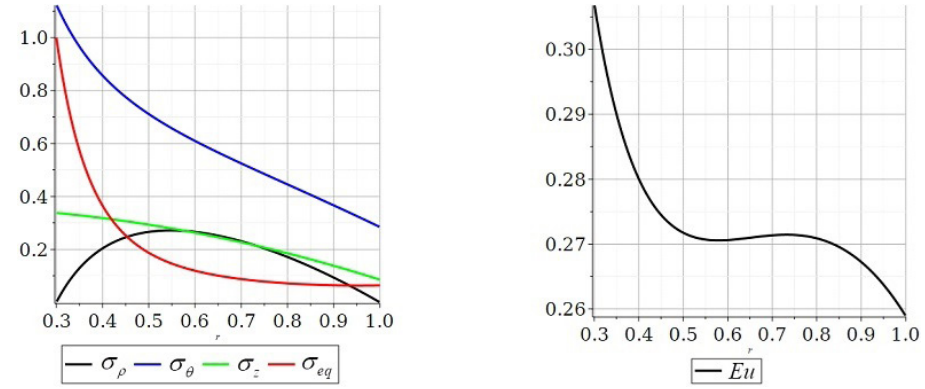



*Рис. 2.* $\nu = 0.3, m = 1.2932$

Для граничных условий

$$Eu\,|_{\rho=a} = Eu_a, \quad \sigma_\rho\,|_{\rho=b} = -p_b,$$

имеем

$$A = \frac{3-2\nu}{1-\nu}(b^2+a^2)\frac{m}{8} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2},$$

$$B = \frac{3-2\nu}{1-\nu}\frac{b^2 a^2 m}{8} + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}a^2 b^2.$$

Пусть

$$Eu\,|_{\rho=a} = 0, \quad \sigma_\rho\,|_{\rho=b} = 0, \tag{11}$$

тогда, учитывая (11), (3), (5) имеем

$$F|_{\rho=a}=\left(\frac{(1-2\nu)(b^2-a^2)\left((1-2\nu)^2a^2+(3-2\nu)b^2\right)}{(1-\nu)((1-2\nu)a^2+b^2)}\right)^2\frac{m^2}{8}=2k^2, \tag{12}$$

Учитывая, что $m\geq 0$ из (12) находим условие зарождения пластической области

$$m=\frac{4(1-\nu)((1-2\nu)a^2+b^2)k}{(1-2\nu)((3-2\nu)b^4-(1-2\nu)a^4-2a^2b^2)}.$$

На рис. 3 приведены графики напряжений и перемещений, когда выполняется (11).

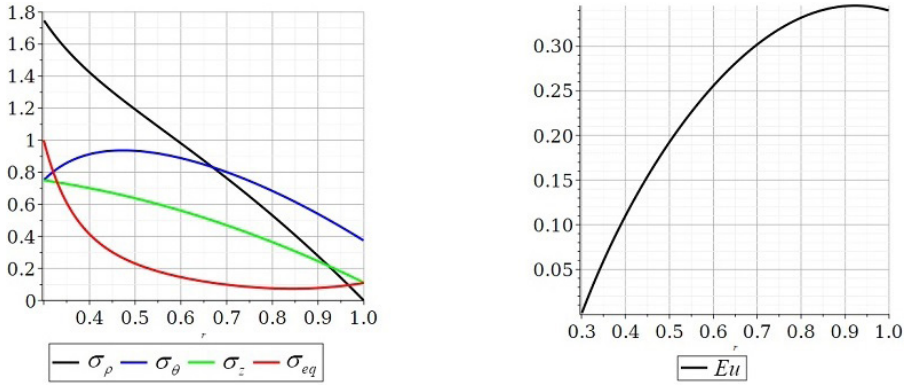



*Рис. 3.* $\nu=0.3, m=3.2714$

Для граничных условий

$$Eu|_{\rho=b}=Eu_b,\quad \sigma_\rho|_{\rho=a}=-p_a,$$

имеем

$$\begin{aligned}A&=\frac{(3-2\nu)a^4+(1-2\nu)b^4}{(1-\nu)((1-2\nu)b^2+a^2)}\frac{m}{8}+\frac{bEu_b-(1+\nu)a^2p_a}{(1+\nu)((1-2\nu)b^2+a^2)},\\ B&=\frac{(1-2\nu)(b^2-(3-2\nu)a^2)}{(1-\nu)((1-2\nu)b^2+a^2)}\frac{a^2b^2m}{8}+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)p_ab+Eu_b}{(1+\nu)((1-2\nu)b^2+a^2)}a^2b.\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть

$$Eu|_{\rho=b}=0,\quad \sigma_\rho|_{\rho=a}=0, \tag{14}$$

тогда, учитывая (13), (14), (3) имеем

$$F|_{\rho=a}=\frac{((1-2\nu)(b^2-a^2))^4(1-\nu+\nu^2)}{((1-\nu)(a^2+(1-2\nu)b^2))^2}\frac{m^2}{8}=2k^2, \tag{15}$$

$$F|_{\rho=b}=\frac{(1-2\nu)^2((3-2\nu)a^2+(1-2\nu)b^2)^2(b^2-a^2)^2}{((1-\nu)(a^2+(1-2\nu)b^2))^2}\frac{m^2}{8}=2k^2, \tag{16}$$

Учитывая, что $m\geq 0$ из (15) и (16) находим условие зарождения пластической области

$$m_a=\frac{4(1-\nu)((1-2\nu)b^2+a^2)k}{(1-2\nu)\sqrt{1-\nu-\nu^2}(b^2-a^2)^2},$$

$$m_b=\frac{4(1-\nu)((1-2\nu)b^2+a^2)k}{(1-2\nu)(2b^2a^2-(3-2\nu)a^4+(1-2\nu)b^4)}.$$

Значение параметра $m$, когда происходит зарождение пластической области

$$m=\min(m_a,m_b). \tag{17}$$

В зависимости от параметров $a$, $b$, $m$ пластическая область может зарождаться на границе $a$, на границе $b$, или на границах $a$ и $b$ одновременно.

На рис.4 – рис.6 приведены графики напряжений и перемещений, когда выполняется (17).

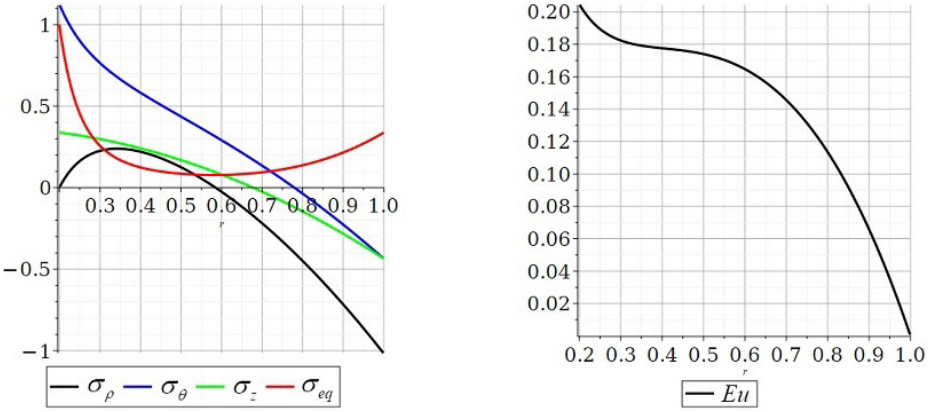



*Рис. 4.* $\nu = 0.3, m = 3.7601, a$=0.2

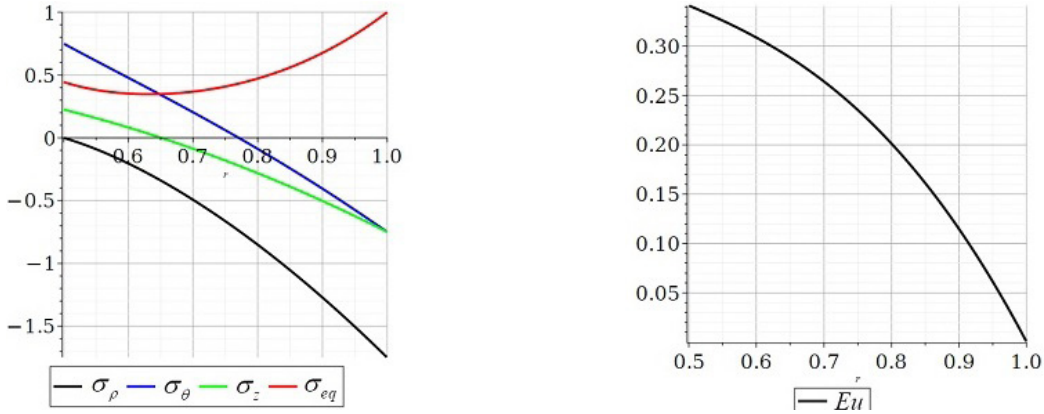



*Рис. 5.* $\nu = 0.3, m = 6.0667, a = 0.5$

Когда $F_a = F_b$, то

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{1-\nu-\nu^2}+2\nu-1}{\sqrt{1-\nu-\nu^2}-2\nu+3}}b,$$

$$m_a = m_b.$$

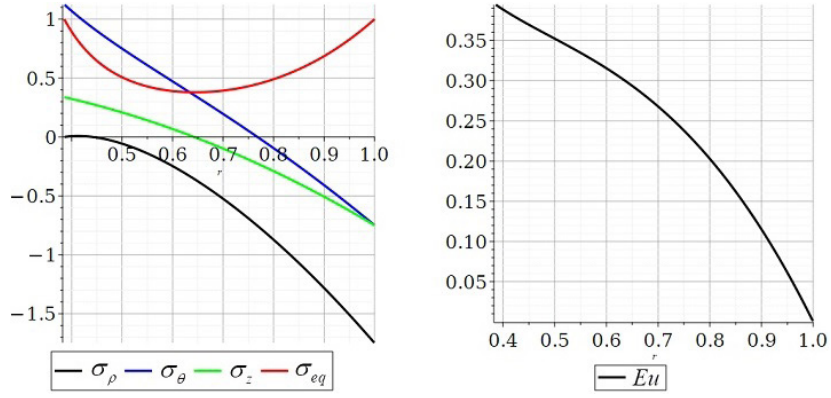



*Рис. 6.* $\nu = 0.3, m = 5.9611, a$=0.3855

**Упругопластическое состояние трубы. Гладкая функция пластичности**

Выберем условие пластичности

$$F = \alpha\,|\,\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z\,| + \left(\frac{(2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)^{2n}+(2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1)^{2n}+(2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2)^{2n}}{2+2^{2n}}\right)^{1/2n} = k.$$

В пластической области напряжения и перемещения определяются из решения системы, включающей уравнение равновесия, условие пластичности и условия совместности деформаций.

На рис. 7, 8 приведены графики напряжений, перемещений и пластических деформаций для упругопластического состояния цилиндра. Параметры $\alpha = 0.05,\ \nu = 0.25,\ a = 0.2$.

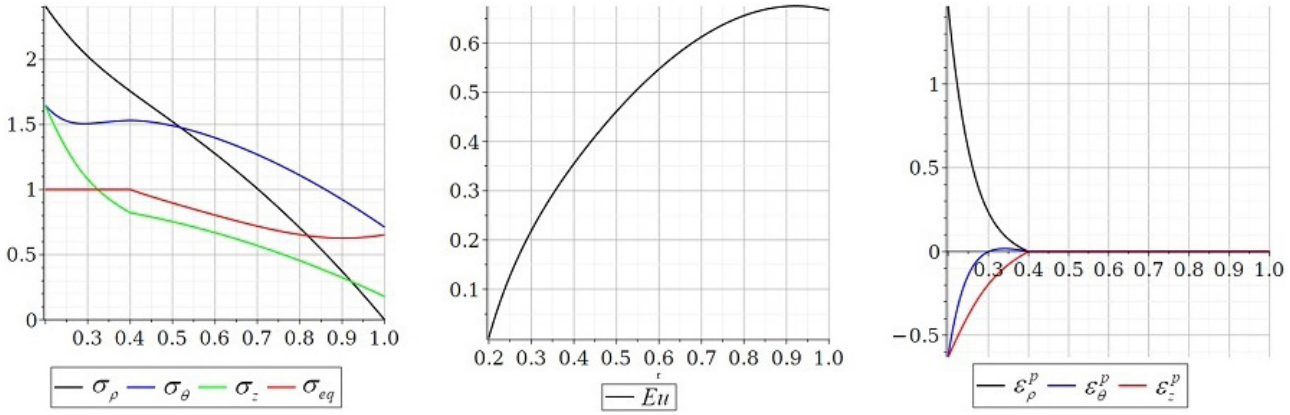



*Рис. 7.* $n = 2, c = 0.4,\ m = 4.6,\ p_b = 0, u_a = 0$

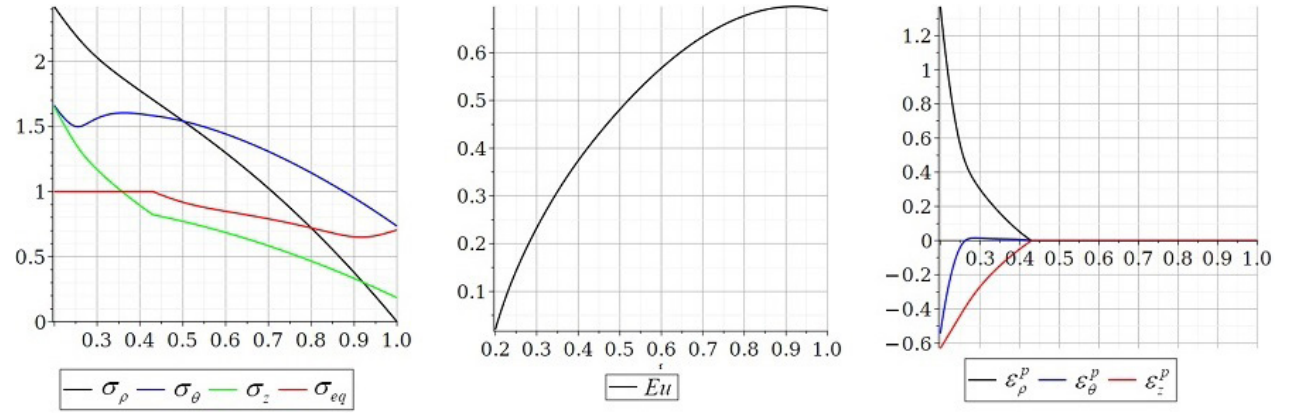



*Рис. 8.* $n = 6, c = 0.43,\ m = 4.7,\ p_b = 0, u_a = 0$

## Заключение

Рассмотрены варианты зарождения пластической области во вращающемся диске в зависимости от вида выбираемых граничных условий. Для условия пластичности Мизеса получены формулы вычисления значения угловой скорости вращения дика для каждого варианта выбранных граничных условий.

## Литература

1. *Киликовская О. А.* Влияние упрочнения и сжимаемости материала на решение упругопластических задач о деформировании пространства с цилиндрической полостью / О. А. Киликовская, Н. В. Овчинникова // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – № 1. – С. 75–91.

2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.

3. *Chakrabarty J.* Theory of Plasticity / J. Chakrabarty, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 882 p.

4. *Prokudin A. N.* Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing / A. N. Prokudin, S. V. Firsov // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – No 4. – P. 120–135.

5. *Prokudin A. N.* Schmidt-Ishlinskii Yield Criterion and a Rotating Cylinder with a Rigid Inclusion/ A. N. Prokudin // J. Appl. Comput. Mech. – 2021. – No 7(2). – P. 858–869.

6. *Eraslan A. N.* Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts. Acta Mechanica. – 2004. – V.168. – P. 129–144.

7. *Aleksandrova N. N.* On stress/strain state in a rotating disk / N. N. Aleksandrova, M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. I. Shashkin // Journal of Physics: Conference Series Volume 1203, International Conference «Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems» 17–19 December 2018, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. DOI 10.1088/1742-6596/1203/1/012001

8. *Semka E. V.* Mathematical modeling of rotating disk states, Mathematical modeling of rotating disk states / E. V. Semka, M. A. Artemov, Y. N. Babkina, E. S. Baranovskii, A. I. Shashkin // Journal of Physics: Conference Series 1479 (2020) 012122

9. *Timoshenko S. P.* Theory of Elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. – New York : McGraw-Hill, 3rd ed., 1970. – 591 p.

10. *Karafillis A. P.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor / A. P. Karafillis, M. C. Boyce // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – Vol. 41, Iss. 12. – P. 1859–1886.

УДК 519.876.2

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ: НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ФАКТОРОВ ДЛЯ ЦЕЛЕВОГО ИЗМЕНЕНИЯ ОТКЛИКА МОДЕЛИ

**А. С. Сысоев**

*Липецкий государственный технический университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается решение обратной задачи анализа чувствительности математических моделей, заключающейся в нахождении оптимальных приращений входных факторов для достижения заданного изменения выходного отклика. Предложен новый алгоритм, основанный на применении теоремы Лагранжа о конечных приращениях, который позволяет учитывать нелинейность модели на всем интервале изменений. В отличие от классических методов, использующих локальную линеаризацию, разработанный подход обеспечивает точное разложение приращения функции по вкладам отдельных факторов. Алгоритм реализован на языке R и протестирован на модели Ишигами. Результаты численного эксперимента демонстрируют высокую точность достижения целевого приращения (99.3 %) при минимальной стоимости изменений. Практическая значимость работы заключается в создании эффективного инструмента для задач управления сложными системами с ограничениями на стоимость изменений факторов.
**Ключевые слова:** анализ чувствительности, обратная задача, теорема Лагранжа, конечные приращения, оптимизация параметров, математическое моделирование, функция Ишигами, нелинейные модели, стоимость изменений, алгоритм оптимизации.

## Введение

Анализ чувствительности математических моделей представляет собой важный инструмент исследования поведения сложных систем, позволяющий оценить степень влияния изменений входных параметров (факторов) на выходные характеристики модели [1]. Этот метод особенно востребован в задачах верификации моделей, идентификации наиболее значимых входов и прогнозирования поведения системы при различных сценариях. Традиционно анализ чувствительности ориентирован на решение прямой задачи: определение изменения отклика модели при заданных вариациях входных факторов.

Классические подходы к анализу чувствительности пришли из дифференциального исчисления и используют аппарат разложения в ряд Тейлора, который обеспечивает аналитическую основу для оценки влияния малых изменений факторов модели на ее отклик.

Наиболее распространенный метод основан на разложении Тейлора первого порядка [2]. Для модели $f(\mathbf{x}) = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{x} \in R^n$ приращение функции оценивается как:

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i, \tag{1}$$

где частные производные вычисляются в базовой точке $\mathbf{x}^0$. Этот подход лежит в основе метода конечных разностей и алгоритмов на основе матрицы Якоби.

Для повышения точности используется разложение второго порядка [3]:

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j,$$

что позволяет частично учесть нелинейные эффекты и взаимодействия между факторами.

Основная проблема указанных методов заключается в остаточном члене разложения [4]:

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}^0) + R_m(\mathbf{x}^0, \Delta \mathbf{x}),$$

где дифференциальный оператор действует на функцию $f$, вычисленную в базовой точке $\mathbf{x}^0$.

Остаток $R_m$ можно оценить, если функция обладает непрерывными производными до $(m+1)$-го порядка:

$$\left| R_m \right| \le \frac{M}{(m+1)!} \left\| \Delta \mathbf{x} \right\|^{m+1}.$$

Здесь $M$ — константа, мажорирующая норму тензора производных $(m+1)$-го порядка на отрезке $[\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}]$. При конечных $\left\| \Delta \mathbf{x} \right\|$ ошибка $R_m$ может становиться сопоставимой с основным членом разложения, что приводит к значительной погрешности аппроксимации.

Кроме того производные в базовой точке $\mathbf{x}^0$ могут плохо характеризовать поведение функции на всем интервале $[\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}]$. Для сильно нелинейных функций локальные производные существенно отличаются от «усредненной» производной на интервале [5].

Методы, основанные на разложении Тейлора, требуют учета всех кросс-членов для адекватного описания взаимодействий $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$. Число таких членов растет квадратично, что делает методы второго и высших порядков вычислительно дорогими для моделей с большим числом факторов.

В качестве методологической альтернативы классическим методам Тейлора предлагается подход, основанный на фундаментальной теореме математического анализа — теореме Лагранжа о конечных приращениях [6]. Данная теорема предоставляет мощный аппарат для анализа чувствительности в условиях существенных изменений параметров модели.

Для скалярного случая функции многих переменных теорема гарантирует существование такой точки $\mathbf{x}^m$, лежащей на отрезке между $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}$, что выполняется точное равенство:

$$\Delta y = f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) = \nabla f(\mathbf{x}^m) \Delta \mathbf{x}, \;\; \mathbf{x}^m = \mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x}, \;\; \alpha \in (0,1).$$

Такой метод дает точное разложение приращения функции, в отличие от приближенных разложений. Это особенно важно для задач, требующих высокой точности прогнозирования. Производные вычисляются в промежуточной точке, которая автоматически адаптируется к нелинейному поведению функции на всем интервале. Это позволяет адекватно описывать поведение даже сильно нелинейных моделей. Метод предоставляет единую формулу для разложения приращения, справедливую для любых (в том числе больших) $\left\| \Delta \mathbf{x} \right\|$, что устраняет проблему выбора порядка аппроксимации, характерную для методов Тейлора. Такой подход лежит в основе анализа конечных изменений, используемого для оценки чувствительности моделей [7].

Представленный подход на основе анализа конечных приращений открывает новые возможности для решения фундаментальной обратной задачи анализа чувствительности — нахождения оптимальной комбинации приращений факторов для достижения заданного изменения отклика модели.

### 1. Постановка и обратной задачи анализа чувствительности

Задача формулируется следующим образом: для дифференцируемой функции $f : R^n \to R$ в точке $\mathbf{x}^0$ и заданного целевого приращения $\Delta y_{\text{target}}$ требуется найти такой вектор приращений $\Delta \mathbf{x}^*$, что:

$$f(\mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}^0) = \Delta y_{\text{target}}$$

при условии минимизации функции стоимости изменений $C(\Delta \mathbf{x})$.

Использование теоремы Лагранжа позволяет преобразовать эту задачу в более удобную для решения форму. Согласно теореме, существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что:

$$\Delta y_{\text{target}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_i.$$

Это представление позволяет сформулировать итерационный процесс решения обратной задачи.

Шаг 1. Инициализация. На этом этапе выполняется подготовка к вычислительному процессу. Задается начальное предположение о величинах изменений факторов, которое может быть основано на априорной информации или выбрано случайным образом в допустимой области. Параметр $\alpha \in (0,1),$ определяющий положение промежуточной точки, инициализируется значением 0,5, что соответствует середине интервала между начальной и конечной точками. Устанавливаются пороговые значения точности для прекращения итераций.

1.1. Задать начальное приближение $\Delta \mathbf{x}^0 = (\Delta \mathbf{x}_1^0, ..., \Delta \mathbf{x}_n^0).$

1.2. Выбрать начальное значение $\alpha = 0,5.$

1.3. Задать критерий останова.

1.4. Вычислить начальное значение целевой функции $C^0 = C(\Delta \mathbf{x}^0).$

Шаг 2. Выполняется циклический процесс уточнения решения, на каждом шаге которого последовательно улучшается оценка оптимальных приращений факторов. Итерации продолжаются до достижения заданной точности или исчерпания лимита вычислений.

Для $k = 0,1,2,..., \max_iter$:

2.1. Определяется точка на отрезке между начальным и текущим предполагаемым состоянием системы, в которой будет вычисляться градиент функции. Эта точка определяется параметром $\alpha,$ который характеризует «среднюю» чувствительность на интервале:

$$\mathbf{x}_\alpha^k = \mathbf{x}^0 + \alpha^k \Delta \mathbf{x}^k.$$

2.2. Рассчитываются частные производные функции отклика по каждому фактору в найденной промежуточной точке. Эти значения характеризуют локальную чувствительность функции в данной точке:

$$g_i^k = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_\alpha^k), \ i = 1, ..., n.$$

2.3. Решается вспомогательная задача оптимизации, в которой требуется найти такие приращения факторов, которые при текущей оценке чувствительности обеспечивают целевое изменение функции отклика при минимальной стоимости изменений.

Найти $\Delta \mathbf{x}^{k+1}$ как решение

$$\min C(\Delta \mathbf{x})$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} g_i^k \cdot \Delta x_i = \Delta y_{\text{target}}, \\ \Delta \mathbf{x} \in D, \end{cases}$$

где $D$ — область допустимых решений.

2.4. Уточняется положение промежуточной точки путем решения нелинейного уравнения, которое обеспечивает согласованность между текущей оценкой приращений факторов и теоретическим предсказанием на основе теоремы Лагранжа.

Решить уравнение относительно $\alpha^{k+1}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0 + \alpha^{k+1} \Delta \mathbf{x}^{k+1}) \cdot \Delta x_i^{k+1} - \Delta y_{\text{target}} = 0.$$

2.5. Проверяется, достигнута ли требуемая точность решения по трем ключевым параметрам: точности достижения целевого приращения функции, стабилизации решения по приращениям факторов и стабилизации параметра $\alpha$.

Если выполняются условия: $\left|f(\mathbf{x}^0+\Delta\mathbf{x}^{k+1})-f(\mathbf{x}^0)-\Delta y_{\text{target}}\right|<\varepsilon_f$ или $\left\|\Delta\mathbf{x}^{k+1}-\Delta\mathbf{x}^k\right\|<\varepsilon_{\mathbf{x}}$ или $\left|\alpha^{k+1}-\alpha^k\right|<\varepsilon_\alpha$, то перейти к Шагу 3.

Шаг 3. Выполняется проверка корректности найденного решения, включающая контроль соблюдения ограничений и оценку точности достижения целевого приращения функции.

3.1. Проверить выполнение ограничений: $\Delta\mathbf{x}^*\in D$.

3.2. Убедиться в точности достижения цели: $\left|f(\mathbf{x}^0+\Delta\mathbf{x}^*)-f(\mathbf{x}^0)-\Delta y_{\text{target}}\right|<\varepsilon_f$.

3.3. Проанализировать устойчивость решения.

Шаг 4. Проводится комплексный анализ полученного решения, включающий оценку эффективности затрат, распределение вклада факторов в общее изменение.

4.1. Вычислить финальное значение целевой функции $C^*=C(\Delta\mathbf{x}^*)$.

4.2. Определить вклад каждого фактора в общее изменение.

Предложенный алгоритм демонстрирует принципиально новый подход к решению обратных задач анализа чувствительности, позволяя не только точно достигать заданного изменения отклика модели, но и оптимально распределять приращения между факторами с учетом их стоимостных характеристик. В отличие от традиционных методов, основанных на локальной линеаризации, данный алгоритм учитывает нелинейность поведения модели на всем интервале изменений за счет итерационного уточнения положения промежуточной точки в соответствии с теоремой Лагранжа. Для демонстрации практической эффективности предложенного метода и верификации его вычислительных характеристик рассмотрим конкретный пример применения алгоритма.

## 2. Численный пример

В качестве примера рассмотрим модель Ишигами — широко известный тестовый пример в анализе чувствительности, описываемый функцией:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sin x_1+a\cdot\sin^2 x_2+b\cdot x_3\cdot\sin x_1,$$

где обычно принимают $a=7,\ b=0.1,$ а факторы $x_1, x_2, x_3$ распределены равномерно на интервале $[-\pi,\pi]$.

Функция стоимости в нашем случае может быть определена как

$$C(\Delta\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{3}\left(c_i\cdot\Delta x_i^2+d_i\cdot\left|\Delta x_i\right|\right),$$

где $c_i$ — коэффициенты, отражающие нелинейную стоимость изменения $i$-го фактора, $d_i$ — коэффициенты, отражающие линейную стоимость изменения $i$-го фактора. Примем в данном примере $c_i=[0.15,0.1,0.01],\ d_i=[1.0,0.5,0.25]$.

Область допустимых решений может быть записана в виде $D=\begin{cases}-\pi\le x_i^0+\Delta x_i\le\pi,\\ \left|\Delta x_i\right|\le\Delta x_i^{\max}.\end{cases}$

Для реализации алгоритма анализа чувствительности и решения обратной задачи был разработан скрипт на языке R. Программная реализация включает следующие основные компоненты: функция Ишигами и вычисление ее частных производных аналитическим способом; функция стоимости изменений факторов с заданными коэффициентами; итерационный алгоритм решения обратной задачи, сочетающий метод проекции градиента для оптимизации и метод секущих для определения параметра $\alpha$; визуализация результатов в виде гистограммы вкладов факторов и круговой диаграммы распределения.

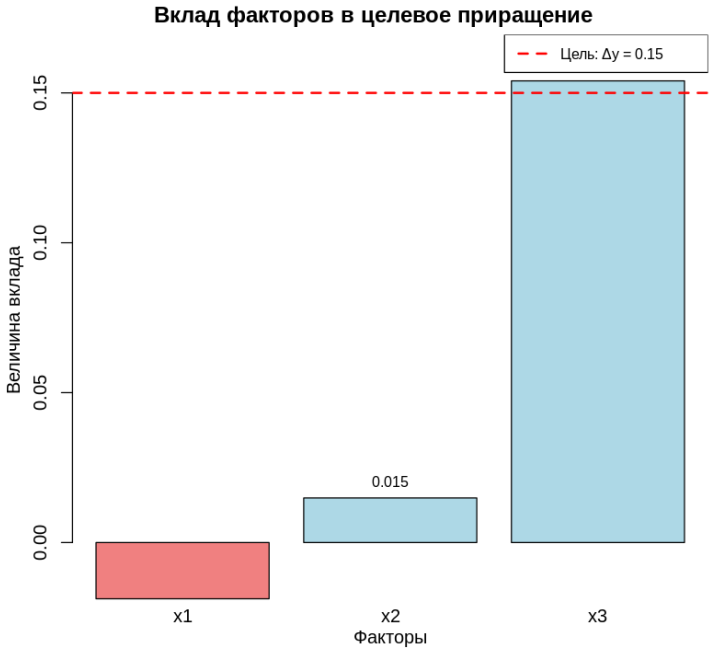



*Рис. 1. Вклад факторов в целевое приращение функции Ишигами*

Скрипт позволяет находить оптимальную комбинацию приращений факторов $\Delta\mathbf{x}^*$, обеспечивающую достижение заданного приращения функции $\Delta y_{\text{target}}$ при минимальной стоимости изменений $C(\Delta\mathbf{x})$.

Разработанный алгоритм успешно решил обратную задачу анализа чувствительности для модели Ишигами в точке $\mathbf{x} = (-1, -2, 3)$, обеспечив достижение целевого приращения $\Delta y = 0{,}15$ с точностью 99,3 % при минимальной стоимости изменений 0,0096. Результаты демонстрируют эффективность метода: алгоритм идентифицировал доминирующий вклад фактора $x_3$ (82,1 %), компенсирующий отрицательный вклад $x_1$ (–10 %) и положительный вклад $x_2$ (7,9 %) (см. рис. 1), что позволило найти оптимальную комбинацию приращений факторов $\Delta\mathbf{x} = (-0.0039, 0.0028, -0.0172)$ с учетом нелинейного поведения модели через параметр $\alpha = 0.999$. Распределение вклада факторов в абсолютных значениях представлено на рис. 2.

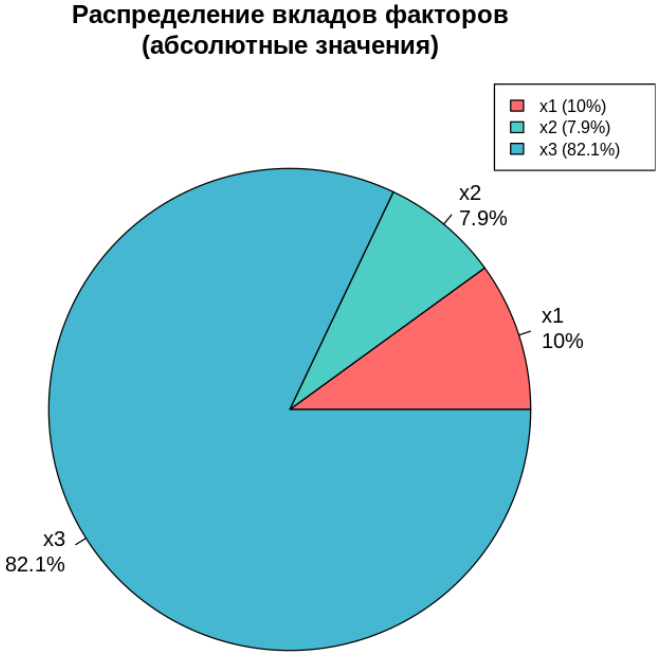



*Рис. 2. Распределение вкладов факторов в целевое приращение функции Ишигами*

Полученное решение наглядно иллюстрирует ключевое преимущество предложенного подхода — способность учитывать нелинейные эффекты взаимодействия факторов при конечных приращениях. Несмотря на сравнительно небольшое абсолютное изменение фактора $x_3$ (–0,0172), его вклад оказался доминирующим благодаря высокой чувствительности функции $f(\mathbf{x})$ к вариациям именно этого входа в окрестности выбранной точки, что выражается в значении соответствующей частной производной $\partial f / \partial x_3$. Алгоритм эффективно использовал эту особенность, минимизируя стоимость изменений за счет оптимального распределения вкладов между факторами, при этом параметр $\alpha = 0.999$ указывает на практически линейное поведение модели на данном интервале изменений, что подтверждает корректность решения и его соответствие условиям теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

## Заключение

В исследовании предложен принципиально новый подход к решению обратной задачи анализа чувствительности, основанный на применении теоремы Лагранжа о конечных приращениях. Разработанный алгоритм позволяет находить оптимальную комбинацию приращений факторов для достижения заданного изменения отклика математической модели при минимальной стоимости управляющих воздействий. В отличие от классических методов, использующих локальную линеаризацию, предложенный подход адекватно учитывает нелинейное поведение модели на всем интервале изменений параметров, что подтверждено результатами численного эксперимента для функции Ишигами.

Практическая значимость исследования заключается в создании эффективного инструмента для решения задач управления сложными системами, где требуется точное достижение целевых показателей при ограничениях на стоимость изменений. Алгоритм демонстрирует высокую точность (99.3 % в тестовом примере) и устойчивую сходимость, обеспечивая оптимальное распределение вкладов между факторами. Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением метода для задач многокритериальной оптимизации и разработкой адаптивных алгоритмов для работы с моделями, содержащими стохастические компоненты.

## Литература


1. *Saltelli A.* Sensitivity Analysis / A. Saltelli, K. Chan, E. M. Scott. – Chichester : John Wiley & Sons, 2000. – 475 p.

2. *Cukier R. I.* Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems / R. I. Cukier, H. B. Levine, K. E. Shuler // Journal of Computational Physics. – 1978. – Vol. 26, No 1. – P. 1–42.

3. *Rabitz H.* General foundations of high-dimensional model representations / H. Rabitz, O. F. Alis // Journal of Mathematical Chemistry. – 1999. – Vol. 25, No 2. – P. 197–233.

4. *Courant R.* Introduction to Calculus and Analysis / R. Courant, F. John. – New York : Springer, 1989. – 661 p.

5. *Sobol' I. M.* Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates / I. M. Sobol' // Mathematics and Computers in Simulation. – 2001. – Vol. 55, No 1. – P. 271–280.

6. *Zorich V. A.* Mathematical Analysis II / V. A. Zorich. – Berlin : Springer, 2016. – 681 p.

7. *Sysoev A.* Sensitivity Analysis of Mathematical Models / A. Sysoev // Computation. – 2023. – Vol. 11, No 8. – Art. 159. – URL: https://doi.org/10.3390/computation11080159 (дата обращения: 20.11.2025).

УДК 004.942

# ОЦЕНКА КОРРЕКТНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ САТТОНА — ЧЕНА И PM7 ДЛЯ РАСЧЁТОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ НАНОКРИСТАЛЛОВ СЕРЕБРА

**Ю. К. Тимошенко[1], М. И. Быкова[1], О. Г. Деста[2]**

*[1]Воронежский государственный университет*
*[2]Колледж Май-Нефхи (наука), Асмара, Эритрея*

**Аннотация.** В работе выполнена апробация полуэмпирической математической модели Саттона — Чена применительно к задаче о поиске равновесной геометрии нанокристалла серебра. Полученные результаты сравнивались с данными неэмпирического квантово-механического расчета, который выполнялся в рамках теории функционала плотности с неэмпирическим псевдопотенциалом HW (Hay, Wadt) и обменно-корреляционным функционалом B3LYP. Обнаружено хорошее согласие результатов полуэмпирического и неэмпирического расчетов.
**Ключевые слова:** нанокристалл, серебро, математическая модель, Саттон — Чен, теория функционала плотности.

## Введение

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию наносистем в связи с довольно широким их применением в науке и технике. Количество задач, связанных с этими системами возрастает с каждым годом. Для их эффективного решения привлекается компьютерное моделирование, выполнение которого невозможно без разработки адекватных физических и математических моделей. В настоящей работе выполнен сравнительный численный анализ двух математических моделей межатомного взаимодействия в нанокристаллах серебра, которые привлекаются для расчета координат атомов в равновесном состоянии при абсолютном нуле температуры.

Под *нанокристаллом* мы понимаем многоатомную наноразмерную систему (наносистему), имеющую топологию кристалла. Многоатомная система называется наноразмерной, если её протяженность хотя бы в одном пространственном направлении находится в интервале $1 \div 100$ нм. Именно в этом диапазоне проявляются эффекты размерного квантования, благодаря которым физико-химические свойства нанокристаллов и макрокристаллов отличаются.

При компьютерном моделировании многоатомных систем поиск равновесной геометрии является первоочередной задачей. Это нетривиальная задача, результаты решения которой сильно зависят от используемых физических и математических моделей. Естественно, наиболее адекватные физические модели опираются на аппарат квантовой механики [1–8]. Математический формализм этих моделей довольно сложен (особенно в неэмпирических вариантах), что приводит к сильному усложнению компьютерных кодов и большим затратам машинного времени даже при использовании технологий параллельного программирования и суперкомпьютеров. Поэтому исследователи, имеющие доступ только к сравнительно скромным по сегодняшним меркам вычислительным устройствам, вынуждены ограничиваться неэмпирическими расчетами квантовых систем, состоящих всего из нескольких десятков атомов. Однако, для решения многих актуальных задач требуется исследовать наносистемы из $\sim 10^2 \div 10^4$ атомов, а иногда и более. В этих случаях приходится прибегать к использованию полуэмпирических моделей, опирающихся как на квантовую механику, так и на классическую механику взаимодействующих частиц. Кроме того, параметры многих полуэмпирических моделей получены

для *кристаллов* без учета наличия поверхностей. Понятно, что достоверность результатов, получаемых в рамках таких подходов, часто вызывает сомнения. Поэтому апробация полуэмпирических моделей является необходимым этапом при компьютерном моделировании равновесной пространственной конфигурации наносистем.

## 1. О моделях и методах

В настоящей работе выполнен сравнительный численный анализ классической модели межатомного взаимодействия Саттона — Чена [9] и одной из квантовых моделей для расчета равновесной геометрии нанокристалла $Ag_{14}$. В качестве нулевого приближения пространственной конфигурации рассматривался фрагмент в форме куба гранецентрированной кубической (*ГЦК*) решетки кристаллического серебра.

Полная потенциальная энергия межатомного взамодействия в рамках модели Саттона — Чена выражается следующим образом:

$$E_{tot} = \varepsilon\left[\frac{1}{2}\sum\sum_{i\neq j} V(r_{ij}) - c\sum_{i}\sqrt{\rho_i}\right], \tag{1}$$

где

$$V(r) = \left(\frac{a}{r}\right)^n; \quad \rho_i = \sum_{i\neq j}\left(\frac{a}{r_{ij}}\right)^m. \tag{2}$$

Здесь $r_{ij}$ — расстояние между атомами $i$ и $j$, $c$ — положительный безразмерный параметр, $\varepsilon$ — параметр, имеющий размерность энергии, $a$ — параметр длины, $m$ и $n$ — положительные целые числа. Модель Саттона — Чена с математической точки зрения довольно проста, что объясняет её популярность. Существует несколько параметризаций модели Саттона — Чена. Мы использовали параметры из работы [9]: $m = 6$, $n = 12$, $\varepsilon = 2.5415\cdot10^{-3}$ eV, $c = 144.41$, $a = 4.09$ Å. Эти параметры для серебра по умолчанию используются в известной компьютерной программе GULP (version 5.1) [10]. Параметры получены для кристалла с ГЦК решеткой. Насколько корректно использовать такую параметризацию для рассмотрения наносистем? И насколько корректно использовать классическую модель взаимодействующих частиц для поиска равновесного положения ядер многоатомной системы в основном квантовом состоянии? Действительно, любая сколь угодно сложная классическая модель межатомных взаимодействий *a priori* имеет принципиальные недостатки, связанные с невозможностью корректного учета квантовых эффектов (обменное взаимодействие, перераспределение электронной плотности и т. п.). Поэтому результаты, полученные в рамках классических моделей, необходимо обязательно проверять на качественное соответствие данным, полученным квантовыми методами. Для этой цели были выполнены неэмпирические расчеты в рамках теории функционала плотности (ТФП) [11]. Как и в работе [12], применялся вариант ТФП с неэмпирическим псевдопотенциалом HW (Hay, Wadt) [13] и обменно-корреляционным функционалом B3LYP (Becke, three-parameter, Lee — Yang — Parr) [14, 15]. Использовался программный комплекс [16].

## 2. Результаты численного моделирования и выводы

В качестве исследуемой системы рассматривался нанокристалл $Ag_{14}$. В нулевом приближении атомы в нанокристалле располагались в пределах идеального элементарного куба кубической гранецентрированной решетки металлического серебра (рис. 1).

Затем, в рамках перечисленных выше моделей, находились равновесные пространственные конфигурации этого нанокристалла. Для сравнения полученных результатов вычислялись координаты атомов относительно центра масс каждого релаксированного нанокристал-

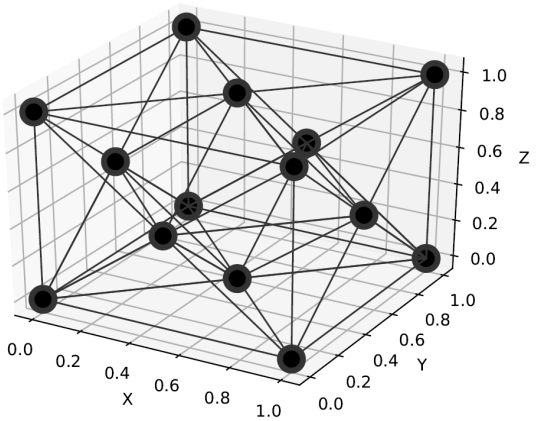



*Рис. 1. Элементарный куб $Ag_{14}$. Координаты атомов в единицах ребра куба*

ла. Положение центра масс $r_c$ системы $N$ материальных точек в классической механике определяется следующим образом

$$r_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} M_k r_k}{\sum_{k=1}^{N} M_k}, \tag{3}$$

где $M_k$ — масса $k$-й материальной точки, а $r_k$ — радиус-вектор, указывающий на её положение в пространстве. В нашем случае массы всех атомов равны, поэтому (3) приобретает вид

$$r_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} r_k}{N}. \tag{4}$$

Далее, представление об удалении атомов от центра масс дает функция:

$$D(r) = \sum_{k=1}^{N} \delta(r - | r_k - r_c |), \tag{5}$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, $r = | r |$. Для визуализации $D(r)$ обычно заменяют дельта-функцию Дирака гауссовской функцией подходящей полуширины:

$$D(r;\sigma) = \sum_{k=1}^{N} g(r, \sigma, \mu_k), \tag{6}$$

где

$$\mu_k = | r_k - r_c |; \;\; g(r, \sigma, \mu_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{r - \mu_k}{2\sigma^2} \right). \tag{7}$$

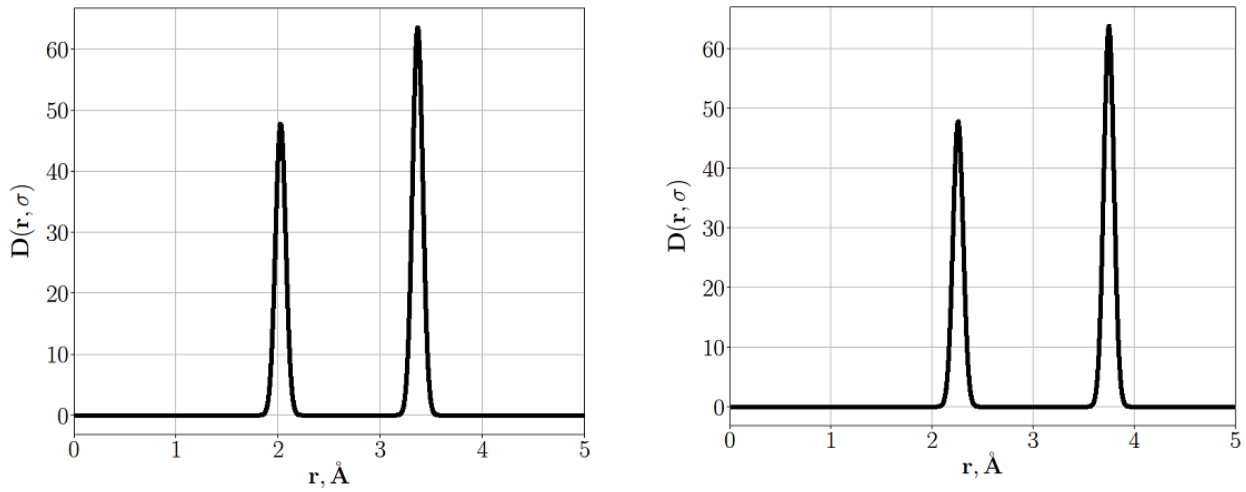
На рис. 2 представлены графики функции $D(r;\sigma)$, вычисленные для нанокристаллов $Ag_{14}$ в рамках обеих моделей. Положения пиков на графиках позволяют судить о расстояниях ближайших и следующих за ними атомов относительно центров масс нанокристаллов.

В табл. 1 приведены численные значения абсцисс этих пиков. Абсциссы (Å) первых двух максимумов функции $D(r;\sigma)$, $\sigma = 0.05$.

Таблица 1

| Модель | Абсцисса 1-го максимума | Абсцисса 2-го максимума |
|---|---|---|
| Модель Саттона — Чена | 2.025 | 3.365 |
| ТФП + HW | 2.255 | 3.745 |

Из этих данных следует, что атомы, равновесные положения которых рассчитаны в рамках полуэмпирической модели Саттона — Чена, примерно на 10 % ближе к центру масс, чем в неэмпирической квантовой модели.




*(a)* *(b)*

*Рис. 2. Функция* $D(r;\sigma)$: *a) модель Саттона — Чена; b) ТФП с неэмпирическим псевдопотенциалом HW* $(\sigma = 0.05)$

## Заключение

Таким образом, следует констатировать, что, несмотря на свою простоту, полуэмпирическая модель Саттона — Чена позволяет получить вполне разумные данные о равновесных координатах атомов в серебряных наноструктурах. Кроме того, машинное время расчетов с использованием математической модели Саттона — Чена по сравнению с квантовомеханическими вычислениями относительно мало. Поэтому, применение рассмотренной полуэмпирической модели к численному моделированию топологии серебряных наносистем со сложным пространственным строением, в частности, содержащих краевые дислокации, атомно-шероховатые поверхности и т. п., целесообразно и способно получить корректные результаты, как минимум, на качественном уровне.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М. В. Ломоносова.

## Литература

1. *Zhuang Houlong*. Elastic and Thermodynamic Properties of Complex Mg-Al Intermetallic Compounds via Orbital-Free Density Functional Theory / Zhuang Houlong, Chen Mohan, Carter Emily A. // Phys. Rev. Applied. – 2016. – Vol. 5. – P. 064021.

2. *Mozafari E.* Finite-temperature elastic constants of paramagnetic materials within the disordered local moment picture from ab initio molecular dynamics calculations / E. Mozafari // Phys. Rev. B. – 2016. – Vol. 94. – P. 054111.

3. *Vekilov Yu. Kh.* Higher-order elastic constants and megabar pressure effects of bcc tungsten: Ab initio calculations / Yu. Kh. Vekilov, O. M. Krasilnikov, A. V. Lugovskoy, Yu. E. Lozovik // Phys. Rev. B. – 2016. – Vol. 94. – P. 104114.

4. *Wen Yufeng*. Ab Initio Study of the Elastic and Mechanical Properties of B19 TiAl / Wen Yufeng, Wang Long, Liu Huilong, Song Lin // Crystals. – 2017. – Vol. 7, No 2. – URL: https://www.mdpi.com/2073-4352/7/2/39.

5. *Li Xiaoqing*. Elastic anharmonicity of bcc Fe and Fe-based ¨ random alloys from first-principles calculations / Li Xiaoqing // Phys. Rev. B. – 2017. – Vol. 95. – P. 024203.

6. *Lepkowski S. P.* First-principles calculation of higher-order elastic constants using exact deformation-gradient tensors / S. P. Lepkowski // Phys. Rev. B. – 2020. – Vol. 102. – P. 134116.

7. *Ponomareva A. V.* Theoretical description of thermodynamic and mechanical properties of multicomponent bcc Fe-Cr-based alloys / A. V. Ponomareva // Phys. Rev. Materials. – 2020. – Vol. 4. – P. 094406.

8. *Schneider Anton*. Ab initio based models for temperaturedependent magnetochemical interplay in bcc Fe-Mn alloys / Anton Schneider // Phys. Rev. B. – 2021. – Vol. 103. – P. 024421.

9. *Sutton A. P.* Long-range finnis–sinclair potentials / A. P. Sutton, J. Chen // Philosophical Magazine Letters. – 1990. – Vol. 61, No 3. – P. 139–146.

10. *Gale J. D.* The General Utility Lattice Program (Gulp) / J. D. Gale, A. L. Rohl // Molecular Simulation. 2003. – Vol. 29, No 5. – P. 291–341.

11. *Tsuneda T.* Density Functional Theory in Quantum Chemistry / T. Tsuneda. – Tokyo, Heidelberg, New York, Dordrecht, London : Springer, 2014. – 200 p.

12. *Timoshenko Yu. K.* On the localization of electron states near silver ion adsorbed on atomic-rough surface of AgCl nanocrystal / Yu. K. Timoshenko, V. A. Shunina // Surface Sci. – 2009. – Vol. 603, No 16. – P. 2564–2573.

13. *Hay P. J.* Ab initio effective core potentials for molecular calculations / P. J. Hay, W. R. Wadt, J. Chem // Phys. – 1985. – Vol. 82, No 1. – P. 270–310.

14. *Becke A. D.* Density-functional thermochemistry. III. The role of exact exchange / A. D. Becke, J. Chem // Phys. – 1993. – Vol. 98, No 7. – P. 5648–5652.

15. *Lee C.* Second nearest-neighbor modified embedded atom method potentials for bcc transition metals / C. Lee, W. Yang, G. Parr R. // Physical Review B. 1988. – Vol. 37, No 2. – P. 785–789.

16. *Granovsky A. A.* Firefly version 7.1.G. – URL: http://classic.chem.msu.su/gran/firefly/index.html.

УДК 004.942

# АНАЛИЗ СПОСОБОВ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛОС ПРИ СОЗДАНИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ

**А. М. Титова, Е. В. Трофименко**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье представлено исследование способов реализации методов моделирования волос в компьютерной анимации. Рассмотрены три основных подхода: пружинно-массовая модель, метод Cosserat Rods и метод конечных элементов. Проведен анализ принципов работы каждого метода, их преимуществ и недостатков с точки зрения реалистичности, производительности и управляемости анимацией. Исследование подкреплено результатами тестирования различных алгоритмов на моделях волос, демонстрирующими их способность эффективно симулировать динамику причесок.
**Ключевые слова:** моделирование волос, компьютерная анимация, пружинно-массовая модель, метод конечных элементов, динамика твердых тел, реалистичность, производительность, вычислительные затраты, анимация причесок.

## Введение

На сегодняшний день создание реалистичной компьютерной анимации волос остаётся одной из наиболее сложных и требующих значительных вычислительных затрат задач компьютерной графики. Качественное моделирование волос является важным фактором для реализации правдоподобных персонажей. Разнообразие типов волос, их текстур, подверженность внешним воздействиям, а именно ветру, трению и гравитации, требуют применения сложных вычислительных методов.

Моделирование волос — это комплексный процесс, направленный на симуляцию физического поведения волос, их динамики и внешнего вида. Это включает в себя как генерацию геометрической структуры прически, так и расчет её движения в реальном времени или при рендеринге. Результатом моделирования является реалистичная симуляция, способная реагировать на изменения в сцене.

В данной статье проводится анализ ключевых методов моделирования волос при создании компьютерной анимации, и исследуется эффективность их использования для достижения баланса между визуальной частью и производительностью.

## 1. Метод с использованием модели масс-пружин

Пружинно-массовая модель (ПММ) является одним из наиболее распространенных и относительно простых подходов к моделированию волос [1]. Она основана на представлении каждого волоса как последовательности масс, соединенных пружинами. Особенностью этого метода является простота реализации, скорость выполнения и то, что он подходит для моделирования большого количества волос.

Для реализации модели масс-пружин необходимо определить набор масс, представляющих собой дискретные точки т.е. вершины, каждой пряди волос. Эти точки соединены между собой пружинами, имитирующими упругость волоса и его структуру. Стартовое состояние модели задаётся путем размещения этих масс в пространстве, соответствующем желаемому расположению волос. После, с учётом сил, действующих на волос, таких как сила упругости, которая рассчитывается по формуле (1), сопротивление воздуха и гравитация, рассчитывается суммарная сила, действующая на каждую массу.

$$F_{stretch} = -k_s * (L - L_0) - c_s * v, \quad (1)$$

где $k_s$ — коэффициент жесткости пружины, $L$ — текущая длина пружины, $L_0$ — длина пружины в покое, $c_s$ — коэффициент демпфирования, $v$ — относительная скорость движения массы.

В результате интегрирования этих сил по времени, массы смещаются, а соединённые пружинами, они формируют динамическую структуру, которая имитирует движение волос. Таким образом, поведение пряди волос определяется через взаимодействие её масс и упругостью пружин, между ними.

## 2. Метод Cosserat Rods

Метод Cosserat Rods (стержней Коссера) — более сложный и физически реалистичный подходом к моделированию гибких, упругих структур, к которым относятся и волосы [2]. Он представляет каждую прядь волос как непрерывную стержень в трехмерном пространстве с определёнными механическими свойствами такими как упругость, скручивание и изгиб. Его особенностью является то, как точно он может моделировать сложные деформации, обеспечивая высокую степень реализма.

Для реализации метода Cosserat Rods необходимо определить стержень, описывающий каждую прядь волос как конечный элемент с кинематическими параметрами. Для каждого поперечного сечения этого стержня вводится локальная система координат, которая позволяет отслеживать ориентацию этого сечения в пространстве. Таким образом, деформация волоса описывается не только изменением формы стержня, но и вращением поперечных сечений. Энергия деформации, возникающая при этом, складывается из энергии изгиба, кручения, растяжения и сдвига. Общая формула для энергии деформации имеет вид (2).

$$U = \int_0^L \left( \left( \frac{1}{2} \right) * \left( v_t * K_v * v + w_t * K_w * w \right) \right) ds, \quad (2)$$

где $U$ — полная энергия деформации, $\int_0^L (\ldots)\, ds$ — интеграл, берущийся по длине стержня, и $s$ — параметр вдоль стержня, $v$ — вектор деформаций растяжения и сдвига. Он описывает, насколько стержень растянут/сжат и сдвинут относительно своего не деформированного состояния. $K_v$ — матрица жесткости для деформаций растяжения и сдвига. Она содержит информацию о свойствах, которые определяют сопротивление стержня к растяжению и сдвигу. $w$ — вектор деформаций изгиба и кручения. Он описывает, насколько стержень изогнут и скручен относительно своего недеформированного состояния. $K_w$ — матрица жесткости для деформаций изгиба и кручения. Она содержит информацию о свойствах, которые определяют сопротивление стержня к изгибу и кручению. Для определения движения волоса используются уравнения, которые выводятся на основе принципа наименьшего действия. Этот принцип говорит, что траектория, которую примет система, будет той, которая минимизирует действие (интеграл Лагранжиана по времени). Лагранжиан $(L)$ можно представить как разницу между кинетической энергией $(T)$ и потенциальной энергией т. е. энергией деформации $(U)$ (3).

$$L = T - U. \quad (3)$$

Здесь $T$ рассчитывается по формуле (4), формула для $U$ приведена выше.

$$T = \left( \frac{1}{2} \right) * \int_0^L \left( \rho * v(s,t)^2 \right) ds, \quad (4)$$

где $\rho$ — плотность материала стержня, а $v(s,t)$ — скорость движения. Так же принцип наименьшего действия утверждает, что вариация интеграла Лагранжа по времени равна 0. Таким образом, чтобы получить уравнение движения, необходимо взять вариацию этого интеграла и

приравнять её к нулю, используя уравнение Эйлера — Лагранжа, которое для обобщенной координаты $q_i$ выглядит следующим образом (5).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_i}\right)-\frac{dL}{dq_i}=0, \tag{5}$$

где $\dot{q}_i$ — обобщенная скорость, соответствующая координате $q_i$.

После будет получено упрощенное уравнение для поступательного движения точки на стержне (6).

$$\rho*\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)=\frac{dN}{ds}+f_{ext}, \tag{6}$$

где $\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)$ — ускорение точки на стержне, $N(s,t)$ — вектор внутренней силы в сечение стержня, возникающей из-за деформации, $\frac{dN}{ds}$ — изменение внутренней силы вдоль стержня, $f_{ext}$ — внешние силы, действующие на стержень. Таким образом, поведение волоса определяется через взаимодействие изгибающих моментов, крутящих моментов и сил, которые действуют на стержень, учитывая его деформацию.

### 3. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов — численный метод для решения задач моделирования, который основывается на дискретизации непрерывного объекта, на множество небольших элементов [3, 4]. Этот метод часто применяется для моделирования механического поведения и деформаций, обеспечивая высокую точность и возможность учёта различных физических свойств. Его особенностью является универсальность и способность моделировать сложные формы и граничные условия, что особенно хорошо для реалистичной симуляции волос.

Для реализации метода прядь волос разбивается на набор конечных элементов, связанных между собой, и представляющих сетку. Элементы, в зависимости от требований точности и вычислительных ресурсов могут принимать различную форму, а именно тетраэдры или призмы. Каждый элемент описывается узловыми точками, между которыми определяются зависимые переменные, а именно перемещения и вращения. После построения сетки для каждого элемента записываются уравнения, которые описывают их поведения при деформации и воздействии внешних сил. Таким образом, для одного тетраидального элемента уравнение будет выглядеть следующим образом (7).

$$K*u=f, \tag{7}$$

где $K$ — матрица, описывающая жёсткость элемента и то, как он сопротивляется деформации. Она рассчитывается по формуле (8).

$$K=\int\left(B^T*D*B\right)dv, \tag{8}$$

где $B$ — матрица деформаций, связывающая перемещения узлов с деформацией внутри элемента матрица, $D$ — матрица упругости, связывающая деформации с напряжениями, $u$ — вектор перемещений узлов элемента, который содержит перемещения каждого узла элемента относительно его исходного положения. Таким образом для тетраэдра с четырьмя узлами и тремя степенями свободы на узел, размер вектора будет 12. В свою очередь, $f$ — вектор сил, действующий на узлы элемента, который содержит все силы, приложенные к каждому узлу элемента. Его размерность совпадает с размерностью вектора $u$. Решение уравнений, показанных выше, выполняется с учётом граничных условий, которые определяют степень взаимодействия волос с окружающей средой. Решением уравнения является определение перемеще-

ния каждого узла сетки относительно его начального положения. Они и определяют деформацию волоса, позволяя вычислить его форму и другие физические характеристики под воздействием вешних сил. Таким образом, поведение пряди волоса определяется как решение системы уравнений, которые объединяют смещение узлов, физические характеристики элементов и действующие силы.

## 4. Сравнение методов моделирования

В данной работе были рассмотрены три метода моделирования волос. Они были реализованы с помощью игрового движка Unity3D и языка программированияC#. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, которые характеризуют в какой области их лучше применять. В таблице 1 приведён анализ методов по ряду характеристик.

Таблица 1

*Анализ методов для моделирования движения волос*

| Характеристика | Метод с модель масс-пружин | Метод Cosserat Rods | Метод конечных элементов |
|---|---|---|---|
| Вычислительная сложность | 1.0 | 2.5 | 4.0 |
| Время симуляции (для 1000 прядей)/ (с/мин анимации) | 5–15 | 30–60 | 120+ |
| Гибкость в настройке параметров | Среднее | Высокая | Очень высокая |
| Сложность реализации | Низкая | Средняя | Высокая |
| Поведение при столкновении/ деформациях | Возможно проникновение волос через объекты, менее точная реакция на столкновения, приближенный результат деформации (изгиб, скручивание) | Корректное предотвращение проникновений, физически более корректная обработка столкновений, точное моделирование деформации (изгиба, скручивания, растяжения и сдвига), также учитывается свойство материала | Физически точная обработка столкновений и различных деформаций (изгиб, кручение, растяжение, сдвиг) |
| Потребление памяти (для 1000 прядей)/ (Мб) | 200–500 | 600–1000 | 2048–5120 |

Анализирую полученные результаты, заметим, что каждый из рассмотренных методов моделирования волос обладает различными характеристиками, делающими их подходящими для использования при решении различных задач. Таким образом метод с пружинно-массовой моделью имеет высокую скорость и низкие вычислительные требования, с помощью него можно быстро реализовать моделирование большого количества волос. Однако, из-за упрощенной структуры, результат моделирования получается менее реалистичным. Что делает его

подходящим для использования в компьютерных играх и других приложениях, где необходимо работа в реальном времени. В частности, этот метод является наиболее подходящим для использования на мобильных устройствах. Причиной этому является то, что баланс между производительностью и качеством в данном случае смещён в сторону производительности и вычислительная стоимость других методов делает их неприменимыми для большинства мобильных приложений. Метод Cosserat Rods, в свою очередь, реализует более физически точное моделирование. Он обеспечивает хорошую детализацию и лучше справляется с воздействием внешних сил. Но в связи с высокой точностью, метод требует значительно больших вычислительных ресурсов и имеет более сложную реализацию. Метод конечных элементов наиболее точный и универсальный. Он обеспечивает наиболее высокий уровень реализма, однако вместе с этим имеет высокую вычислительную сложность, большое потребление памяти и долгое время симуляции. Поэтому его используют в офлайн-рендеринге для кино, где важен высокий уровень реализма и меньшее значение имеет время симуляции.

## Заключение

В результате проделанной работы было исследовано несколько методов моделирования волос. Исходя из полученных результатов можно сделать вывод о том, что пока не существует одного метода, который мог бы использоваться для решения любой задачи. Выбор метода для моделирования волос зависит от совокупности факторов, а именно уровень реализма, вычислительные ресурсы и временные ограничения. Таким образом можно сделать вывод о том, что метод с использование модели масс-пружин подходит в случаях, когда важна скорость и интерактивность, метод Cosserat Rods — баланс между скоростью и реализмом, а метод конечных элементов — высокий уровень реализма. В связи с этими различиями, можно сделать наиболее оптимальный выбор при решении задачи моделирования волос.

## Литература

1. *Lyu Y.* Hair Simulation Based on Mass Spring System / Y. Lyu // MSc Computer Animation and Visual Effects. – 2016.

2. *Bertails B.* Interactive Hairstyle Modeling Using a Cosserat Rods Approach / B. Bertails, D. Audouze, B. Querleux, C. H. Séquin// ACM Transactions on Graphics. – 2006. – Vol. 25, No 3. – P. 1165–1173.

3. *Marschner S. R.* Modeling and Rendering of Realistic Hair / S. R. Marschner, H. W. Jensen, M. Cammarano, S. Worley, P. Hanrahan // ACM SIGGRAPH 2003 Course Notes.

4. *Sadeghi M.* Survey on Hair Modeling Techniques / M. Sadeghi, D. James, B. A. Thomaszewski // Computer Graphics Forum. – 2016.

УДК 517.958

# УСТОЙЧИВАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

**А. А. Федюков**

*Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина*

**Аннотация.** Работа содержит общее описание метода конечных разностей и принципы построения сходящихся разностных схем для уравнений гиперболического типа с распределёнными параметрами на графе. Метод заключается в сведении начально-краевой задачи к системе алгебраических уравнений с неизвестными значениями сеточных функций и изучении предельного перехода при стремлении длин сторон ячеек сетки к нулю. В отличие от классических схем, аппроксимация задачи выполняется в слабом смысле, что позволяет работать с уравнениями, имеющими разрывные коэффициенты, а обобщённое решение с конечной энергетической нормой определяется как предел слабо сходящейся последовательности приближений в энергетическом пространстве. Эти формализмы широко применяются при описании волновых процессов в различных антенных конструкциях.

**Ключевые слова:** разностные схемы, сходимость и устойчивость, волновая системы, суммируемые функции, эволюционные дифференциальные уравнения, сетеподобный носитель, слабые решения, метод конечных разностей, начально-краевая задача, краевое условие Дирихле.

## 1. Вспомогательные утверждения

Используются обозначения, принятые в работах [1–3]. Носителем функций рассматриваемой начально-краевой задачи является произвольный ограниченный геометрический граф $\Gamma$. Через $V$ обозначено множество узлов $\xi$ графа $\Gamma$, символами $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ обозначены множества граничных и внутренних узлов $V=\partial\Gamma\bigcup J(\Gamma)$ соответственно. Считаем, что все ребра $\gamma$ графа единичной длины и через $\Gamma_0$ обозначим объединение этих ребер графа, не содержащих концевых точек: $\Gamma_0=\Gamma\setminus V$.

Пусть для фиксированного узла $\xi$ фиксировано множество ребер $R(\xi)$ с ориентацией, определяемой направлением «от узла $\xi$» а множество ребер $r(\xi)$ с ориентацией, определяемой направлением «к узлу $\xi$», причем каждое ребро $\gamma$ параметризовано переменной $x\in[0,1]$. Введем обозначения $\Gamma_T=\Gamma_0\times(0,T)$, $\partial\Gamma_T=\partial\Gamma\times(0,T)$ и для каждой определенной на графе $\Gamma$ функции $f(x,t)$ будем обозначать $f(x,t)_\gamma$ сужение на $\gamma$, интегрирование по области $\Gamma_T$ понимается как сумма интегралов по областям, формируемым каждым ребром и интервалом изменения временной переменной $t$.

Для упрощения технических выкладок, не влияя на общность получаемых результатов, для начально-краевых задач используется краевое условия Дирихле. Этого достаточно для демонстрации подхода проведения анализа более общих начально-краевых задач.

Введем пространства измеримых по Лебегу функций и будем использовать топологические свойства элементов этих пространств, следуя работам [1–3]. $L_2(\Gamma)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом на $\Gamma$, $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, первая производная которых также принадлежит $L_2(\Gamma)$, $L_2(\Gamma_T)$ и $W_2^1(\Gamma_T)$ строятся также, как $L_2(\Gamma)$ и $W_2^1(\Gamma)$, соответственно, нормы в $L_2(\Gamma_T)$ и $W_2^1(\Gamma_T)$ вводятся интегральными соотношениями $\|u\|^2_{W_2^1(\Gamma)}=\int\limits_\Gamma\left(u^2+u'^2\right)dx$ и $\|u\|^2_{W_2^1(\Gamma_T)}=\int\limits_{\Gamma_T}\left(u^2+u_t{}^2+u_x{}^2\right)dxdt$, $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство, элементы которого принадлежат $L_1(\Gamma_T)$, при этом $\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}=\int\limits_0^T\sqrt{\int\limits_\Gamma f^2(x,t)dx}dt$.

Введем множество $\Omega$, элементами которого являются функции $u(x) \in C(\Gamma)$ (здесь $C(\Gamma)$ — классическое пространство функций, непрерывных в области изменения своих переменных) и при этом связанных условием

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u'(1)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u'(0)_{\gamma_j} \tag{1}$$

для любых $\xi \in J(\Gamma)$. Операция замыкание в метрике $W_2^1(\Gamma)$ элементов $\Omega$ задает пространство $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$, если выполнено условие равенства нулю этих элементов во всех точках узлов $\xi \in \partial\Gamma$. Соотношение (1) играет центральную роль в формировании пространства, в котором определяется начально-краевая задача, введем эти пространства. Обозначим $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множество элементов (функций) из $L_2(\Gamma_T)$, обобщенные производные которых по $x$ принадлежат $L_2(\Gamma_T)$, и пусть $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ подпространство пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, элементы (функции) которого равны нулю в достаточно малой окрестности боковой поверхности $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$, причем эти функции удовлетворяют аналогичным (1) соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u(1,t)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u_x(0,t)_{\gamma_j} \tag{2}$$

для любого $\xi \in J(\Gamma)$. В задачах прикладного характера, описывающих математическую модель процесса переноса сплошных сред соотношения (2) используются как описание балансных явлений в местах $\xi$ ветвления сети, в волновых процессах, определяющих малые колебания упругих сетей, соотношения (2) — баланс сил натяжений упругих континуумов в местах сочленения $\xi \in J(\Gamma)$ этих континуумов. Ниже вводится и другие пространства, а также их подпространства, со свойствами, необходимыми для изучения начально-краевых задач.

Для дальнейшего построения вспомогательных пространств будет использовано свойство следов элементов пространства $W_2^1(\Gamma_T)$ на сечении области $\Gamma_T$ плоскостью $t = t_0 (t_0 \in [0,T])$ определен след функции $y(x,t)$ как элемент пространства $L_2(\Gamma)$ непрерывный по $t$ в метрике $L_2(\Gamma)$.

**Замечание 1.** *Пространства $W_2^1(\Gamma_T)$ и $W_{2,0}^1(a,\Gamma_T)$ определяют пространства состояний (допустимых решений) волновой системы, рассмотренной в пункте 2.*

### 2. Математическая модель волнового процесса в сетевом носителе

В пространстве $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ относительно функции $y(x,t)$ задана начально-краевая задача в области $\overline{\Gamma}_T$, являющаяся математической моделью волнового процесса в сетевом носителе, моделируемым (интерпретируемым) геометрическим графом $\Gamma$:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left( a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \tag{3}$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \ y|_{\partial\Gamma} = 0, 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Здесь соотношения (4) означают начальные и краевое условия соответственно, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, функции $a(x)$ и $b(x)$ ограничены и таковы, что $0 < a_* \le a(x) \le a^*$, $|b(x)| \le \tilde{b}$, $x \in \Gamma$.

Следуя работам [1, 2], описание понятия обобщенного (слабого) решения начально-краевой задачи (3)–(4) и полное доказательство приведено в монографии. Оно существенно опирается на свойство спектральной полноты в пространстве $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ соответствующей системы обобщенный собственных функций задачи Штурма — Лиувилля на графе $\Gamma$, порожденной эллиптическим выражением, стоящем в левой части уравнения (3).

Далее предлагается путь формирования разностного аналога начально-краевой задачи (3)–(4), основанный на дискретизации задачи (3)-(4) по пространственной и временной переменным, дающий возможность для построения разностной схемы начально-краевой задачи (3)–(4).

### 3. Устойчивая разностная схема

Для начально-краевой задачи (3)–(4) построение сетки, аппроксимационных соотношений, операций вычисления производной от произведения функций и интегрирования по частям, а также принцип построения сеточных функций по усреднениям заданных функций полностью совпадают с представленными в работе [3]. Разностная схема для начально-краевой задачи (3)–(4) также аналогична разностной схеме для параболической системы, только вторая производная по временной переменной заменяется на второе разностное отношение и двум начальным условиям (4) будут соответствовать два сеточных соотношения, содержащих значение в нуле сеточной функции и разностное отношение первой производной по временной переменной в нуле, как это указано в условии (4).

Анализ устойчивости разностной схемы и слабой сходимости в метрике $W_{2,0}^1(a,\Gamma_T)$ к обобщенному (слабому) решению задачи (3)–(4) приближений, определяемых при решении получаемой из разностной схемы алгебраической системы, аналогичен рассуждениям [3].

Получим разностностную схему, соответствующую начально-краевой задаче (3)–(4), для формирования приближений $u_h(k)$ решений (3)–(4) в виде сеточных функций. А именно, строится алгебраическая система относительно $u_h = u_h(k)$ вида

$$u_{t\tilde{t}} - (a_h u_x)_{\tilde{x}} + b_h u_h = f_h \tag{5}$$

на $\Gamma^h$ при $t = t_k (k = \overline{1,N})$. Причем к системе (5) необходимо присоединить соотношения в узлах

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} (a_h u_x(k))_\gamma = \sum_{\gamma \in r(\xi)} (a_h u_{\tilde{x}}(k))_\gamma \tag{6}$$

являющиеся аппроксимациями соотношений (2) в узлах $\xi \in J(\Gamma)$ графа, а также соотношения, аппроксимирующие условия (4)

$$u_h(0) = \varphi_h,\ u_h(1) = \varphi_h + \tau\psi_h, \tag{7}$$

на слоях $t = k\tau\ \ (k = 0,1),$ кроме того, аппроксимации

$$u_h(k)\,|_{\partial\Gamma} = 0, k = 0,1,...,N, \tag{8}$$

для краевых условий (4).

Таким образом, (5)–(8) (система линейных алгебраических уравнений) определяют разностную схему задачи (3)–(4).

### 4. Алгоритм определения приближений дифференциальной системы

Утверждения разделов 2 и 3 представляют пошаговый алгоритм приближенного решения:

**Шаг 1.** Формируется сетка $\Gamma^h$ графа $\Gamma$, для чего производится разбиение ребер $\gamma$ графа $\Gamma$ точками $kh$ ($k$ — натуральные числа, $h > 0$ — фиксированное число, равное длине элементарного отрезка $\omega_h$), при этом внутренние узлы $\xi \in J(\Gamma)$ графа входят в число таких точек.

**Шаг 2.** Определяются разностные операции для сеточных функций $u_h$:

$$u_x(x) = \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x)),\ u_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{h}(u(x) - u(x-h)).$$

**Шаг 3.** Для исходных (заданных) функций $\varphi(x) \in W_{2,0}^1(a,\Gamma),\ f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ формируются сеточные функции $\varphi_h$ в точках $kh$ ячеек $\omega_{kh}$ с помощью усреднений $\varphi_h = \frac{1}{h}\int\limits_{\omega_{kh}} \varphi(x)dx$, $f_h\big|_{x=kh,t=k_0\tau} = \frac{1}{h\tau}\int\limits_{\Gamma_T(k,k_0)} f(x,t)dxdt$ аналогично строятся сеточные функции $\psi_h$, $a_h$ и $b_h$ для исходных (заданных) функций $\psi(x)$, $a(x)$ и $b(x)$.

**Шаг 4.** Приближенные решения $u_h(k)$ определим как сеточные функции, удовлетворяющие разностным соотношениям в (6)–(8):

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} (a_h u_x(k))_\gamma = \sum_{\gamma \in r(\xi)} (a_h u_{\tilde{x}}(k))_\gamma$$

$$u_h(0) = \phi_h, u_h(1) = \phi_h + \tau\psi_h,$$

$$u_h(k)|_{\partial\Gamma} = 0, k = 0,1,...,N$$

Полученные значения сеточных функций $u_h(k)$ являются приближениями решения $y(x,t)$ задачи (3)–(4) в пространстве $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$, при этом с уменьшением шага разбиения $h > 0$ ребер графа точность возрастает (шаг разбиения выбирается в зависимости от назначенной a priori точности).

## Заключение

Полученные результаты могут быть использованы при решении ряда смежных задач: оптимальное управление грузоперевозками в условиях мегаполиса, когда требуется учитывать переменную скорость движения в течение суток; управление химическими процессами в реакторах вытеснения (например, при синтезе полиэтилена). Следует также отметить, что результаты об устойчивости решений дифференциально-разностных систем во многом аналогичны представленным выше, отличием является не полная дискретизация начально-краевой задачи — полу-дикретизация по временной переменной.

## Литература

1. *Провоторов В. В.* Моделирование колебательных процессов системы «мачта-растяжки» / В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – № 1-2 (31). – С. 272–277.

2. *Перова И. В.* Разностные схемы для уравнения переноса сплошной среды и волнового уравнения с носителями на сети / И. В. Перова, А. А. Парт, З. Тран, А. А. Федюков, П. П. Абреимов // Системы управления и информационные технологии. – 2025. – № 1(99). – С. 16–21.

3. *Федюков А. А.* Устойчивость и сходимость разностной схемы для волновой системы в классе суммируемых функций с сетеподобным носителем. / А. А. Федюков // Системы управления и информационные технологии. – 2025. – № 2-1 (100). – С. 69–74.

УДК 51-74

# ОБЗОР МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕСОВ ВЗВЕШЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ СОЗДАНИЯ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРВИЗОРОМ KVM

**А. О. Ферубко, О. Д. Казаков**

*Брянский государственный инженерно-технологический университет*

**Аннотация.** ИТ-инфраструктура использует гипервизоры [1]. Одним из самых перспективных гипервизоров с открытым исходным кодом является KVM [2]. Но для него нет адаптивных систем управления оперативной памятью (ОП), с защитой от неэффективного распределения ресурсов [3]. Проблему можно решить при помощи адаптивной модели управления, основанной на взвешенной линейной регрессии, но существуют разные подходы для расчёта весов взвешенной линейной регрессии. Проведён обзор классических и современных подходов, оптимальных сценариев применения.

**Ключевые слова:** взвешенная линейная регрессия, гетероскедастичность, итерационно-взвешенные наименьшие квадраты, обобщённые методы наименьших квадратов, выбор весов, машинное обучение, гипервизор, KVM.

## Введение

При построении современной ИТ-инфраструктуры применяют в том числе и гипервизоры [1]. Одним из самых известных является KVM [2]. Но для него нет адаптивных систем управления оперативной памятью (ОП), с защитой от неэффективного распределения ресурсов [3]. Для создания подобной модели могут быть применены современные методы регрессионного анализа. Среди них особое значение имеет взвешенная линейная регрессия (Weighted Least Squares, WLS) [4], которая позволяет корректно оценивать параметры модели в случаях, когда дисперсия ошибок различается между наблюдениями. Такая ситуация известна как гетероскедастичность [5], и её игнорирование ведёт к неэффективности оценок и искажённым стандартным ошибкам, что, в свою очередь, снижает достоверность статистических выводов.

Основная идея взвешенной регрессии заключается в том, чтобы каждому наблюдению присваивался определённый вес, отражающий степень его надёжности или влияние на итоговую оценку параметров. Правильный выбор весов является ключевым моментом метода, поскольку именно от него зависит эффективность, устойчивость и интерпретируемость полученных результатов. В классическом случае веса задаются обратно пропорционально дисперсии ошибок наблюдений, однако на практике дисперсия редко бывает известна заранее. Это породило множество подходов к её оценке и, соответственно, к определению весовых коэффициентов.

Существуют как строго математические, так и эмпирические методы выбора весов. К первым относятся аналитические решения при известной форме дисперсии, методы итерационно-взвешенных наименьших квадратов (IRLS) [6,7] и обобщённые методы наименьших квадратов (GLS [8], FGLS [9]). К прикладным и гибридным подходам относятся алгоритмы, основанные на регрессии остатков, а также современные машинно-обучающие модели, способные аппроксимировать функцию дисперсии без строгих предположений о её виде. Каждый из этих методов имеет свои преимущества, ограничения и «идеальные сценарии применения» в зависимости от структуры данных. Таким образом, представленное исследование направлено на систематизацию теоретических и практических аспектов задания весов в линейных моделях, что имеет значение при построении адаптивной модели управления ресурсами гипервизора KVM, основанной на предсказании потребления ресурсов при помощи методов регрессии.

## 1. Основная часть

WLS представляет собой обобщение МНК, позволяющее учитывать неоднородность дисперсий ошибок и различную достоверность наблюдений. В отличие от обычного МНК, который предполагает гомоскедастичность (равенство дисперсий ошибок), взвешенная регрессия минимизирует взвешенную сумму квадратов остатков. Функция минимизации имеет $S(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N} w_i (y_i - \mathbf{x}_i' \mathbf{b})$ вид, где $w_i$ — положительные веса, отражающие обратную величину дисперсии ошибок. Оптимальные оценки коэффициентов при этом вычисляются по формуле $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y}$, где $\mathbf{W} = diag(w_1, \cdots, w_N)$.

При корректном выборе весов такая оценка является несмещённой и эффективной [10]. Наиболее простой и теоретически обоснованный способ определения весов заключается в использовании обратной дисперсии наблюдений. Если для каждого наблюдения известна дисперсия ошибки $\sigma_i^2$, то оптимальные веса задаются как $w_i = 1/\sigma_i^2$. В этом случае оценки параметров WLS совпадают с наиболее эффективными линейными несмещёнными оценками согласно теореме Гаусса — Маркова [10]. Этот подход применяется в задачах с заранее известной дисперсией ошибок.

Однако в большинстве реальных случаев дисперсия ошибок неизвестна и должна быть оценена. Один из наиболее распространённых подходов заключается в аппроксимации через модель связи между остатками и независимыми переменными. Для этого сначала строится модель обычной линейной регрессии, вычисляются остатки $\hat{\varepsilon}_i$, затем для их квадратов строится регрессия на предсказанные значения или другие предикторы, после чего оценивается зависимость $\sigma_i^2 = f(z_i)$ и веса принимаются как $w_i = 1/\sigma_i^2$. Такой метод эффективен, если зависимость дисперсии от предикторов является гладкой и аппроксимируемой.

Существенным развитием базового подхода стало внедрение IRLS, который позволяет уточнять веса на каждом шаге на основе текущих остатков. Алгоритм IRLS начинается с начальных весов $w_i^{(0)} = 1$, после чего на каждом шаге пересчитываются оценки коэффициентов и обновляются веса $w_i^{(t+1)} = g(\hat{\varepsilon}_i^{(t)})$, где $g$ — функция, определяющая закон изменения весов. Обычно используют $g(\hat{\varepsilon}_i) = 1/(\hat{\varepsilon}_i^2 + \delta)$ для стабилизации вычислений [11]. Метод IRLS обеспечивает робастность к выбросам и позволяет учитывать сложные формы гетероскедастичности. IRLS может быть реализован в ускоренной форме для задач больших данных, где классическая реализация оказывается вычислительно затратной. Существует усовершенствованный вариант IRLS, основанный на методах сопряжённых градиентов и предварительного масштабирования, что позволило существенно сократить количество итераций без потери точности оценок [11]. Этот метод показал эффективность в задачах регрессионного анализа с большим числом предикторов.

GLS учитывает не только неоднородность дисперсий, но и корреляцию между ошибками. Если ковариационная матрица ошибок $\mathbf{Q}$ известна, то оценка коэффициентов вычисляется как $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y}$. На практике $\mathbf{Q}$ неизвестна и оценивается по остаткам, что приводит к методу FGLS (Feasible GLS). Этот метод даёт асимптотически эффективные оценки при корректной спецификации ковариационной структуры [12]. Существует вариант FGLS, в котором оценка условной дисперсии выполняется с помощью методов машинного обучения, в частности, метода опорных векторных регрессий (SVR). Такой гибридный подход позволил улучшить аппроксимацию функции дисперсии и повысить точность весов в условиях сложной нелинейной зависимости между признаками и дисперсией ошибок. Данный метод превосходит классический FGLS по эффективности при наличии нелинейных эффектов и большой размерности данных [12].

Разработана обобщённая математическая формулировка методов повторного взвешивания [13], включающая IRLS, робастные оценки Хубера и Tukey's biweight как частные случаи единой оптимизационной задачи. В [13] показано, что все эти методы сводятся к минимизации обобщённой функции потерь вида $L(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N} \rho\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i'\mathbf{b}}{s_i}\right)$, где функция $\rho$ определяет форму робастного штрафа, а веса определяются как $w_i = \psi(u_i)/u_i$, где $\psi$ — производная $\rho$. Такой подход объединяет классические и современные методы взвешивания, подчёркивая их математическую взаимосвязь.

В [14] подчёркивается, что выбор весов в WLS может быть как детерминированным, так и стохастическим. В стохастическом подходе веса рассматриваются как случайные величины с распределением, зависящим от свойств наблюдений. Это позволяет учитывать неопределённость в оценке дисперсий и повышать устойчивость модели к выбросам. Такой подход применяется, например, при анализе данных с пропущенными значениями или при неполных измерениях.

Было показано, что при корректно оценённой дисперсии метод обратных весов даёт наилучшие результаты, однако при сильной шумовой компоненте и наличии выбросов более устойчивыми оказываются робастные методы IRLS [10]. Таким образом, выбор метода должен зависеть от свойств данных.

С точки зрения вычислительной эффективности классические методы WLS имеют преимущество в задачах малой размерности, где известны точные дисперсии ошибок. Однако при росте размерности и сложной структуре гетероскедастичности предпочтительнее итерационные и гибридные методы [12]. Применение машинного обучения в оценке весов открывает перспективу автоматизации выбора оптимальной функции дисперсии и позволяет работать с данными, где классические предположения статистики нарушаются.

Сравнительный анализ показывает, что метод с известными весами (по обратной дисперсии) является идеальным, если доступна достоверная информация о точности измерений. IRLS эффективен в условиях неоднородных шумов и при наличии выбросов, а FGLS и его модификации – при структурированной корреляции ошибок. Методы, основанные на машинном обучении, дают лучшие результаты при сложных нелинейных зависимостях и больших данных [12].

Следует отметить, что ни один из методов не является универсальным. Их эффективность зависит от сочетания факторов — структуры дисперсий, объёма выборки, коррелированности наблюдений и требуемой робастности оценок. Поэтому в современной практике рекомендуется применять комбинированные подходы, объединяющие преимущества разных методов: использовать предварительную оценку дисперсий через регрессию остатков, затем уточнять веса с помощью IRLS, а при необходимости корректировать результаты через FGLS [10].

Определение весов во взвешенной линейной регрессии представляет собой многогранную задачу, в которой сочетаются аналитические, итерационные и обучающие методы. Каждый из них имеет собственную математическую основу, область применимости и ограничения. В совокупности они формируют современный инструментарий анализа данных, позволяющий получать устойчивые и точные оценки параметров в условиях реальной, неоднородной и шумной информации [13].

## Заключение

Проведённый обзор показал, что методы определения весов WLS играют ключевую роль в обеспечении точности и устойчивости оценок модели. Классические подходы, основанные на обратных дисперсиях ошибок, сохраняют свою актуальность благодаря математической

строгости и интерпретируемости. Однако в реальных условиях, когда структура дисперсий неизвестна, более эффективными оказываются итерационные и адаптивные методы, позволяющие уточнять веса на основе эмпирических данных, что соответствует задаче создания модели управления гипервизором.

Современные исследования всё чаще демонстрируют преимущества использования гибридных алгоритмов и методов машинного обучения для автоматического подбора весов. Такие подходы позволяют учитывать сложные нелинейные зависимости в данных и адаптироваться к их структуре, обеспечивая высокую точность даже при выраженной гетероскедастичности. Тем не менее, они требуют больших вычислительных ресурсов и тщательной настройки, что ограничивает их применение для построения адаптивной системы управления гипервизорами KVM.

**Литература**


1. *Dittner R., Rule D.* The Best Damn Server Virtualization Book Period: Including Vmware, Xen, and Microsoft Virtual Server. 1-е изд. Syngress, 2007. – 960 p.

2. *Abeni L., Faggioli D.* Using Xen and KVM as real-time hypervisors // Journal of Systems Architecture. – 2020. – V. 106. – P. 101709.

3. *Ferubko A. O., Kazakov O. D.* Development and implementation of a KVM/QEMU hypervisor management algorithm considering host and guest OS requirements // Frontiers in Cybersecurity, Artificial Intelligence, and Data-Driven Technologies Research Anthology and Selected Contributions / под ред. Grigorieva A. V., Zulpykhar Z. E., Telnov V. P. UAE: The Consortium for the Advancement of Science and Technology, 2025. – P. 43–47.

4. *Elmhaia O. [et al.]* An efficient mesh-free approach for the determination of stresses intensity factors // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2021. – V. 133. – P. 49–60.

5. *Hwang E., Hong W.-T.* A multivariate HAR-RV model with heteroscedastic errors and its WLS estimation // Economics Letters. – 2021. – V. 203. – C. 109855.

6. *Cui Y., Zheng S.* Iteratively reweighted least square for kernel expectile regression with random features // Journal of Statistical Computation and Simulation. Taylor & Francis. – 2023. – V. 93, No 14. – P. 2370–2389.

7. *Tausiesakul B., Asavaskulkiet K.* Iteratively Reweighted Least Squares by Diagonal Regularization // 2023 20th International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE). – 2023. – P. 112–117.

8. *Arai Y., Otsu T., Xu M.* GLS under monotone heteroskedasticity // Journal of Econometrics. – 2024. – V. 246, No 1. – P. 105899.

9. *Rocha A., Miranda M. C.* A Robust Version of the FGLS Estimator for Panel Data // Recent Developments in Statistics and Data Science / под ред. Bispo R. [et al.] Cham: Springer International Publishing, 2022. – P. 325–335.

10. *Tellinghuisen J.* Chapter 10 Least Squares in Calibration: Weights, Nonlinearity, and Other Nuisances // Methods in Enzymology. Academic Press. – 2009. – V. 454. – P. 259–285.

11. *Chen C. [et al.]* Fast iteratively reweighted least squares algorithms for analysis-based sparse reconstruction // Medical Image Analysis. – 2018. – V. 49. – P. 141–152.

12. *Miller S., Startz R.* Feasible generalized least squares using support vector regression // Economics Letters. – 2019. – V. 175. – P. 28–31.

13. *Giannelli C. [et al.]* A general formulation of reweighted least squares fitting // Mathematics and Computers in Simulation. – 2024. – V. 225. – P. 52–65.

14. Weighted Least Squares – an overview | ScienceDirect Topics [Электронный ресурс]. URL: https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/weighted-least-squares (дата обращения: 16.11.2025).

УДК 004.4

# ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНОГО RL-АГЕНТА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ В ММО-СИМУЛЯЦИИ

**М. О. Фигуров, Б. Р. Мищук**

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта*

**Аннотация.** Регулирование экономических потоков в замкнутых виртуальных экономиках является одной из наиболее актуальных задач в современной сфере информационных технологий. Традиционно балансом виртуальной экономики занимается целый отдел специалистов, которые оперативно реагируют на шоковые воздействия. В настоящей статье рассмотрен вопрос разработки и применения адаптивного RL-агента, способного в режиме реального времени регулировать ключевые экономические параметры для стабилизации денежной массы в виртуальной экономике ММО-игры EvE online. Разработанный в результате исследования программный комплекс демонстрирует способность поддерживать стабильность системы и применять различные стратегии для экстренного реагирования на кризисы.

**Ключевые слова:** виртуальная экономика, reinforcement learning, уравнение Беллмана, математическое моделирование, динамическое регулирование, нейросети.

## Введение

Виртуальная экономика в онлайн-играх и мета-сервисах является симулякром, прообразом которого служит экономика реального мира, за исключением того, что вся генерация валюты и ресурсов внутри системы полностью подконтрольна разработчикам и не привязана к чему-либо материальному [1]. Тем не менее доход с неё вполне реален: к примеру, согласно финансовым отчетам по состоянию на 2022 год, популярная ММО игра World of Warcraft принесла разработчикам порядка 12.8 миллиардов долларов [2]. Рынок игровой индустрии демонстрирует экспоненциальный рост за последнее десятилетие с лидирующим трендом на создание виртуальных миров и онлайн-сервисов с собственной экономикой [3]. Однако для достижения стабильности виртуальной экономики без ущерба для игрового процесса, разработчикам приходится балансировать замкнутую экономическую систему таким способом, чтобы она исключала критические состояния, такие как инфляция или дефляция, а также была максимально прозрачной и справедливой по отношению к своим участникам.

Объектом исследования в данной работе выступает процесс динамического регулирования экономических потоков в модели, построенной на основе открытых данных по экономике ММО-игры EVE Online. Целью настоящей научно-исследовательской работы является проектирование и разработка программного комплекса на базе RL для решения проблемы для динамического регулирования экономических потоков в ММО-симуляции.

Задачами исследования являются:

1. Анализ экономической системы EVE Online и выявление основных проблем с её регулированием.

2. Разработка математической модели виртуальной экономической среды для RL-агента и его обучение.

3. Разработка прототипа программного комплекса динамического регулирования экономических потоков в виртуальной экономике и анализ результатов его работы.

## Методы исследования

Виртуальная экономика многопользовательских онлайн-проектов обычно устроена таким образом, что внутриигровые механики проекта направлены на получение или трату игроками виртуальной валюты. Источники получения валюты и точки её сбыта строго контролируется разработчиками и именуются «кранами» (англ. faucets) и «раковинами» (англ. sinks) [4]. Ключевая задача разработчиков — настроить экономические потоки таким образом, чтобы не допускать возникновения неконтролируемой инфляции или дефляции валюты. Показательным примером сложной, управляемой игроками экономики является MMO EVE Online. Для анализа её актуального состояния разработчики ежемесячно публикуют отчеты MER (Monthly Economic Reports), представляющие собой открытые данные по различным аспектам актуальной внутриигровой экономики [5]. Несмотря на продуманность ручного баланса экономики, он не всегда даёт оптимальный результат. Для подтверждения этого тезиса рассмотрим агрегированные данные из отчетов MER. В качестве количественного показателя экономической стабильности возьмем чистый денежный поток (Net ISK Delta, где ISK – название внутриигровой валюты). Он отражает разницу между всеми «кранами» и «раковинами» и напрямую демонстрирует тенденции роста или сокращения общей денежной массы в игре. На основе данных MER был построен временной ряд показателя Net ISK Delta в период с 2021 по 2024 год (см. рис. 1). Несмотря на приближение к нулевому балансу, наблюдаются пиковые значения.

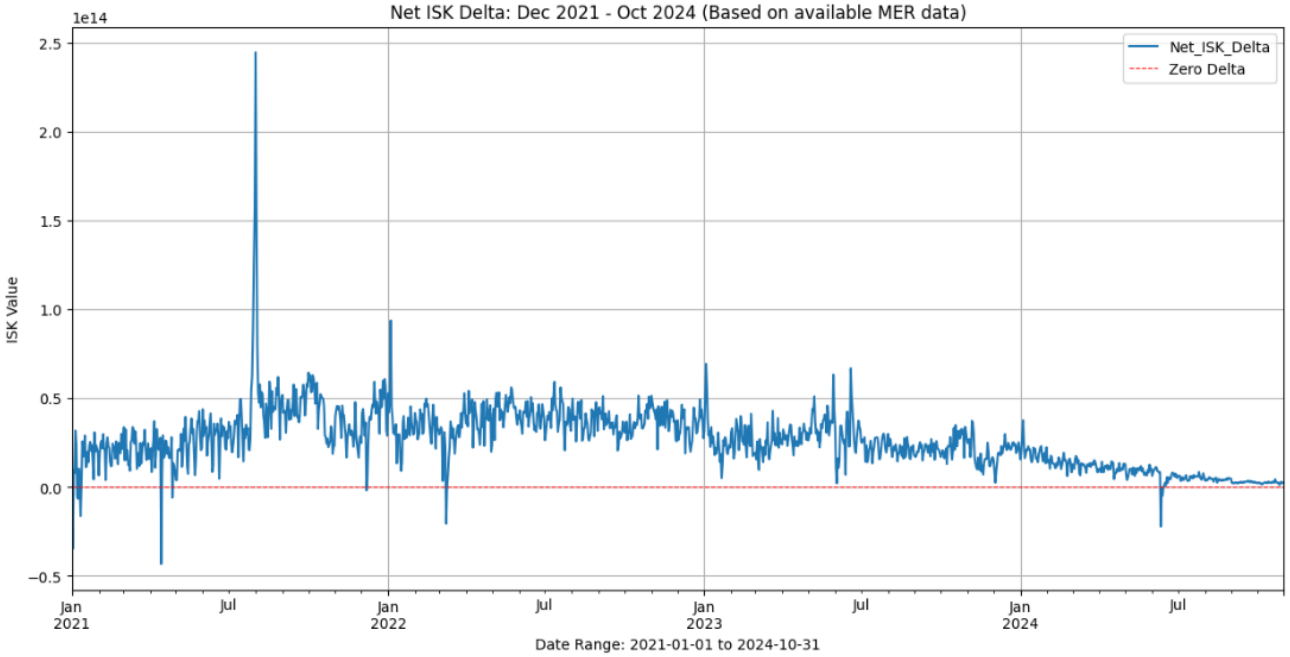



*Рис. 1. Динамика показателя Net ISK Delta в EVE Online с 2021 по 2024 год*

Net ISK Delta в основном держится около нуля или немного выше, что является более устойчивым состоянием, чем доминация выраженных инфляционных и дефляционных трендов. Однако экономика остаётся неустойчивой, о чем свидетельствует наличие множественных экстремальных пиковых значений на графике, когда денежная масса стремительно увеличивается или сокращается под воздействием внутриигровых событий. Например, отрицательное пиковое значение в апреле 2022 года совпадает по времени с последствиями глобального военного конфликта («World War Bee 2») [6]. Резюмируя проведенный анализ, даже в относительно стабильный период, экономика подвержена резким шокам, на которые ручное управление не всегда способно среагировать. Предполагаемая RL-система призвана решить эту проблему путем динамической адаптации экономических параметров, обеспечивая немедленную реакцию на любые предпосылки дестабилизации экономических потоков внутри игры.

Динамическое регулирование экономики представляет собой Марковский процесс принятия решений, определяемый кортежем $S$, $A$, $P$, $R$, $\gamma$, где $S$ — пространство состояний, $A$ — пространство действий, $P$ — функция вероятностей перехода, $R$ — функция вознаграждения, $\gamma$ — коэффициент дисконтирования [7]. В рассматриваемой экономической среде:

• Состояние определяется как $s_t \in s$ и включает в себя всю историю показателя Net ISK Delta $(d_t, d_{t-1})$.

• Действие определяется как $A_t \in A$ и определяет величины изменений экономических параметров.

• Функция перехода определяется как $(P(s_{t+1} \mid s_t, a_t))$ и описывает динамику системы, учитывая стохастичность среды. Net ISK Delta моделируется как стохастический авторегрессионный процесс:

$$d_{t+1} = \alpha d_t - \beta f\left(a_t\right) + \varepsilon_t, \tag{1}$$

где $\alpha$ — коэффициент инерции, $\beta$ — вектор эффективности, а $\varepsilon_t$ — случайный шум $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

• Функция вознаграждения определяется как $R_t$ и призвана стабилизировать экономику, обеспечивая плавность регулирования:

$$R_t = w_d e^{-k_d |d_{t+1}|} - w_a \left\| a_t - a_{t-1} \right\|^2. \tag{2}$$

Цель RL-агента — найти оптимальную политику, максимизирующую ожидаемое дисконтированное вознаграждение $G_t = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_t R_{t+k+1}$. Фундаментом для нахождения такой политики служит уравнение оптимальности Беллмана:

$$Q*\left(s,a\right) = E_{s' \sim P}\left[ R\left(s,a,s'\right) + \gamma \max_{a'} Q*\left(s',a'\right) \right]. \tag{3}$$

Из-за непрерывности пространств состояний и действий аналитическое решение уравнения оптимальности Беллмана в данном случае не представляется возможным, однако нахождение оптимальной политики возможно через функциональную аппроксимацию с помощью нейронных сетей. В данном случае агент взаимодействует со средой, описанной уравнениями (1) и (2) и итеративно обновляет веса сетей, чтобы через обучение нейросетевого агента найти численное приближенное решение уравнения (3).

Для реализации задачи разработки RL-системы были использованы современные фреймворки [8]. В качестве алгоритма обучения в первой итерации RL-агента был выбран PPO [9], цель которого заключалась в регуляции налоговых ставок на транзакции для снижения инфляции, однако это привело к противоположному результату (см. рис. 2). Синяя линия на среднем графике соответствует реальным данным, красная — данным полученным в результате симуляции. Агент научился симулировать Net ISK Delta на основе реальных исторических данных, но постоянно выбирал снижение налоговой ставки как оптимальную стратегию, что способствовало дальнейшему усилению инфляционных процессов.

В процессе тестирования новых итераций агента были выявлены две основных проблемы данного этапа разработки — недостаточная сложность экономической модели и избыточно высокие штрафы за апробацию разных действий при обучении. Для достижения оптимального уровня налогообложения экономический движок среды был переписан с учетом закона Кривой Лаффера. Также алгоритм PPO был заменен на SAC (Soft Actor-Critic), ввиду его больше пригодности для обеспечения плавной настройки в непрерывном пространстве действий [10]. Новая версия RL-агента успешно справилась с задачей динамического регулирования экономики (см. рис. 3). Синяя линия на верхнем графике отражает изменение Net ISK Delta.

Разработанный агент продемонстрировал способность стабильно удерживать Net ISK Delta около целевого значения, а также оперативно реагировать на кризисы — на графике выше видно, как агент успешно скорректировал дефляционный скачок в краткий срок. В процессе обучения RL-агент принял решение установить на постоянной основе высокие налоги при

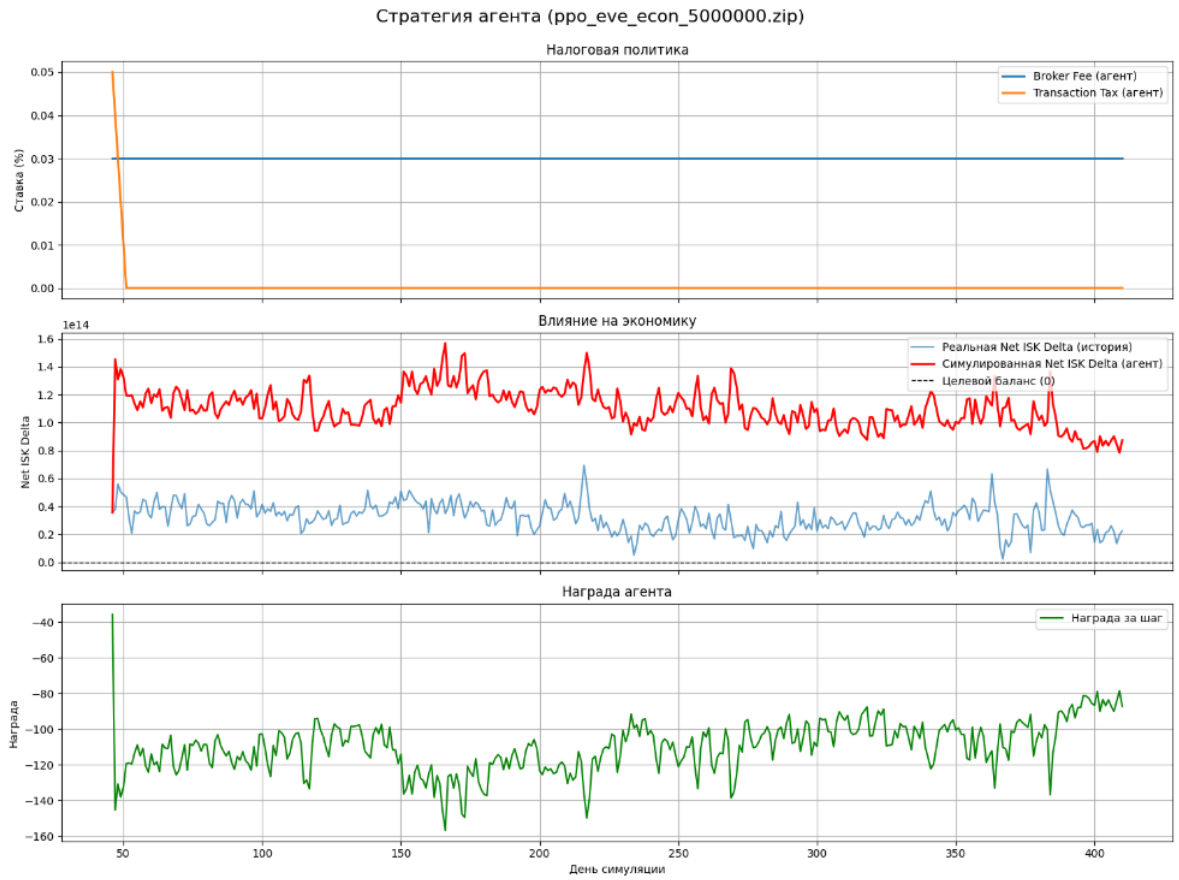



*Рис. 2. Первая итерация RL-агента (PPO)*

*Рис. 3. Новая версия RL-агента*

значительном сокращении выплат игрокам, что в долгосрочной перспективе игрового процесса, вероятно, приведет к сокращению пользовательской базы. Чтобы исправить данную проблему, в функцию награды при обучении модели был добавлен новый компонент — штраф за существенное отклонение параметров регулирования от базовых значений. Для достижения стабильной и прозрачной экономики был также введен штраф за резкие изменения значений при принятии решений RL-агентом (см. рис. 4).

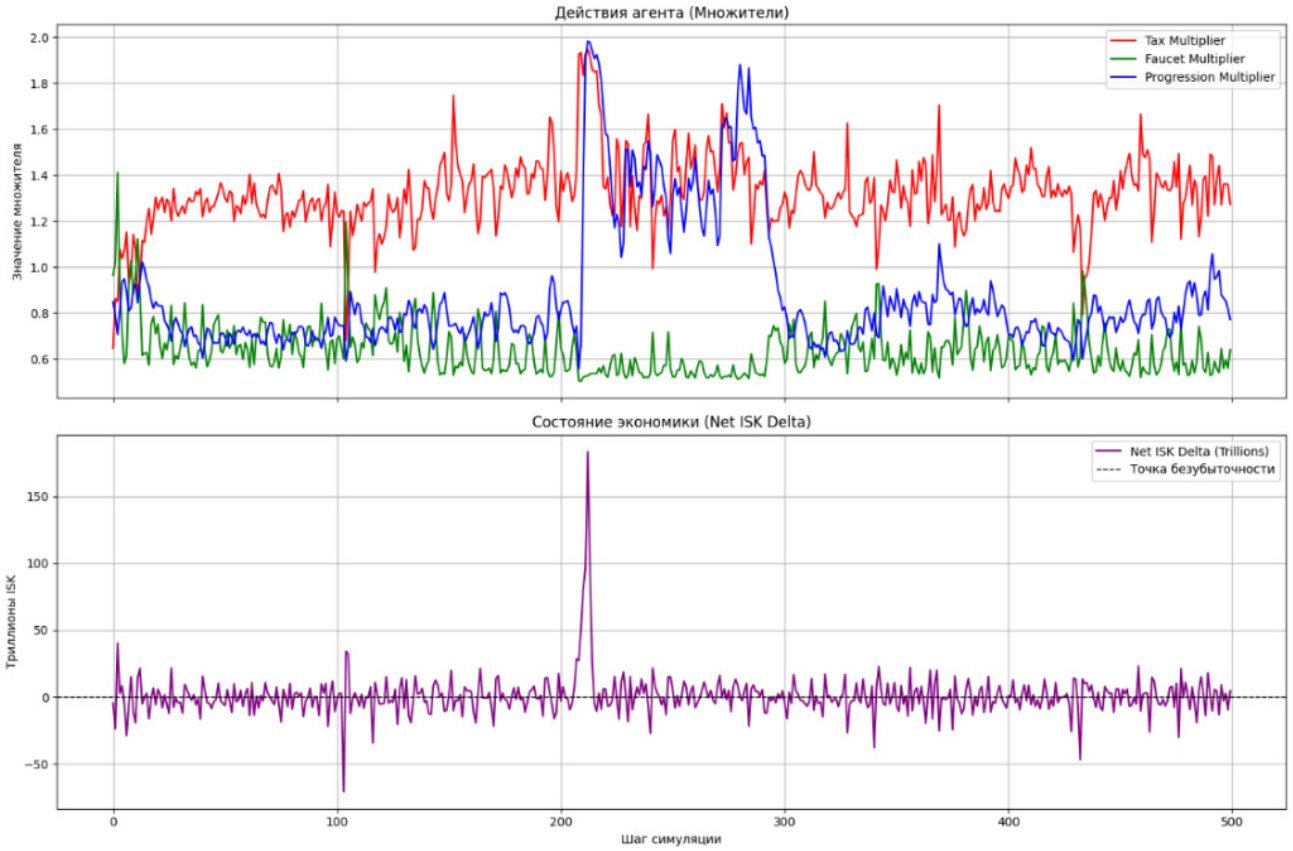



*Рис. 4. Финальная итерация RL-агента. Верхний график отражает действия агента в разные промежутки времени*

Обновленная версия RL-агента успешно поддерживает объем денежных масс около целевого значения, эффективно справляется с шоками и обеспечивает высокий уровень прозрачности для игроков. Налоговые ставки стали более предсказуемы и всегда поддерживаются на стабильном уровне, что позволяет игрокам строит свои бизнес-модели вокруг данного факта и минимизирует для них риски, связанные с резкими изменениями. Финальная версия RL-агента успешно разделяет инструменты настройки экономики и экстренного реагирования на кризисы и динамически выполняет логичные и предсказуемые действия по успешной стабилизации объемов денежных масс.

## Заключение

В рамках научно-исследовательской работы был разработан прототип программного комплекса динамического регулирования экономических потоков в виртуальной экономике. В ходе работы проведен анализ проведен анализ экономической системы EVE Online, разработана математическая модель виртуальной экономической среды, на основе которой был обучен RL-агент по регулированию экономики.

**Литература**

1. *Lehdonvirta V.* Virtual Economies: Design and Analysis / V. Lehdonvirta, E. Castronova. – Cambridge : The MIT Press, 2014. – 328 p.

2. Легенда, рожденная из хаоса // Коммерсантъ : [сайт]. – 2024. – URL: https://www.kommersant.ru/doc/7325460 (дата обращения: 22.06.2025).

3. *Castronova E.* Exodus to the virtual world / E. Castronova. – New York : St. Martin's Press, 2007. – 320 p.

4. Sinks & Faucets: Lessons on Designing Effective Virtual Game Economies // Medium : [сайт]. – 2022. – URL: https://medium.com/1kxnetwork/sinks-faucets-lessons-on-designing-effective-virtual-game-economies-c8daf6b88d05 (дата обращения: 25.06.2025).

5. Monthly Economic Reports // EVE Online : [официальный сайт] / CCP Games. – Reykjavik, 2014. – URL: https://www.eveonline.com/news/t/monthly-economic-reports (дата обращения: 28.06.2025).

6. The Ancient Gaming Noob. World War Bee 2: A beginner's guide to EVE Online's epic inter-player war / The Ancient Gaming Noob. – 2022. – 30 p. – URL: https://tagn.wordpress.com/wp-content/uploads/2022/02/world-war-bee-2-brief-final.pdf (дата обращения: 01.07.2025).

7. *Sutton R. S.* Reinforcement learning: An introduction / R. S. Sutton, A. G. Barto. – 2-е изд. – Cambridge : The MIT Press, 2018. – 526 p.

8. Stable-baselines3: Reliable reinforcement learning implementations / A. Raffin, A. Hill, A. Gleave, A. Kanervisto // The Journal of Machine Learning Research. – 2021. – Vol. 22, No 268. – P. 1–8.

9. Proximal policy optimization algorithms / J. Schulman, F. Wolski, P. Dhariwal [et al.]. – 2017. – URL: https://arxiv.org/abs/1707.06347 (дата обращения: 26.10.2025).

10. *Уиндер Ф.* Обучение с подкреплением для реальных задач / Ф. Уиндер ; [пер. с англ. А. А. Слинкина]. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2023. – 400 с.

УДК 519.6

# ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА СУПЕР-ЭВМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГИДРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АКТУАЛЬНОГО СЦЕНАРИЯ ВНЕЗАПНОЙ ДЕПРЕССИИ АКТИВНО РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВИДОВ ГРЕБНЕВИКА И ПРОМЫСЛОВЫХ РЫБ ПРИ ПОПАДАНИИ В МЕЛКОВОДНЫЙ ВОДОЕМ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ

**А. В. Никитина[1,2,3], А. А. Филина[2], Т. В. Лященко[3]**

*[1]Донской государственный технический университет*
*[2]ООО «НИЦ супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров»*
*[3]Южный федеральный университет*

**Аннотация.** Целью работы является построение и исследование математической модели процессов взаимодействия популяций планктона и гребневика на основе современных информационных технологий и вычислительных методов, позволяющей повысить точность прогнозного моделирования экологической обстановки мелководного водоема в летний период. Модель учитывает: движение водного потока; микротурбулентную диффузию; нелинейное взаимодействие популяций планктона и гребневика; биогенный, температурный и кислородный режимы; влияние солености. На базе супер-ЭВМ разработано экспериментальное программное обеспечение, позволяющее прогнозировать сценарии развития экосистем мелководных водоемов на примере Азовского моря.
**Ключевые слова:** математическая модель, гидробиологические процессы, экспедиционные исследования, гребневик, Азовское море, параллельный алгоритм, многопроцессорная вычислительная система.

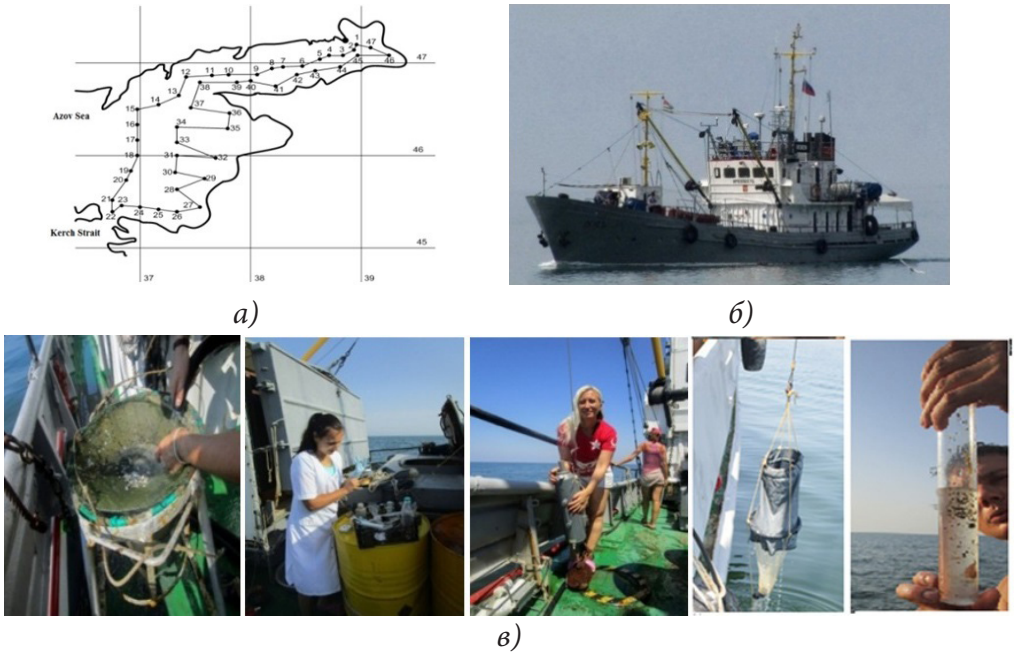
## Введение

В ряд серьезных мировых проблем водной экологии входит биологическое загрязнение [1]. Инвазия водных вселенцев зачастую происходит при сбросе балластных вод морских судов. Математическое моделирование инвазий имеет большой теоретический интерес и практическую значимость, относится к актуальному и перспективному направлению водной экологии. Одним их этапов разработки полной модели экосистемы Азово-Черноморского бассейна является создание и исследование моделей гидробиологических процессов, включая модели взаимодействия фито- и зоопланктона. В комплекс моделей взаимодействующих популяций основных гидробионтов: разных видов фито-, зоопланктона и желетелого макропланктона, в том числе популяции гребневиков *Mnemiopsisleidyi* (*M. leidyi*) и хищного *Beroeovata* (*B. ovata*).

Известно, что до середины 80-х медуза *Aureliaaurita* была преобладающим видом в желетелом планктоне Черного моря, экосистема Черного моря находилась в относительном равновесии, и улов рыбы оставался на приблизительно постоянном уровне. После появления в 1982 г. в акватории Чёрного моря *M. leidyi*, поедающего зоопланктон, икринки и личинки рыб и моллюсков, количество пищи для рыб к 1989 г. сократилось в 30 раз по сравнению с периодом 1978–1988 гг., что стало одной из причин «хамсового кризиса» [2]. В 1999 г. *M. leidyi* через Волго-Донской канал заселил Каспийское море, в результате чего было уничтожено 75 % зоопланктона, что сильно повлияло на пищевые цепочки моря. В 2006 г. *M. leidyi* был впервые замечен в Северном и Балтийском морях. В 1999 г. появился хищный *B. ovata*, питающийся исключительно гребневиками отряда *Lobata* [3]. Каждый период появления гребневиков в значительном количестве характеризовался изменениями в структуре сообществ планктона и влиял на воспроизводство рыб.

Сотрудниками института океанологии им. П. П. Ширшова проводились многолетние исследования экосистемы в различных регионах Азово-Черноморского бассейна, результаты которых позволяли выявить роль желетелого макропланктона в функционировании его экосистемы. Сравнение количества макро- и мезозоопланктона, полученного при использовании различного оборудования и методик (сети, бутылки, подводная видеосъемка, подсчет с подводных установок), анализ улова различных планктонных сетей показывают, что вселение *M. leidyi* вызвало значительное понижение питательной биомассы зоопланктона и улова рыб, питающихся планктоном. В прибрежных водах северо-восточной части Черного моря было отмечено интенсивное поглощение личинок двустворчатых моллюсков гребневиком *M. leidyi*. Изучалась сезонная динамика популяций гребневиков, их взаимодействие и возрастная структура, основные физиологические и экологические характеристики, масса сухой пробы, содержание углерода, соотношение длины/массы и количественные параметры гребневиков при питании и воспроизводстве измерялись в лабораторных экспериментах. Ежедневный анализ динамики популяции *M. leidyi* выявил волны периодической интенсивности размножения каждые 10–15 дней, причем постепенное повышение достигало максимума в августе и далее рост популяции прерывается резким повышением количества *B. ovata*, что приводило к полному исчезновению *M. leidyi* в ноябре-декабре.

С 2000 г. сотрудниками ЮФУ, ДГТУ, Азовинформцентра, Азово-Черноморского НИИ рыбного хозяйства («АЗНИИРХ»), Южного научного центра РАН был проведен ряд экспедиционных исследований Азовского моря. В июле 2017 г. сотрудниками Донского государственного технического университета, Южного федерального университета, Южного научного центра РАН на акватории Азовского моря был осуществлен рейс на научно-исследовательском судне «Денеб» (рис. 1) [4].




*а)* *б)*

*в)*

*Рис. 1. Экспедиционные исследования 2017 г.: а) маршрут движения судна; б) НИРС «Денеб»; в) гидробиологические исследования*

Основная задача экспедиционных исследований состояла в комплексном изучении современного состояния и пространственно-временных изменений гидробиологического, гидрологического и гидрохимического режимов Азовского моря и Таганрогского залива. В ходе рейсов было исследовано более 20 комплексных океанографических станций, отобраны пробы воды, планктона и бентоса, проведены судовые наблюдения за птицами и морскими млекопитающи-

ми. Изучались гидрохимические условия (содержание кислорода, pH, солевой и биогенный состав воды, хлорированные углеводороды, в том числе пестициды; тяжелые металлы — ртуть, свинец, кадмий, медь; фенолы; синтетические поверхностно-активные вещества). Обработка проб осуществлялась по общепринятым методикам гидрохимических исследований в условиях оснащенной необходимым оборудованием лаборатории. Отбор проб фитопланктона выполнялся батометром в нескольких горизонтах. Численность и биомассу организмов каждой таксономической группы рассчитывали на 1 м$^3$ воды. В каждой пробе определялась объемным методом биомасса гребневиков мнемиопсиса и берое и их размеры.

## 1. Постановка задачи

При разработке пространственно-неоднородной модели взаимодействующих популяций основных гидробионтов, в том числе популяций фито-, зоопланктона, а также гребневиков *M. leidyi* и хищного *B. ovata*, учитывались их видовые особенности выживания. Для моделирования динамики кормовой базы популяций гребневиков использовались натурные и экспертные оценки распределения трофности всей акватории ареала гребневиков с районированием Азовского моря, учитывались основные эколого-биологические процессы: рост, смертность, метаболизм (оценка влияния продуктов выделения мнемиопсиса (слизь, пелеты) и продуктов его распада на численность микрофлоры и формирование протеолитической и амилолитической активности), физический перенос гидробионтов, включая активную и пассивную миграции, а значит учет движения водного потока, диффузии, таксиса. В процессе проведенных исследований установлено, что индексы биоразнообразия фитопланктона выше в местах массового скопления мнемиопсиса. В результате интенсивного развития фитопланктона показатели хл. «а» также значительно выше в районах обитания мнемиопсиса, что хорошо прослеживается как по картам прямых измерений хлорофилла, так и спутниковым данным SeaWiF. *M. leidyi* может опосредованно регулировать динамику и распределение летнего фитопланктона через механизм потребления зоопланктеров фитофагов, производя эффект «каскада» на низшие трофические уровни, через зоопланктон на фитопланктон и хл «а». Выеданием немиопсисоммеропланктона (личинок бентосных животных) и демерсального планктона приводит к уменьшению биомассы представителей бентоса.

При моделировании гидробиологических процессов (взаимодействие планктона и гребневиков) в мелководном водоеме — Азовское море учитывалось пространственное распределение солености и температуры. Численность мнемиопсиса зависит от дальности его проникновения, определяется направлением и скоростью ветровых течений, способствующих заносу вод с высокой соленостью.

Модель для описания эколого-биологического процесса взаимодействия гребневиков и планктона имеет вид [5, 6]:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + div\left(\mathbf{U}P_i\right) = \mu_i \Delta P_i + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \frac{\partial P_i}{\partial z}\right) + \psi_i,\ i \in \overline{1,9},$$

$$\psi_1\left(P_1,P_2,P_3\right) = \left\{\alpha_1 P_3 - \delta_1 P_2 - \varepsilon_1\right\} P_1,\ \psi_2\left(P_1,P_2\right) = \left\{\alpha_2 P_1 - \varepsilon_2\right\} P_2, \qquad (1)$$

$$\psi_3\left(P_1,P_3,P_4\right) = \left\{\alpha_3 P_4 - \delta_3 P_1 - \varepsilon_3\right\} P_3,\ \psi_4\left(P_3,P_4,P_5\right) = \left\{\alpha_4 P_5 - \delta_4 P - \varepsilon_4\right\} P_4,\ \alpha_4 = \left(\alpha_{04} + \gamma_4 M_4\right),$$

$$\psi_5\left(P_1,P_2,...,P_9\right) = \sum_{i=1,i\neq 5}^{9} \varepsilon_i P_i - \delta_5 P_4 P_5 + B\left(\overline{P}_5 - P_5\right) + f,\ \psi_m\left(P_1,P_2,...,P_9\right) = \sum_{l=1}^{4} k_l P_l - \varepsilon_m P_m,\ m \in \overline{6,9},$$

где $P_i$ — значения концентраций, $i \in \overline{1,9}$: 1, 2 — гребневиков *M. leidyi* и *B. ovata*; 3 — зоопланктона; 4 — фитопланктона; 5 — биогенного вещества; 6, 7, 8, 9 — метаболитов гребневиков (6, 7) и планктона (зоо- (8) и фито- (9)); $\psi_i$ — функции трофических взаимодействий; $\alpha_l$ — функция роста гребневиков и планктона, $l = \overline{1,4}$; $\alpha_{04}$, $\gamma_4$ — скорость роста фитопланктона в

отсутствие метаболита и параметр воздействия; $B$ — скорость поступления биогенных веществ $P_5$; $\overline{P}_5$ — предельно возможная концентрация биогенных веществ; $\varepsilon_l$ — коэффициент, учитывающий смертность $l$-го вида; $\varepsilon_m$ — коэффициенты разложения метаболита, $m=\overline{6,9}$; $k_l$ — коэффициенты экскреции $l$-го вида (гребневиков ($l=\overline{1,2}$), зоопланктона ($l=3$), фитопланктона ($l=4$)); $\delta_1,\delta_3,\delta_4$ — коэффициенты убыли за счет выедания $f=f(x_1,x_2,x_3,t)$ — функция источника $P_5$ (загрязнения); $\mathbf{u}$ — поле скоростей водного потока; $\mathbf{U}=\mathbf{u}+\mathbf{u}_{0i}$, $\mathbf{U}=(U_1,U_2,U_3)$ — скорость конвективного переноса вещества; $\mathbf{u}_{0i}$ — скорость осаждения $i$-й субстанции; $\mu_i\,\nu_i$ — диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях $i$-й субстанции.

Расчетная область $G$ представляет собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема $\Sigma_0$, дном $\Sigma_H=\Sigma_H(x,y)$ и цилиндрической поверхностью $\sigma$ для $0<t\le T_0$. $\Sigma=\Sigma_0\cup\Sigma_H\cup\sigma$ — кусочно-гладкая граница области $G$.

К системе (1) добавим начальные условия:

$$P_i\big|_{t=0}=P_{i0}(x,y,z),\ i=\overline{1,9} \tag{3}$$

и граничные условия:

$$P_i=0 \text{ на } \sigma,\ \mathbf{U}_{\mathbf{n}}<0;\quad \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{n}}=\varphi_i \text{ на } \sigma,\ \mathbf{U}_{\mathbf{n}}\ge 0;\quad \frac{\partial P_i}{\partial z}=0 \text{ на } \Sigma_0;\quad \frac{\partial P_i}{\partial z}=-\beta_i P_i \text{ на } \Sigma_H,$$

где $\beta_i$ — коэффициент поглощения $i$-й компоненты донными отложениями, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности $\Sigma$.

## 2. Метод решения

Для решения задачи переноса предложено использовать схему, построенную на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» (англ. Upwind Leapfrog) и «крест» (англ. Standard Leapfrog) с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации [7].

Для изучения взаимодействия планктона, а также популяций гребневиков M. leidyi и хищного B. ovata вида (1)–(3) был разработан комплекс прикладных программ, позволяющий производить расчеты концентраций основных гидробионтов, включая: фито- и зоопланктон, желетелый микропланктон (виды-вселенцы — гребневики) в областях сложной формы (Азовское море и Таганрогский залив) [8]. Моделирование гидробиологических и гидродинамических процессов в трехмерной области сложной формы (Азовское море и Таганрогский залив) осуществлялось на последовательно сгущающихся прямоугольных сетках размерностями: $251\times351\times15$, $502\times702\times30$, $1004\times1404\times60$, … . Начальное распределение загрязняющих биогенных веществ, фито-, зоопланктона и гребневиков было учтено в форме, соответствующей пространственно-временным масштабам моделируемых процессов. Реализованный алгоритм численного решения позволяет свободно варьировать граничные условия, вид управляющих функций и значения соответствующих параметров.

Калибровка и верификация разработанной модели (1)–(3) для мелководного водоема проводились на основе экологических данных по Азовскому морю, полученных в ходе научно-исследовательских экспедиций, проводимых учеными ЮФУ, Южного научного центра Российской академии наук (ЮНЦ РАН) и Азовского научно-исследовательского института рыбного хозяйства (АзНИИРХ), начиная с 2000 г. Обработка экспедиционных данных заключалась в оцифровке, пересчете в стандартные единицы, классификации для использования в разных модельных задачах гидробиологии моря.

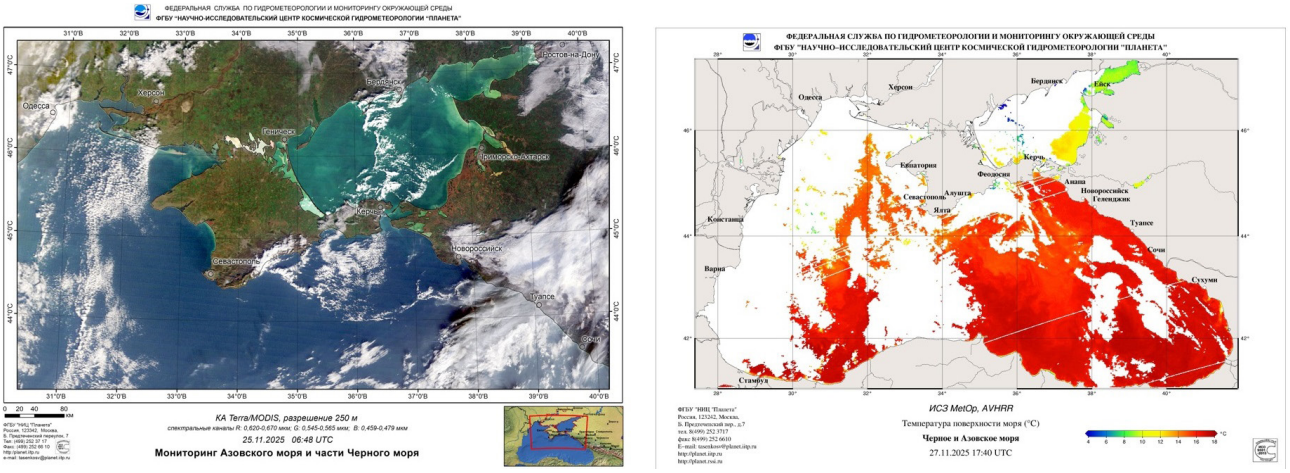
Разработанный для супер-ЭВМ комплекс программ включает: блок управления; блок ввода начальных данных для расчета концентраций зоопланктона, загрязняющих веществ; блок построения сеточных уравнений для расчетных функций в соответствии с разностной схе-

мой; блок расчета сеточных уравнений для концентраций планктона и питательных веществ адаптивным попеременно-треугольным методом скорейшего спуска; блок вывода значений концентраций рассчитываемых полей; базы океанологических и метеорологических данных; системы интерфейсов; системы визуализации. Программный продукт обладает удобным пользовательским интерфейсом и универсальным характером, привязка его к условиям конкретных объектов и районов осуществляется на уровне входной информации. При разработке программного комплекса использовался язык высокого уровня C++. Для кластерных систем использовалась технология передачи сообщений (MPI).

### 3. Результаты численных экспериментов

При моделировании пространственно-неоднородных процессов взаимодействия основных гидробионтов Азовского моря (1)–(3) учитывалась внешняя периодичность, приводящая к усложнению системы. При этом колебания плотности планктона могут быть столь велики, что не могут быть объяснены случайными флуктуациями, и визуальная картина такова, что сравнительно небольшие площади высокой плотности («пятна», «облака») разделены пространствами с низкими плотностями, иногда не фиксируемыми стандартными методами наблюдений. Особенно ярко это явление выражено в тех местах водоема, для которых характерна потребность в биогенных элементах. При моделировании процессов биологической кинетики учитывался вегетационный период фитопланктона.

В качестве входных данных для моделирования гидрофизических процессов помимо экспедиционных данных, литературных источников использовались различные системы портала «Аналитические ГИС» Института проблем передачи информации РАН (г. Москва), данные ФГБУ НИЦ «Планета» (рис. 2), АзНИИРХ.




*а)* *б)*

*Рис. 2. Экологические данные НИЦ «Планета» для Азово-Черноморского бассейна: а) спутниковый снимок Азовского моря; б) карта температуры водной поверхности*

На рис. 3, 4 показано влияние структур течений водного потока в Азовском море на распределение загрязняющего биогенного вещества и фитопланктона. На рис. 3 приведены результаты расчета концентрации загрязняющего биогенного вещества для модели (1)–(3) (начальное распределение полей течений при северном ветре). Результаты моделирования динамики фитопланктона в Азовском море представлены на рис. 4 ($N$ — номер итерации, начальное распределение полей течений водного потока при северном направлении ветра). Белым цветом выделены максимальные значения концентраций биогенного вещества (азота) и фитопланктона черным — минимальные. Рассчитанные при различных ветровых ситуациях

концентрации загрязняющих веществ и планктона принимались к рассмотрению, если относительная погрешность не превышала 30 %.

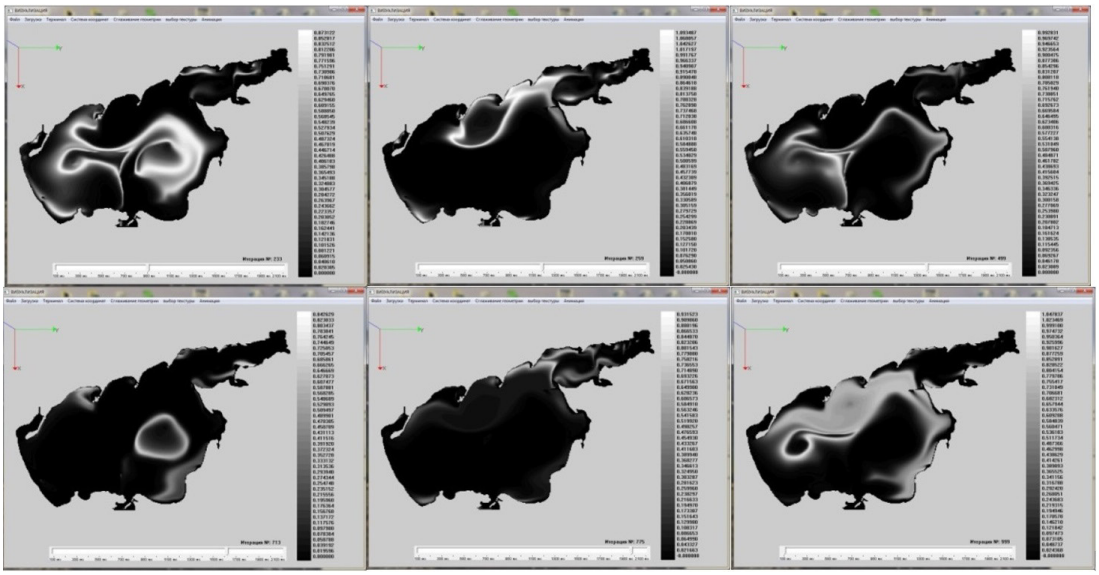


*Рис. 3. Распределение концентрации загрязняющих биогенных веществ в различные моменты времени*

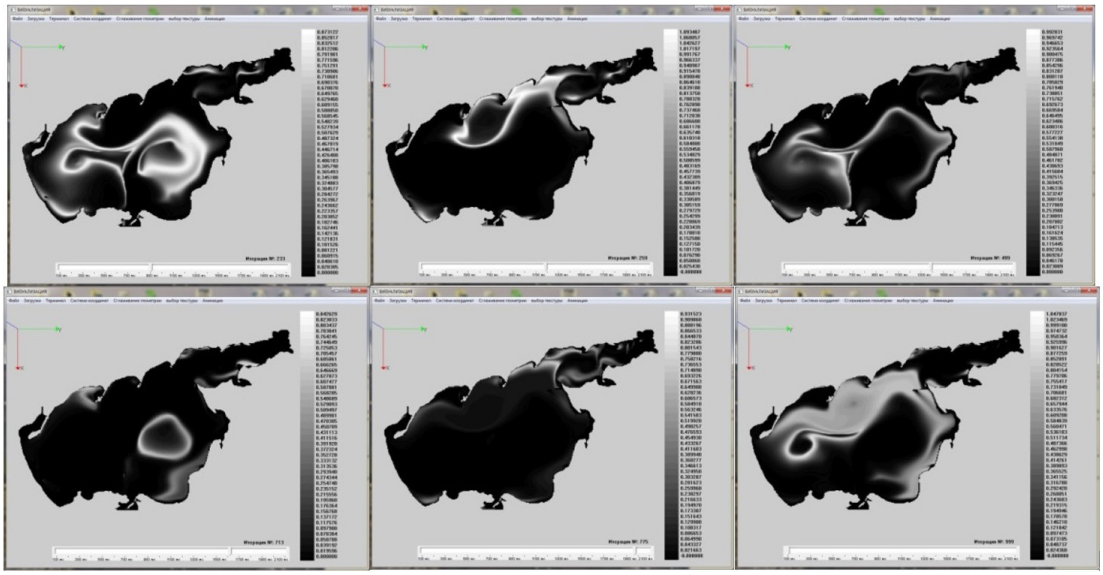


*Рис. 4. Распределение концентрации фитопланктона в различные моменты времени*

Критерий проверки адекватности построенной модели взаимодействия планктона и гребневиков (1)–(3) мелководного водоема — оценка погрешности моделирования с одновременным учетом натурных данных по имеющимся $n$ замерам, рассчитываемая по следующей формуле: $\delta = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(S_{k\,nat} - S_k\right)^2} \Big/ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} S_{k\,nat}^2}$, где $S_{k\,nat}$ — значение концентрации, полученное с помощью экспедиционных измерений; $S_k$ — значение, рассчитанное с помощью разработанной модели.

Выполнен анализ различных путей будущего развития экосистемы Азовского моря. Результаты позволяют сделать вывод, что *B. ovata* может контролировать прибрежные популяции *M. leidyi*. Модельные данные позволяют изучать и прогнозировать рост популяции *M. leidyi* в весенне-летний период и исчезновение вида после появления *B. ovata*. Кроме того, можно

наблюдать динамику изменения биомассы кормовой базы зоопланктона в прибрежных водах и открытом море, интенсивное воспроизводство двустворчатых моллюсков, сократившееся в последние годы под влиянием вселения *M. leidyi*, и процесс реставрации бентических сообществ. Дальнейшее развитие экосистемы Азово-Черноморского бассейна зависит от стабильности вселения *B. ovata*. В этом смысле необходимо упомянуть, что различие в климатических условий и циркуляции водных масс в последние десятилетия не оказывало отрицательного воздействия на развитие *B. ovata*. Раннее появление *B. ovata* в относительно холодный период отражает продолжительную его адаптацию к условиям Азово-Черноморского бассейна. Возможное развитие этого вида в начале лета может остановить вспышку *M. leidyi*, которая стала регулярной в июле-августе.

Результаты численного эксперимента позволяют прийти к выводу, что появление гребневика *M. leidyi* привело к необратимым серьезным изменениям на всех уровнях — от отдельных популяций до экосистемы всего моря. Постоянное вселение *B. ovata* приводит к восстановлению кормовой базы зоопланктона, бентических сообществ и популяций рыб, питающихся планктоном, в Азово-Черноморском бассейне. В результате жизнедеятельности мнемиопсиса происходит значительная структурно-функциональная перестройка экосистемы, влияющая на продукционно-деструкционные процессы.

## Заключение

С помощью экспедиционных исследований и спутниковых снимков проведена верификация разработанных моделей экосистемы Азовского моря. Реализована задача моделирования и прогноза состояния экосистемы Азовского моря в условиях антропогенного воздействия и инвазии гребневиков для всестороннего изучения данного уникального водного объекта.

Построены нестационарные пространственно-неоднородные модели эколого-биологических процессов взаимодействия гребневиков и планктона, нелинейное взаимодействие планктона, гребневиков *M. leidyi*, *B. ovata* как доминирующих особей желетелых видов инвазиантов в мелководном водоеме для изучения развития популяционного процесса при инвазии вселившихся видов гребневиков при противоборстве биотического окружения.

Построены разностные схемы, базирующиеся на дискретизации адвективных членов линеаризованных начально-краевых задач на пространственной сетке, на основе линейных комбинаций схем типа «кабаре» и «крест». Данные схемы имеют лучшую точность и повышенный запас устойчивости (применимы в большем диапазоне сеточных чисел Пекле) по сравнению с традиционными разностными схемами.

Разработан программный комплекс, численно реализующий нестационарные пространственно-неоднородные модели динамики основных гидробионтов, включая фито- и зоопланктон, желетелый макропланктон (виды-вселенцы – гребневики) с учетом адвективного и микротурбулентного движения водной среды, стоков и источников на границе, вегетационного периода фитопланктона, пространственного распределения температуры и солености в областях сложной формы на высокопроизводительной вычислительной системе.

Изучены различные сценарии изменения концентраций основных гидробионтов мелководного водоема (Азовское море), включая фито- и зоопланктон, в летний период.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-71-20001, https://rscf.ru/project/25-71-20001/

**Литература**

1. *Winberg G. G.* Diversity and unity of life phenomena and quantitative methods in biology / G. G. Winberg // Zhurn. total. biol. 2000. –Vol. 61, No 5. –P. 549–560.

2. Гребневик Mnemiopsis leidyi в Азовском и Черном морях: биология и последствия вселения / Под научной ред. д.б.н., проф. С. П. Воловика. – Ростов н/д. БКИ, 2000. – 500 с.

3. *Мартынюк М. Л.* Особенности развития популяций гребневиков-вселенцев Mnemiopsis leidyi (Agassiz, 1865) и Beroe ovata Mayer, 1912 в северо-восточной части Черного моря // Труды АзНИИРХ (Результаты рыбохозяйственных исследований в Азово-Черноморском бассейне): Сборник научных трудов по результатам исследований за 2014–2015 гг. Ростов н/Д, ФБГУН «АзНИИРХ», 2017. – Т. 1. – С.97–103.

4. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Кузнецова И. Ю., Атаян А. М., Никитина А. В.* Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 2. – С. 85–100.

5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М. : Наука, 1989. – 616 с.

6. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Belova Y. V., Nikitina A. V., Sumbaev V. V., Semenyakina A. A.* Supercomputer modeling of hydrochemical condition of shallow waters in summer taking into account the influence of the environment // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Т. 910. – P. 336–351.

7. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.* О разностных схемах кабаре и крест // Выч. мет. Программирование. – 2019. – Т. 20, № 2. – С. 170–181.

8. *Сухинов А. И., Никитина А. В., Атаян А. М., Литвинов В. Н., Белова Ю. В., Чистяков А. Е.* Суперкомпьютерное моделирование гидробиологических процессов прибрежных систем // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 1. – С. 81–103.

УДК 620.179.13

# ЦИФРОВЫЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ДВОЙНИКИ НАЗЕМНЫХ МИН

**В. А. Хвостов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается подход к разработке цифровых двойников наземных мин, находящихся на поверхности грунта, для синтеза температурных поверхностных полей земной поверхности. Цифровые двойники включают в себя полноразмерные 3D модели мины, фрагмента грунта, а также математические модели, описывающие процессы теплопереноса в мине и фрагменте грунта. С помощью граничных условий задаётся интерфейс цифрового двойника с окружающей средой. Разработанный цифровой двойник может использоваться для формирования температурных полей земной поверхности с находящимися на ней минами в разных термодинамических условиях и использоваться для обучения тепловизионных систем машинного зрения.
**Ключевые слова:** тепловизионный контроль, теплоперенос, математическое моделирование.

## Введение

Для дистанционного тепловизионного мониторинга земной поверхности широко применяются беспилотные летательные аппараты (БЛА). Они более дешевые, компактные, универсальные, доступные по сравнению со средствами пилотируемой авиации. Накоплен большой опыт их применения в сельском хозяйстве, МЧС, метеорологических, экологических, медицинских и военных службах [1, 2]. Одно из направлений применения БЛА — дистанционное обнаружение опасных предметов (мин, неразорвавшихся снарядов и т.п.) на земной поверхности [2]. Так как последние поколения наземных мин изготавливаются из композитных материалов, то их обнаружение с помощью методов электромагнитного зондирования (индукционных и импульсных металлоискателей, магнитометров, электротомографии и др.) становится недостаточно эффективным [3, 4]. В этой ситуации можно использовать информацию об инфракрасном (ИК) излучении земной поверхности, на основе которой при определённых условиях возможно обнаружение мины [5–7]. Для создания таких условий необходимо изменение термодинамического состояния сопряженной системы, включающей мину, основание, на котором она находится и окружающий их атмосферный воздух. В этом случае проявляется температурный контраст мины вследствие различия теплофизических характеристик мины и основания. Для исследования этих условий вместо проведения натурных экспериментов с макетами мин можно использовать цифровые двойники, отражающие геометрические и теплофизические параметры распознаваемых объектов и обеспечивающие интерфейс с окружающей средой для имитации погодных условий.

## 1. Математическая модель

Так как расположенная на земной поверхности мина обменивается тепловой энергией с окружающей средой (атмосферой и основанием, на котором она расположена), предлагается рассматривать геометрическую модель как совокупность выделенного элемента основания (грунта или другого материала основания) и мины. На данном этапе разработки цифрового двойника термодинамическое влияние окружающего мину атмосферного воздуха задаётся граничными условиями, описывающими конвективный теплообмен поверхности мины и основания с воздухом с помощью закона Ньютона — Рихмана и коэффициента теплоотдачи [8].

Геометрическая модель состоит из следующих сопряженных расчётных доменов: домен $Д_1$ (грунт); домен $Д_2$, (сопряжённые составные части мины и полости, заполненные воздухом и взрывчатым веществом); границы $Г_1$ — теплоизолированные боковые грани основания; $Г_2$ — конвективный теплообмен с окружающей средой на верхней грани основания и мины; $Г_3$ — границы контакта между грунтом и расположенной на нём миной (рис. 1).

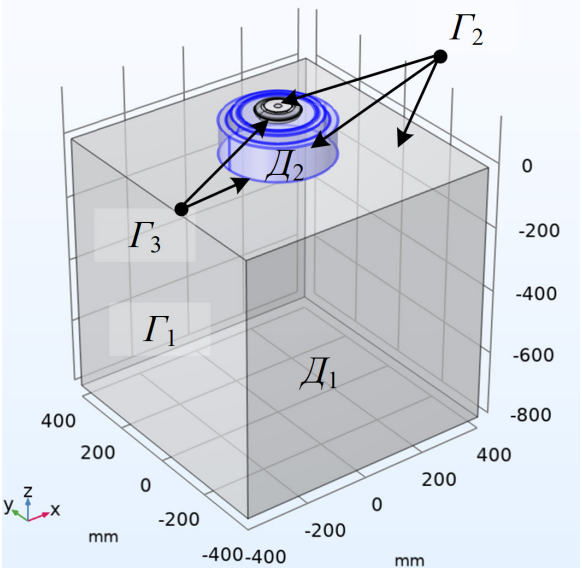



*Рис. 1. 3D модель мины и фрагмента грунта*

Математическая модель, описывающая теплоперенос в расчётных доменах и на граничных поверхностях, формализована уравнениями теплопроводности для элементов мины как твердого тела и грунта как пористой среды (1)

$$\begin{cases} \left(\rho c_p\right)_{eff} \dfrac{\partial T_g}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\lambda_{eff} \nabla T_g\right), \\ \rho_{o,i} c_{po,i} \dfrac{\partial T_{o,i}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\lambda_{o,i} \nabla T_{o,i}\right), i = \overline{1..N}, \end{cases} \tag{1}$$

где $t$ — время, с; $T_g$, $T_{o,j}$ — температуры пористой среды и составных элементов мины, К; $i$ — номер элемента; $N$ — число элементов; $(\rho c_p)_{eff}$, $\rho_{o,i}$ — эффективные плотность и теплоемкость пористой среды и составных элементов мины, Дж/(кг·К), кг/м$^3$; $c_{po,i}$ — изобарная удельная массовая теплоемкость и составных элементов мины, Дж/(кг·К); $\lambda_{eff}$, $\lambda_{o,i}$ — теплопроводности среды и составных элементов мины, Вт/(м·К).

Параметры грунта как пористой среды заданы порозностью и влагосодержанием,

$$(\rho c_p)_{eff} = \varepsilon_p \rho_f c_{pf} + \theta \rho_s c_{ps} = \varepsilon_p (\theta_w \rho_w c_{pw} + \theta_a \rho_a c_{pa}) + \theta \rho_s c_{ps}, \tag{2}$$

$$\lambda_{eff} = \varepsilon_p \lambda_f + \theta \lambda_s = \varepsilon_p \left(\theta_w \lambda_w + \theta_a \lambda_a\right) + \theta \lambda_s, \tag{3}$$

где $\varepsilon_p$ — порозность; $\rho_f$ — плотность флюида, кг/м$^3$; $c_{pf}$ — изобарная удельная массовая теплоемкость флюида, Дж/(кг·К); $\theta = 1 - \varepsilon_p$ — объемная доля твердого каркаса пористой среды; $\rho_s$ — плотность твердого каркаса пористой среды, кг/м$^3$; $\theta_w$, $\theta_a$ — объемные доли фаз $w$ и $a$ в пористой среде; $\rho_w$, $\rho_a$ — плотности фаз $w$ и $a$, кг/м$^3$; $c_{pw}$, $c_{pa}$ — удельные массовые теплоемкости фаз $w$ и $a$, Дж/(кг·К), $\lambda_w$, $\lambda_a$ — теплопроводности фаз $w$ и $a$, кг/м$^3$, Вт/(м·К).

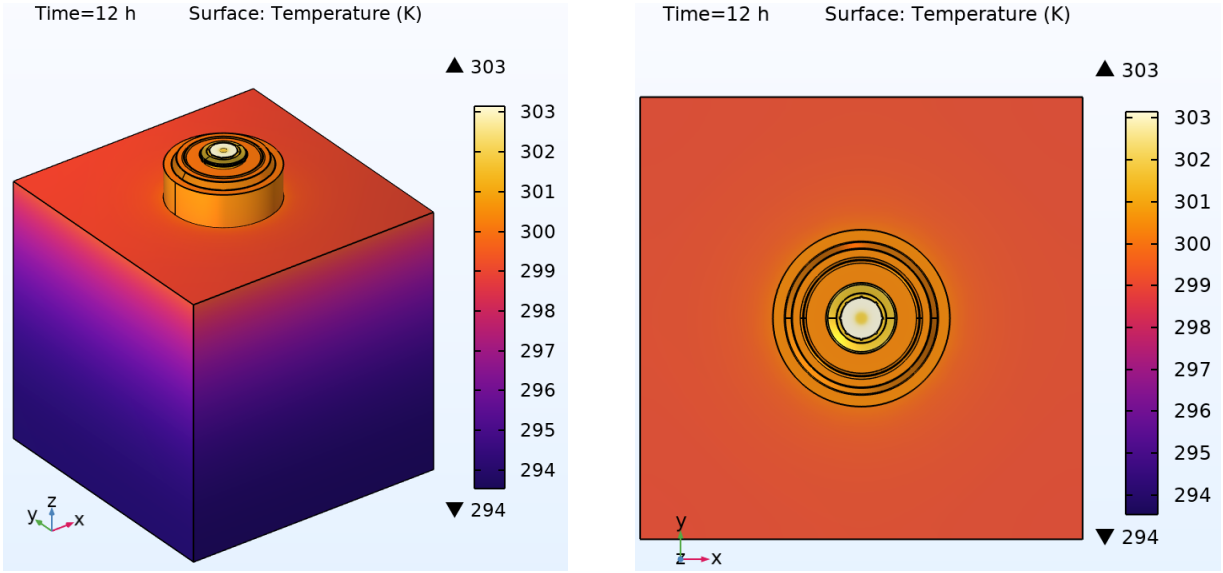
Начальные условия $T_g\big|_{t=0} = T_{o,i}\big|_{t=0} = T_{st}$, где $T_{st}$ — начальная температура сопряженной системы, К. Граничные условия на $Г_1$: $\left.\dfrac{\partial T_g}{\partial \overline{n}}\right|_{Г_1} = 0$, на $Г_2$: $-\lambda_{eff} \left.\dfrac{\partial T_g}{\partial \overline{n}}\right|_{Г_2} = \alpha(T_g|_{Г_2} - T_\infty)$, где $\overline{n}$ — еди-

ничный нормальный к поверхности вектор, $\alpha$ — коэффициент теплоотдачи от поверхности изделия к окружающей среде, Вт/(м²·К), $T_\infty$ — температура окружающей среды, на $\Gamma_3$: $T_g = T_{o,i}$, $\lambda_{eff} \dfrac{\partial T_g}{\partial \overline{n}} = \lambda_{o,i} \dfrac{\partial T_{o,i}}{\partial \overline{n}}$.

Решение системы (1) осуществлено численно методом конечных элементов. Результатами решения являются 3D температурные поля, позволяющие оценивать температуру поверхности мины и фрагмента основания (рис. 2а, 2б).

## 2. Вычислительные эксперименты и их результаты

Проведена серия вычислительных экспериментов, которая заключалась в имитации нагрева (охлаждения) окружающей среды с заданной скоростью изменением $T_\infty$. В качестве модельного временного температурного профиля использована линейная зависимость, имитирующая нагрев атмосферного воздуха.




*а)* *б)*

*Рис. 2. Изометрическая (а) и планарная (б) проекции поверхностных тепловых полей цифрового двойника мины ТМ-62*

В качестве иллюстрации подхода рассмотрена противотанковая мина ТМ-62 [9] и линейная зависимость $T_\infty(t)$, имитирующая нагрев воздуха в течение 12 часов с 294 К до 310 К. На рис. 2а, 2б представлены поверхностные температурные поля в цветовой шкале тепловизора, которые соответствуют фрагменту поверхности, фиксируемой ИК камерой БЛА под углом 45° (рис. 2а) и 90° (рис. 2б) к земной поверхности.

## Заключение

Предложенный в работе подход позволяет существенно ускорить и удешевить создание температурных портретов наземных мин для обучения систем технического зрения дистанционного распознавания взрывоопасных объектов на поверхности земли. Проведенная серия вычислительных экспериментов показала проявление температурного контраста мины при типовом сценарии нагрева воздуха окружающей среды.

В качестве перспективы развития подхода стоит отметить необходимость включения в расчётные домены фрагмента воздушной массы в окрестности мины, наличие теплопереноса излучением и неоднородности параметров состава грунта.

**Литература**

1. *Cao B.* A review of earth surface thermal radiation directionality observing and modeling: Historical development, current status and perspectives / B. Cao, Q. Liu, Y. Du [et al.] // Remote Sensing of Environment. – 2019. – Vol. 232. – Art. 111304. – DOI: 10.1016/j.rse.2019.111304.

2. *Haddadnia J.* The new trends in the application of thermography science for diagnostic purposes / J. Haddadnia, H. J. Zadeh. – Reseda, CA, USA : Supreme Century, 2016. – 150 p.

3. *Bertrand H.* Report of UXO Technology Subgroup: Overview and Technology Assessment / H. Bertrand, D. Heberlein, J. Frasier. – Alexandria, VA : Institute for Defense Analyses, 2004. – 56 p. – IDA Document D-3007. – Log: H 04-001205.

4. *Bello R.* Literature review on landmines and detection methods / R. Bello // Front. Sci. – 2013. – Vol. 3. – P. 27–42.

5. *Baur J.* Applying Deep Learning to Automate UAV-Based Detection of Scatterable Landmines / J. Baur, G. Steinberg, A. Nikulin, K. Chiu, T. S. de Smet // Remote Sensing. – 2020. – Vol. 12, Iss. 5. – Art. 859. – DOI: 10.3390/rs12050859.

6. *Deans J.* Analysis of a thermal imaging method for landmine detection, using infrared heating of the sand surface / J. Deans, J. Gerhard, L. J. Carter // Infrared Physics & Technology. – 2006. – Vol. 48, Iss. 3. – P. 202–216. – DOI: 10.1016/j.infrared.2006.01.001.

7. *Вавилов В. П.* Инфракрасная термография и тепловой контроль / В. П. Вавилов. – Москва : ИД Спектр, 2009. – 544 с.

8. *Касаткин А. Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии : учебник для вузов / А. Г. Касаткин. – 10-е изд. – Москва : ООО ТИД «Альянс», 2004. – 753 с.

9. Инженерные боеприпасы. Руководство по материальной части и применению. Книга первая. – Москва : Военное издательство МО СССР, 1976. – 368 с.

УДК 539.3

# УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОГО КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**А. В. Храименков, В. В. Козлов**

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** С помощью метода конечных элементов (МКЭ) решается трехмерная задача механики деформируемого твердого тела. Записана постановка решаемой задачи. Построена геометрическая модель цельного фланцевого соединения, которая затем аппроксимировалась восьмиузловыми шестигранными элементами первого порядка. Рассматриваемое фланцевое соединение подвержено болтовой нагрузке и внутреннему давлению. Задача решается с учетом контактной нелинейности, что позволяет помимо напряженно-деформированного состояния (НДС) оценить также герметичность фланцевого соединения. Проведен анализ прочности согласно нормам ПНАЭ. Представлено сравнение напряженного состояния, полученного в рамках численного эксперимента, с аналитическим решением.

**Ключевые слова:** теория упругости, метод конечных элементов, фланцевое соединение, контактная нелинейность.

## Введение

Традиционно в нефтегазовой промышленности, энергетическом и атомном машиностроении применяют системы трубопроводов технологического, магистрального и другого назначения. Они имеют сложные разветвленные конструкции значительной протяженности, состоящие из множества труб. Вопросам прочности и эксплуатационной надежности таких систем уделяется огромное значение не только на стадии проектирования, но и в процессе изготовления, где одним из главных качественных показателей является способность конструкции сохранять герметичность уплотняемых стыков в условиях работы при высоких давлениях.

В тех случаях, когда применение сварочных соединений в трубопроводах нецелесообразно (например, при необходимости частой разборки соединения, при использовании труб из цветных металлов и сплавов), используют фланцевые соединения, по которым существуют ряд стандартов [1, 2]. Однако на практике часто приходится работать с нестандартными соединениями, тогда окончательный выбор размеров частей фланцев и фланцевых соединений чаще остается за конструктором. В настоящее время такие конструкции зачастую рассчитываются численно с применением метода конечных элементов (МКЭ) [3–5]. Он является альтернативой аналитическим расчетам [6]. На текущем этапе развития коммерческие CAE пакеты, такие как ANSYS, Abaqus, MSC Nastran, Femap и т.д. предоставляют широкий спектр инструментов для моделирования. Например, алгоритмы расчета контактных задач, которые очень важны при моделировании фланцевых соединений. Аналитические методы [2, 6–13] в основном построены на классических задачах теории упругости об изгибе кольцевых пластин и цилиндрических оболочек и, как правило, имеют ряд различных существенных допущений, сокращающих объем вычислений, но серьезно влияющих на результат. Так, в работе [9] установлено, что при использовании аналитической методики [10] возникает погрешность, завышающая напряжения во втулке фланца на 70 % и занижающая до 40 % напряжения в кольце.

В данной статье будут представлены результаты расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) цельных фланцев с кольцевой прокладкой с применением МКЭ. Оценка прочности конструкций была осуществлена в соответствии с нормами ПНАЭ [14]. Полученные итоги могут быть полезны для применения численных методов в области инженерной прочности.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается трехмерное линейно-упругое тело, занимающее в пространстве $\mathbb{R}^3$ область $V$, которая в общем случае ограничена кусочно-гладкой границей $\Sigma$. Пусть в $\mathbb{R}^3$ определена декартова прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$.

Запишем замкнутую систему уравнений краевой задачи статики механики деформируемого твердого тела. Она включает в себя [15]:

1. Уравнения равновесия:

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{S}} = \vec{0},$$

$$\frac{\partial S_{ij}\left(\mathbf{u},T\right)}{\partial x_j} = 0, \quad \mathbf{x}\in V, \quad i,j=\overline{1,3}; \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\underset{\sim}{\mathbf{S}}$ — тензор истинных напряжений Коши.

2. Граничные условия:

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{x}\right)\big|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}\right), \quad \mathbf{x}\in\Sigma_1, \quad i,j=\overline{1,3}; \tag{2}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}}\cdot\vec{n} = \vec{P}^{(n)},$$

$$S_{ij}\left(\mathbf{u},T\right)n_i\big|_{\Sigma_2} = P_i\left(\mathbf{x}\right), \quad \mathbf{x}\in\Sigma_2, \quad i,j=\overline{1,3}; \tag{3}$$

3. Тензор деформаций Коши — Грина определяется в рамках линейной теории упругости:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u}+\mathbf{u}\vec{\nabla}\right),$$

или в координатной форме

$$\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_i\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_j}+\frac{u_j\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_i}\right), \quad \mathbf{x}\in V, \quad i,j=\overline{1,3}; \tag{4}$$

4. Определяющие соотношения (закон Гука):

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}} = \underset{\approx}{\mathbf{N}}\cdot\cdot\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{5}$$

где $\underset{\approx}{\mathbf{N}}$ — тензор упругости четвертого ранга, компоненты которого удовлетворяют условиям симметрии $N_{ijkl}=N_{jikl}=N_{ijlk}=N_{klij}$.

Для изотропного материала тензор $\underset{\approx}{\mathbf{N}}$, записанный через технические константы, имеет вид

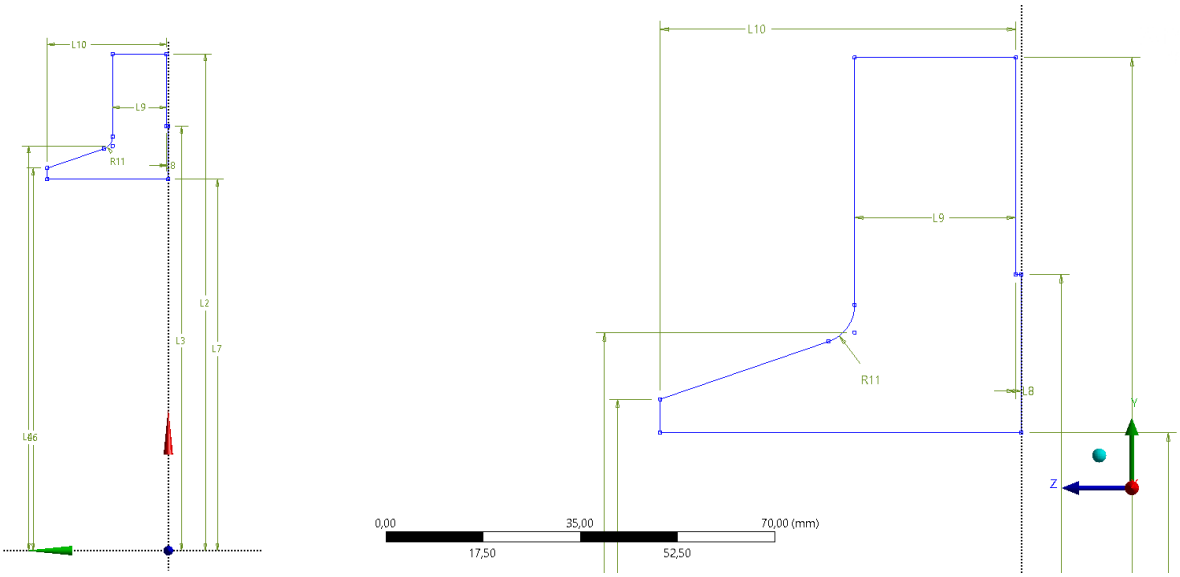
$$\underset{\approx}{\mathbf{N}} = \left[N\right] = \frac{E\left(1-\nu\right)}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\left(1-\nu\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\left(1-\nu\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\left(1-\nu\right)} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Решение задачи (1)–(6) является эквивалентной решению вариационной задачи теории упругости о минимизации полной потенциальной энергии. Использование этого подхода

успешно применяется при реализации в методе конечных элементов (МКЭ) и представлено в различны CAE системах, в частности в ANSYS, используемом для текущего исследования.

## 2. Численный эксперимент

В рамках представленной общей постановки задачи изучено частное решение для фланца, находящегося под действием внутреннего давления. Рассмотрим цельный фланец (рис. 1). Данный расчетный случай допустимо рассматривать в симметричной постановке. Выделим из полной модели сектор в $10°$ (рис. 2).




*а)* *б)*

*Рис. 1. Эскиз цельного фланца: а) в натуральную величину, б) в масштабе*

В качестве материала для фланцев выберем сталь 09Г2С. При расчетной температуре в $100\ °C$ и при температуре монтажа $20\ °C$ по ГОСТ 34233.1–2017 допустимое напряжение составляет соответственно 177 и 196 МПа [16]. В заданном диапазоне температур модуль упругости стали 09Г2С составляет $2{,}05 \cdot 10^{11}$ Па [16].

Для материала крепежных изделий (стали 35ХМА) при расчетной температуре и при температуре монтажа по прил. Г ГОСТ 34233.4–2017 допустимое напряжение составляет 230 МПа [1]. В заданном диапазоне температур модуль упругости стали 35ХМА по прил. Ж 34233.4–2017 составляет $2{,}1 \cdot 10^{11}$ Па [16].

В качестве материала прокладки выберем алюминий АД. В заданном диапазоне температур модуль упругости стали 09Г2С составляет $0{,}71 \cdot 10^{11}$ Па [16].

Граничные условия (ГУ) приложены к модели исходя из условий симметрии. Между прокладкой и соединительным выступом, а также между болтом и кольцом фланца созданы контактные пары.

Пусть расчетное давление $p = 1{,}6$ МПа, тогда $p_{\text{комп}} = 26{,}273$ МПа, требующееся для сглаживания краевого эффекта, определяется по формуле [17]

$$p_{\text{комп}} = \frac{p}{\left[\left(\frac{d_o}{d_i}\right)^2 - 1\right]},$$

где $p$ — расчетное давление среды, $d_o$ — внешний диаметр сосуда (трубы), $d_i$ — внутренний диаметр сосуда (трубы).

Болтовая нагрузка согласно [17] составляет $F_{bp} = 34975$ Н.

Моделирование осуществляется МКЭ в пакете ANSYS. Расчетная модель представлена на рис. 2.

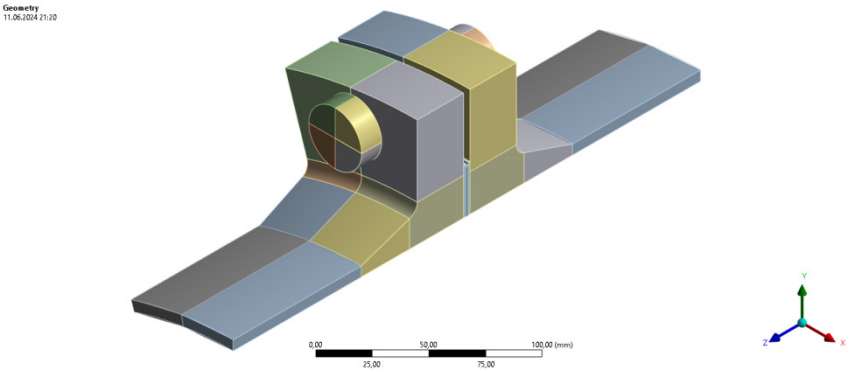



*Рис. 2. Расчетная модель*

После расчета МКЭ исследуем НДС фланцевого соединения. Получены поля перемещений фланца. Исследуется соответствие напряженного состояния фланца аналитическому решению, представленному в [18].

## Заключение

В данной работе описан вариант расчета цельных фланцев при помощи МКЭ. В пакете ANSYS построена модель фланцевого соединения, находящегося под действием болтовой нагрузки, а также внутреннего давления. Были получены значения перемещений модели, группы напряжений в опасных сечениях фланцевого соединения, на основе которых сделан вывод о прочности фланцевого соединения согласно нормам ПНАЭ [14]. Для валидации результатов численного решения был использован аналитический метод, описанный в сборнике [18].

## Благодарности

Исследование выполнено в Тульском государственном университете при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

## Литература

1. ГОСТ 34233.4–2017. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Расчет на прочность и герметичность фланцевых соединений: межгосударств. стандарт: изд. офиц.: утвержден и введен в действие приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 14 июня 2017 г. № 101-П: введен впервые: дата введ.2018-08-01 / разработан АО «НИИхиммаш», ЗАО «ПХИ», АО «ВНИИнефтемаш», ООО «НТП ЦЕНТРхиммаш». – Москва : Стандартинформ, 2018. – 42 с.

2. ASME Boiler & Pressure Vessel Code VIII: Division 2. Alternative Rules. – New York : ASME Press, 2010. – 998 p.

3. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд – М. : Мир, 1979. – 389 с.

4. *Zienkiewicz O. C.* The finite element method for solid and structural mechanics. 7-th edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, D. D. Fox – Elsevier, 2014. – 624 p.

5. *Зенкевич О.С., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. / О. С. Зенкевич, К. Морган – М. : Мир, 1986. – 318 с.

6. *Биргер И. А.* Резьбовые и фланцевые соединения / И. А. Биргер – М. : Машиностроение, 1990. – 368 с.

7. *Биргер И. А.* Расчет на прочность деталей машин: справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. – М. : Машиностроение, 1993. – 640 с.

8. *Бугов А. У.* Фланцевые соединения. Расчет и конструирование / А. У. Бугов – Л. : Машиностроение, 1975. – 192 с.

9. *Волошин А. А.* Расчет и конструирование фланцевых соединений: Справочник / А. А. Волошин, Г.Т. Григорьев – 2-е изд. перераб. и доп. – Л. : Машиностроение. Ленингр. Отд-ние, 1979. – 125 с.

10. *Ковалев Н. Н.* Гидротурбины / Н. Н. Ковалев. – Л. : Машиностроение, 1971. – 583 с.

11. *Коптева В. Б.* Фланцевые соединения: конструкции, размеры, расчёт на прочность: методические указания / В. Б. Коптева, А. А. Коптев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 24 с.

12. Оптимальные технологии производства фланцевого крепежа для трубопроводной арматуры, энергетического и нефтегазового оборудования: учеб. и справ. пособие / В. П. Кузнецов [и др.]. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2022. – 276 с.

13. *Bathe K. J.* Finite Element Procedures / K. J. Bathe. – 2nd edition – Prentice-Hall : Englewood Cliffs, 2014. – 1035 p.

14. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (ПНАЭ Г-7-002-86) / Госатомэнергонадзор СССР. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.

15. *Маркин А. А.* Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. / А. А. Маркин, Д. В. Христич – Тула : Изд-во ТулГУ, 2007. – 92 с.

16. ГОСТ 34233.1–2017. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования: межгосударств. стандарт: изд. офиц.: утвержден и введен в действие приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 14 декабря 2017 г. № 1989-ст: введ. впервые: дата введения 2018-08-01 / разработан АО «НИИхиммаш», ЗАО «ПХИ», АО «ВНИИнефтемаш», ООО «НТП ЦЕНТРхиммаш» – Москва: Стандартинформ, 2018. – 30 с.

17. Grasp Engineering. What is Compensating Pressure? What is Compensating Force? What is thrust Pressure? / 2020. – URL: https://www.graspengineering.com/what-is-compensating-pressure-what-is-compensating-force-what-is-thrust-pressure/ (дата обращения: 03.11.2025). – Режим доступа: свободный.

18. ASME Boiler & Pressure Vessel Code VIII: Division 1. Rules for Construction of Pressure Vessels. – New York : ASME Press, 2010. – 745 p.

УДК 519.17 + 519.852

# ГРАФЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВЕСАМИ РЕБЕР И ЗАДАЧА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

**А. М. Чернев[1], А. А. Чернев[1], Н. А. Чернев[2]**

*[1]Национальный исследовательский университет «МЭИ»*
*[2]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

**Аннотация.** В статье рассматривается способ моделирования технических систем с помощью графов со случайными весами ребер. Описывается понятие максимального потока для графа со случайным весом ребер, приводятся нижняя и верхняя оценки для максимального потока. Приводятся результаты численных экспериментов, демонстрирующие взаимосвязь между случайным и детерминированным максимальными потоками, а также скорость получения приемлемой оценки максимального потока.
**Ключевые слова:** граф со случайными весами ребер, максимальный поток.

## Введение

Теория графов, являясь фундаментальным разделом дискретной математики, находит масштабное применение в решении актуальных прикладных задач. Ее методы активно применяются в моделировании транспортных потоков, исследовании электрических и телекоммуникационных сетей и других самых различных областях.

Тем не менее, применение теории графов осложняется тем фактом, что исходные данные для построения математической модели, как правило, не являются детерминированными, в них всегда присутствует неопределенность какого-либо рода.

Можно указать несколько направлений борьбы с неопределенностью. Прежде всего, это понятие случайного графа Эрдеша — Реньи [1] и развиваемый на его основе аппарат теории случайных графов (см., например, [2]). Близкие идеи развиваются в одном из разделов теории надежности ([3]).

Существенным недостатков указанных выше моделей является то, что в них рассматривается только один вид неопределенности — связь между объектами (моделируемая ребром графа) или есть, или ее нет. Даже в тех случаях, когда рассматриваются взвешенные графы, исследователи ограничиваются рассмотрением этой дихотомии ([4, 5]).

Тем не менее, в практических задачах присутствует неопределенность другого рода. Например, если рассматривать пропускную способность транспортной системы — в случае дорожно-транспортного происшествия может быть перекрыта одна из полос дороги. В этом случае, с одной стороны, связь по-прежнему будет существовать, с другой стороны — пропускная способность упадет в несколько раз. В электрических сетях пропускная способность также непостоянна, она зависит от состояния оборудования, погоды, текущей нагрузки.

В настоящем докладе рассматривается именно такие виды неопределённости, которые моделируются с помощью понятия графа со случайным весом ребер.

## 1. Основные определения

**Определение 1.** *Ориентированным графом со случайным весом ребер* называется тройка $\langle V, E, C \rangle$, где:

$V$ — некоторое конечное множество (множество *вершин*);

$E$ — некоторое подмножество $V^2$ (множество *ребер*);

$C = \{C_e : e \in E\}$, $C_e$ — случайная величина, сопоставленная ребру $e$ (*вес* ребра или *пропускная способность* ребра).

Можно отметить, что понятие вероятности безотказной работы, используемое в теории надежности ([3]) становится частным случаем графа со случайными весами ребер (случайная величина, определяющая пропускную способность, принимает два значения).

Далее предполагается, что все веса ребер являются неотрицательными, заданы на одном пространстве элементарных событий $\Omega$ и являются независимыми как случайные величины.

Применительно к графам со случайным весом ребер возможна постановка задач, аналогичных детерминированному случаю. В настоящем докладе рассматривается задача нахождения максимального потока, детерминированный аналог которого см. в [6].

**Определение 2.** *Путем* из вершины $a$ в вершину $b$ ориентированного графа со случайным весом ребер называется последовательность ребер, удовлетворяющая условиям:

1) для первого ребра, принадлежащего пути, началом является вершина $a$;

2) для последнего ребра, принадлежащего пути, концом является вершина $b$;

3) в остальных случаях вершина, являющаяся концом какого-либо ребра пути, является началом следующего ребра пути.

**Определение 3.** Пусть в графе со случайным весом ребер выделены вершины $s$ (*источник*) и $t$ (*сток*), веса ребер определены на вероятностном пространстве $\Omega$, и для каждого $\omega \in \Omega$ каждому ребру графа $e$ сопоставлено число $f_e(\omega) \geq 0$ (поток по ребру), при этом:

1) сумма потоков по ребрам, исходящим из вершины $s$, равна сумме потоков по ребрам, входящим в вершину $t$,

2) для остальных вершин сумма потоков по ребрам, входящим в вершины, равна сумме потоков по ребрам, исходящим из вершины;

3) для всех ребер поток по ребру не больше пропускной способности этого ребра ($f_e(\omega) \leq C_e(\omega)$).

Тогда *случайным потоком* из вершины $s$ в вершину $t$ называется множество случайных величин $W = \{f_e : e \in E\}$, а *величиной случайного потока* называется сумма потоков по ребрам, исходящим из вершины $s$ (или входящим в вершину $t$).

В дальнейшем изложении вершины $s$ и $t$ считаются фиксированными, поэтому их упоминание опускается (хотя, в принципе, никто не мешает рассматривать потоки с разными источниками и стоками).

**Утверждение 1.** *Среди всех случайных потоков существует (возможно, не единственный) случайный поток $M$, величина которого максимальна.*

## 2. Нижняя и верхняя оценка случайного максимального потока

**Теорема 1.** *Пусть имеется граф со случайными весами ребер $C = \{C_e : e \in E\}$. Обозначим $\Gamma$ — множество всех путей из $s$ в $t$. Тогда величина максимального случайного потока $M$ находится в пределах:*

$$\max_{\gamma \in \Gamma}(\min_{e \in \gamma} C_e) \leq M \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \min_{e \in \gamma} C_e.$$

**Доказательство.**

1) Рассмотрим произвольный путь $\gamma \in \Gamma$ и положим для всех ребер, не входящих в $\gamma$, поток равный 0, а, для ребер, входящих в $\gamma$, поток $f_e(\omega) = \min C_e(\omega)$. Этот набор потоков будет удовлетворять определению случайного потока, соответственно, его величина будет не более $M$. Повторяя рассуждение для всех потоков, получаем искомую оценку снизу.

2) Исходный граф 1 преобразуем в граф 2, состоящий из параллельных ветвей, каждая из которых представляет собой один из путей $\gamma \in \Gamma$ (рис. 1) (веса ребер при этом сохраним). Максимальный поток в графе 2 равен $\sum_{\gamma \in \Gamma} \min_{e \in \gamma} C_e$ и он не меньше максимального потока графа 1.

Эти оценки нельзя улучшить, нижняя оценка достигается в случае последовательного соединения ребер, верхняя оценка достигается в случае параллельного соединения ребер.

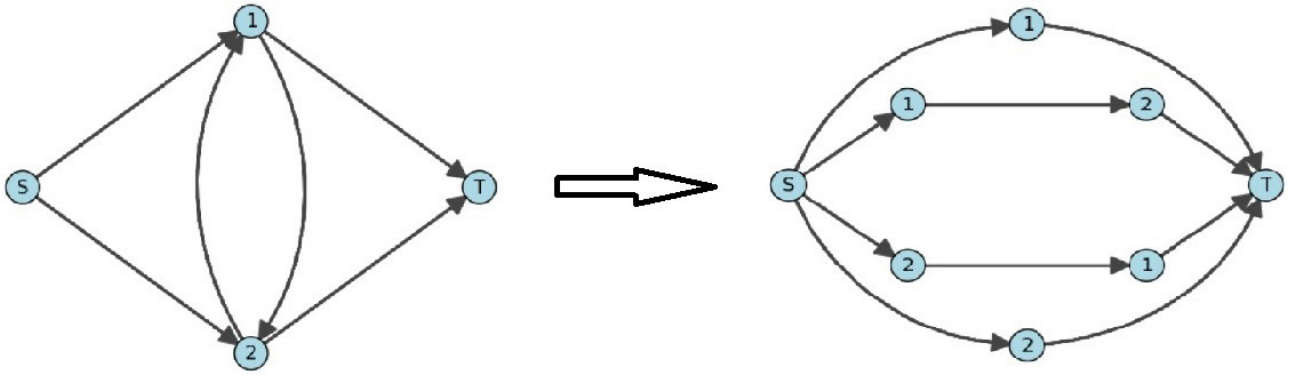



*Рис. 1. Оценка случайного максимального потока сверху*

Получить сколько-нибудь приемлемое аналитическое выражение для случайного максимального потока можно только в простейших случаях. На практике чаще всего требуются численные расчеты, при этом удобным для применения является не столько сама случайная величина, сколько её характеристики: математическое ожидание (то есть, сколько в среднем составляет пропускная способность системы) или квантиль распределения (то есть, какую пропускную способность можно гарантировать с 90 % / 95 % / 99 %-й вероятностью).

Поэтому задача вычисления случайного максимального потока (или его характеристик) в случае, если веса ребер являются (считаются) случайными величинами непрерывного типа, сводится к случаю дискретных случайных величин, аппроксимирующих соответствующие непрерывные случайные величины. В численном расчете в любом случае будет использоваться только конечное число вариантов значений весов ребер.

Далее в докладе приводятся результаты численных экспериментов, моделирующие вычисление параметров случайного максимального потока. Расчеты в настоящей статье произведены с помощью модуля *igraph* ([7]), их результаты содержатся в файлах, находящихся в репозитории [8].

### 3. Вычисление случайного максимального потока полным перебором

При малых размерах графов возможно рассчитать показатели случайного максимального потока полным перебором вариантов.

**Пример 1.** (рассмотрен в [9]). Граф состоит из 4-х последовательно соединенных ребер, вес каждого ребра является независимой случайной величиной $X \sim U\{1..6\}$ (равномерное распределение на диапазоне 1, 2, …, 6).

Математическое ожидание случайного максимального потока в этом случае равно 2,04. Если мы заменим вес каждого ребра как случайную величину на ее среднее значение и рассчитаем максимальный поток в соответствующем детерминированном графе, мы получим завышенную оценку 3,5.

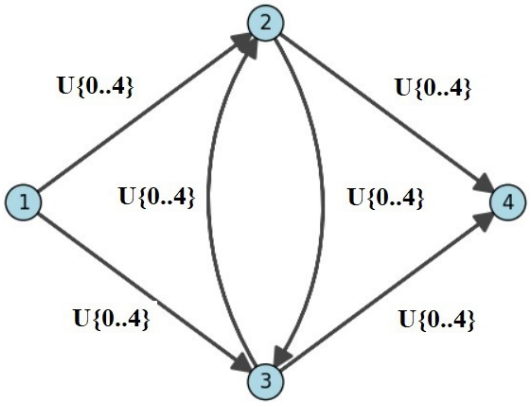



*Рис. 2. Мостовая схема со случайными весами ребер*

**Пример 2.** Граф представляет собой мостовую схему с двумя средним ребрами (см. рис. 2), вес каждого ребра является независимой случайной величиной $X \sim U\{0..4\}$.

Математическое ожидание случайного потока в данном графе 2,74. Опять отметим, что в детерминированном графе, получающемся заменой весов ребер на их среднее значение (2), величина максимального потока оказывается выше (4).

Удаление ребер (1,2) и (2,1) снижает математическое ожидание случайного потока до 2,4, а 90 %-й квантиль снижается с 1 до 0.

### 4. Вычисление случайного максимального потока методом статистического моделирования и оценка скорости схождения

Если количество ребер графа составляет хотя бы несколько десятков, полный перебор становится практически невозможным. В этих случаях оценку случайного максимального потока можно провести методом статистического моделирования.

Приведем результаты численных экспериментов, показывающих, насколько быстро сходится оценка математического ожидания случайного максимального потока, полученная методом статистического моделирования.

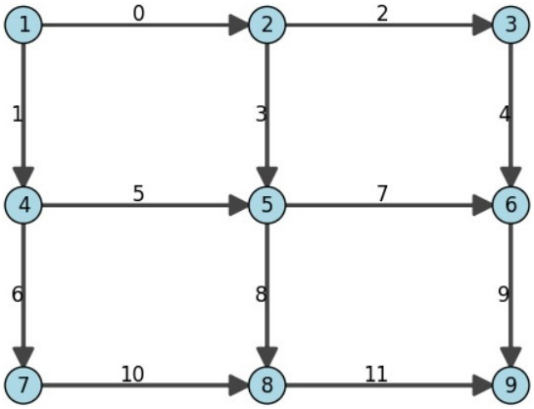



*Рис. 3. Сетка 3×3*

**Пример 3.** Граф представляет собой сетку 3×3 (см. рис. 3), вес каждого ребра $X \sim N(4,2)$ (нормальное распределение с математическим ожиданием 4 и стандартным отклонением 2). Вычисляем случайный максимальный поток из левого верхнего угла (на рис. 3 — вершина 1) в нижний правый (на рис. 3 — вершина 9).

В результате вычисления по результатам 1 млн. вариантов математическое ожидание случайного максимального потока оказалось равно **5,96**. Это значение принимается в качестве точной величины математического ожидания.

Текущая оценка по результатам первых n испытаний попадает в диапазон ±5 % от точной величины уже в результате первых 50–100 испытаний (так как в различных тестах генерируются новые выборки, результат может несколько меняться). Типичное поведение оценки см. на рис. 4.

Для попадания в диапазон ±1 % от точной величины необходимо несколько больший объем выборки, 500–1000 вариантов.

*Рис. 4. Скорость сходимости оценки максимального потока: попадание среднего по выборке в диапазон ±5 % от точного значения, вариант сетки 3×3 с равными весами ребер*

**Пример 4.** Граф представляет собой сетку 3×3, вес ребер с номерами 0, 2, 4, 9 (см. рис. 3) $X \sim N(12,6)$, а остальных ребер $Y \sim N(4,2)$.

В этом случае значение математического ожидания потока равно 10,54, а скорость сходимости оказывается несколько ниже.

Далее проведены еще несколько численных экспериментов по оценке скорости сходимости математического ожидания случайного максимального потока (код вычислений находится в репозитории [8]). Результаты этих экспериментов приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Оценка скорости сходимости максимального потока*

| **Вид сетки** | **Размер выборки с отн. погрешностью 5 % (мин./ср./макс.)** | **Размер выборки с отн. погрешностью 1 % (мин./ср./макс.)** |
|---|---|---|
| 3×3 | 25 / 60 / 80 | 550 / 1000 / 3000 |
| 3×3, неравный вес | 48 / 80 / 185 | 500 / /1400 / /4150 |
| 4×4 | 17 / 80 / 160 | 800 / 2070 / 2600 |
| 4×10 | 15 / 27 / 160 | 570 / 1900 / 5500 |

## Заключение

В настоящем докладе приведены способ моделирования сложных технических систем с изменчивыми характеристиками с помощью графов со случайными весами ребер.

Исследуется вопрос о максимальном потоке в графе случайными весами ребер. Показано, что замена изменчивой величины на ее среднее значение, в общем случае завышает оценку максимального потока.

Приводятся численные эксперименты с вычислением случайного максимального потока методом статистического моделирования. Показывается, что можно получить оценку достаточно быстро, после 100–200 вариантов расчета можно получить оценку математического ожидания случайного максимального потока с точностью до 5 %, а 3000–5000 вариантов дают оценку с точностью до 1 %.

## Литература


1. *Erdős P., Rényi A.* On random graphs. I. // Publ. Math. Debrecen. – 1959. – Vol. 6, No 3–4. – P. 290–297.

2. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов и их применения // Труды МФТИ. – 2010. – С. 130–140.

3. *Ушаков И. А.* Курс теории надежности систем : ученбное пособие. – М. : ДРОФА, 2008. – 240 с.

4. *Нетес В. А.* Двухсторонние оценки вероятности обеспечения требуемой пропускной способности двухполюсной сети с ненадежными элементами // Автоматика и телемеханика. – 1997. – Т. 1. – С. 174–180.

5. *Мигов Д. А.* Декомпозиция сети по сечсениям при расчете ее надежности // Прикладная дискретная математика. – 2020. – № 47. – С. 62–86. DOI: 10.17223/20710410/47/6

6. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. – Москва : Мир, 1966. – 276 с.

7. *Csardi G., Nepusz T.* The igraph software package for complex network research. – InterJournal, Complex Systems, 1695. – 2006.

8. *Чернев Н. А.* Random Graphs [Электронный ресурс]. – 2025. URL: https://github.com/colan1ch/Random_graphs (дата обращения: 29.10.2025).

9. *Goldratt Eliyahu M. C. J.* The Goal: A Process of Ongoing Improvement // Measuring Business Excellence. – 1986.

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОСАЖДЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ВЗВЕСИ В МЕЛКОВОДНОМ ВОДОЕМЕ

**А. Е. Чистяков[1], И. Ю. Кузнецова[2]**

*[1]Донской государственный технический университет*
*[2]Южный федеральный университет*

**Аннотация.** Рассмотрена трехмерная гидродинамическая модель движения водной среды, включающая в себя уравнения движения Навье — Стокса, уравнение неразрывности, регуляризированное по Б. Н. Четверушкину и учитывающее влияние примеси на плотность водной среды. Рассмотренная модель позволяет также учитывать сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, турбулентный обмен и др. Модель гидродинамики дополнена моделью транспорта многокомпонентной взвеси, учитывающей гранулометрический состав и скорость течения водного потока. Проведены численные эксперименты по моделированию процесса транспорта многокомпонентной взвеси в мелководном водоеме на основе предложенной трехмерной модели.
**Ключевые слова:** модель гидродинамики, регуляризация по Б. Н. Четверушкину, транспорт взвеси, схемы расщепления, сеточное число Пекле.

## Введение

Акватории мелководных водоемов, эстуариев рек и прибрежных зон морей являются зонами интенсивного антропогенного воздействия и требуют надежных инструментов для прогнозирования их состояния. Ключевую роль в создании таких инструментов играют математические модели, способные адекватно описывать сложные гидродинамические процессы и позволяющие прогнозировать возможные сценарии влияния природных и антропогенных факторов (штормы, изменение климата, сбросы грунта и загрязняющих веществ) на экологическое состояние акватории [1, 2].

В рамках статьи предлагается рассмотреть модель транспорта многокомпонентной взвеси, дополненную моделью гидродинамики мелководного водоема на основе системы уравнений Навье — Стокса. При построении модели гидродинамики уравнение неразрывности предлагается дополнить введением относительно малого временного множителя-гиперболизатора (регуляризация по Б. Н. Четверушкину) [3]. Применение такого подхода приводит к снижению вычислительных затрат при решении самого трудоемкого этапа решения системы, описывающий гидродинамические процессы, — уравнения для расчета давления [4]. Данный подход позволяет разрабатывать эффективные параллельные алгоритмы, численно реализующие поставленные вычислительно-трудоемкие задачи в заданное время, в том числе на супервычислительных системах.

Также для повышения точности моделирования процесса транспорта и осаждения многокомпонентной взвеси предлагается применять явно-неявную схему расщепления [5] и вихреразрешающие разностные схемы, устойчивые в случае больших сеточных чисел Пекле [6], то есть при преобладании конвективного переноса над диффузионным.

## 1. Постановка задачи

Для моделирования гидродинамических процессов мелководного водоема предлагается рассмотреть систему уравнений, включающую в себя три уравнения Навье — Стокса, описы-

вающие движение водной среды в трех пространственных направлениях, и уравнение неразрывности с переменной плотностью, регуляризованное по Б. Н. Четверушкину [7]:

$$\mathbf{V}_t' + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla\mathbf{P} + \boldsymbol{\mu}\Delta\mathbf{V}, \tag{1}$$

$$\rho_t' + \tau^*\rho_{tt}'' + \nabla(\rho\mathbf{V}) = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости [м/с]; $\mathbf{P}$ — давление [Па], $\rho$ — плотность [кг/м$^3$], $\boldsymbol{\mu} = \{\mu, \nu\}$ — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена [м$^2$/с], $\tau^* \sim h/c$ — параметр регуляризации или характерное время между столкновениями молекул, $h$ — шаг расчетной сетки, $c$ — скорость звука.

Система уравнений (1)–(2) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на входе $u = u_0$, $v = v_0$, $\mathbf{P}_\mathbf{n}' = 0$, $\mathbf{V}_\mathbf{n}' = 0$;

– боковая граница (берег и дно) $\rho\mu u_\mathbf{n}' = -\tau_x$, $\rho\mu v_\mathbf{n}' = -\tau_y$, $V_\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{P}_\mathbf{n}' = 0$;

– верхняя граница $\rho\mu u_\mathbf{n}' = -\tau_x$, $\rho\mu v_\mathbf{n}' = -\tau_y$, $w = -\omega - P_t'/\rho g$, $\mathbf{P}_\mathbf{n}' = 0$,

где $\mathbf{V}_\mathbf{n}$ — нормальная составляющая вектора скорости, $\mathbf{n}$ — вектор нормали, направленный внутрь расчетной области, $\omega$ — интенсивность испарения жидкости, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_x, \tau_y\}$ — тангенциальное напряжение [7], $g$ — ускорение свободного падения [м/с$^2$].

Дополним рассмотренную модель гидродинамики моделью транспорта многокомпонентной взвеси на основе уравнения трехмерного диффузии-конвекции, которое для каждой фракции взвеси может быть записано в следующем виде:

$$(c_r)'_t + (uc_r)'_x + (vc_r)'_y + \left((w + w_{s,r})c_r\right)'_z = \left(\mu(c_r)'_x\right)'_x + \left(\mu(c_r)'_y\right)'_y + \left(\nu(c_r)'_z\right)'_z + F_r, \tag{3}$$

где $c_r$ — концентрация $r$-й фракции взвеси [мг/л]; $w_{s,r}$ — скорость осаждения $r$-й фракции взвеси [м/с]; $F_r$ — функция, описывающая интенсивность распределения источников $r$-й фракции взвеси [мг/(л·с)]. Компоненты вектора скорости водной среды $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ рассчитываются на основании модели (1)–(2) [м/с];

Система уравнений (3) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на свободной поверхности: $(c_r)'_z = 0$;

– вблизи поверхности дна: $\nu(c_r)'_z = -w_{s,r}c_r$;

– на боковой поверхности: $(c_r)'_\mathbf{n} = 0$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \le 0$, и $\mu(c_r)'_\mathbf{n} = -(\mathbf{V}, \mathbf{n})c_r$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) > 0$, где $\mathbf{n}$ — внешний вектор нормали (вектор нормали, направленный вне расчетной области).

Система уравнений (1)–(3) позволяет моделировать процесс транспорта примесей с учетом гранулометрического состава взвеси, скорости течения водного потока, ветровых течений и трения о дно, турбулентного обмена и др. Для повышения точности моделирования в условиях сложной геометрии береговой линии и дна можно воспользоваться функцией частичной заполненности [7].

## 2. Метод решения

Дискретизацию непрерывной модели (1)–(3) выполним на равномерной пространственно-временной расчетной сетке.

Аппроксимация модели гидродинамики (1)–(2) выполняется с применением метода расщепления по физическим процессам [8], на основании которого исходная задача сводится к трем взаимосвязанным подзадачам: расчет вектора скорости водной среды на промежуточном временном слое без учета давления на основе уравнений диффузии-конвекции, расчет поля давления и расчет вектора скорости на следующем временном слое на основе явных схем. Самой вычислительно трудоемкой задачей является расчет поля давления, но как показано в [7] использование регуляризатора по Б.Н. Четверушкину приводит к тому, что поле давле-

ния рассчитывается на основе волнового уравнения, оператор которого имеет диагональное преобладание, вследствие чего уменьшается число обусловленности оператора, влияющего на скорость сходимости итерационного метода. Таким образом, использование регуляризатора по Б. Н. Четверушкину в уравнении неразрывности (2) позволяет сократить вычислительную трудоемкость решения модели гидродинамики (1)–(2). В работе [9] представлено исследование устойчивости разностной схемы уравнения для расчета давления и оценена погрешность аппроксимации данного уравнения.

Аппроксимация уравнения (3) выполняется на основе явно-неявной схемы расщепления [5, 10], которая сводит решение трехмерной задачи к моделированию на основе явной схемы в горизонтальных направлениях, и симметричной схемы с весами — по вертикальному направлению (по глубине). На основании проведенных численных экспериментов показано, что использование явно-неявных схем дает выигрыш по времени решения поставленной задачи примерно в 7,5 раз. Также применение данных схем позволяет стоить параллельные алгоритмы, экономичные по сумме затрат на выполнение арифметических операций и обмену данными. Дальнейшая аппроксимация уравнений конвекции-диффузии в горизонтальных направлениях выполнена с применением модифицированной схемы «кабаре» [6], а решение уравнения по вертикальному направлению получено методом прогонки [11].

### 3. Результаты численных экспериментов

Для численного решения модели (1)–(3) разработан программный комплекс на языке C++ [12]. В качестве примера работы данного комплекса рассмотрим результаты моделирования процесса транспорта трехкомпонентной взвеси в тестовой области.

Параметры расчетной области — 1 км × 720 м × 10 м.

Время моделирования — 2 ч. после сброса взвеси. Размеры расчетной сетки — 100 × 72 × 10 ячеек, количество временных слоев — 7 200.

Функция источника взвеси задавалась в области 200–250 м × 300–400 м × 5,5 м. В табл. 1 представлены параметры фракций взвеси.

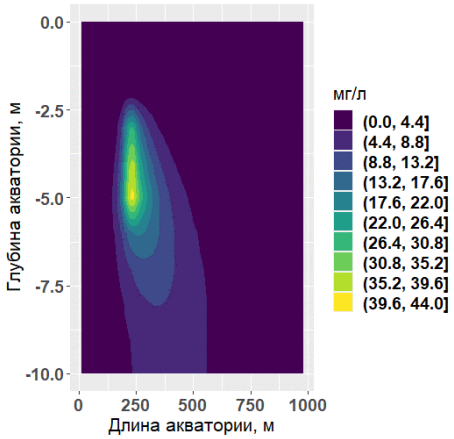
Таблица 1

*Параметры фракций взвеси*

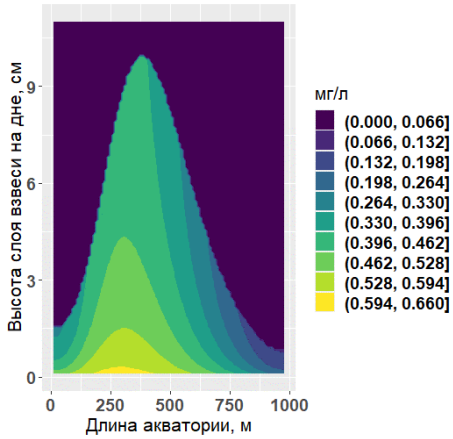
| Параметр | Фракция | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| Плотность, кг/м$^3$ | 2700 | | |
| Диаметр частиц, мм | 0,05 | 0,04 | 0,03 |
| Коэффициент формы частиц фракций | 0,222 (шарообразная форма) | | |
| Скорость осаждения, мм/с | 2,31 | 1,48 | 0,83 |
| Содержание, % | 20 | 30 | 50 |

На рис. 1–3 представлены результаты работы программного комплекса по моделированию движения и осаждения трех компонент взвеси через 2 ч. после сброса грунта.

Трехмерная расчетная область представлена в срезе плоскостью вдоль оси $Oy$ (по ширине водоема) в зоне с наибольшей концентрацией взвеси и высотой осажденного материала.

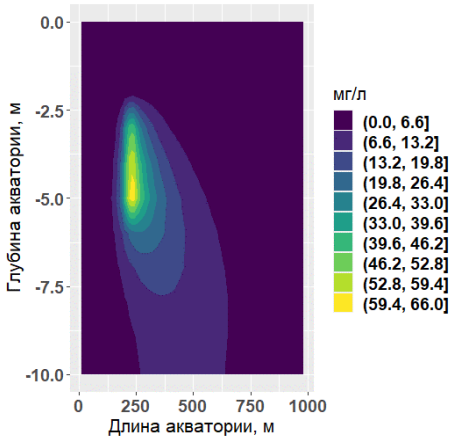



*а) концентрация взвеси в толще воды (срез $Oy$ = 350 м)*

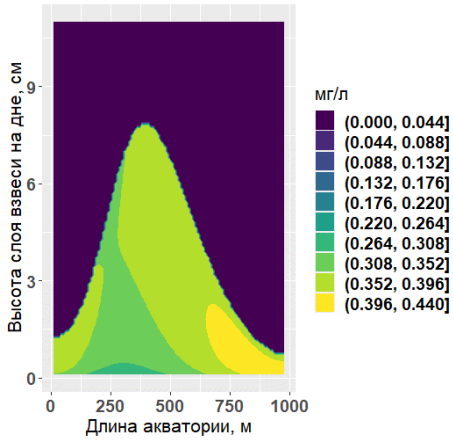



*б) концентрация взвеси на дне (срез $Oy$ = 360 м)*

*Рис. 1. Результаты моделирования транспорта и осаждения многокомпонентной взвеси для фракции 1 спустя 2 часа после выгрузки грунта*

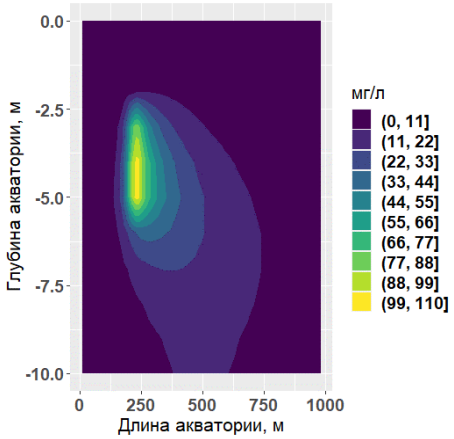



*а) концентрация взвеси в толще воды (срез $Oy$ = 350 м)*

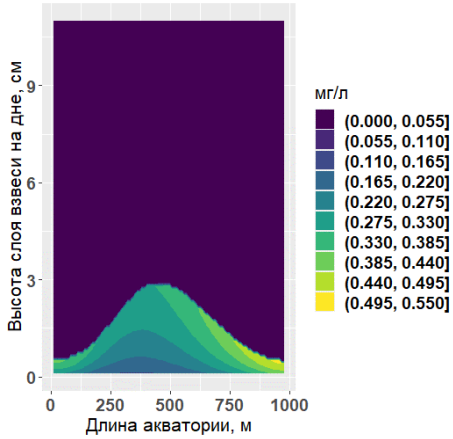



*б) концентрация взвеси на дне (срез $Oy$ = 460 м)*

*Рис. 2. Результаты моделирования транспорта и осаждения многокомпонентной взвеси для фракции 2 спустя 2 часа после выгрузки грунта*




*а) концентрация взвеси в толще воды (срез $Oy$ = 350 м)*




*б) концентрация взвеси на дне (срез $Oy$ = 460 м)*

*Рис. 3. Результаты моделирования транспорта и осаждения многокомпонентной взвеси для фракции 3 спустя 2 часа после выгрузки грунта*

## Заключение

В работе представлена трехмерная модель гидродинамики мелководного водоема, включающая в себя уравнения движения Навье — Стокса, уравнение неразрывности, регуляризированное по Б. Н. Четверушкину и учитывающее влияние примеси на плотность водной среды. Рассмотренная модель позволяет также учитывать сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, турбулентный обмен и др. Модель гидродинамики дополнена моделью транспорта многокомпонентной взвеси, учитывающей гранулометрический состав и скорость течения водного потока.

Выполнена аппроксимация рассмотренных непрерывных моделей на равномерной пространственно-временной расчетной сетке. Применение регуляризатора по Б. Н. Четверушкину в уравнении неразрывности (2) позволило существенно сократить время расчета поля давления, а, следовательно, и поля скорости движения водной среды. С учетом того, что перерасчет поля скорости водной среды выполнялся на каждой временной итерации моделирования процесса транспорта и осаждения взвеси, то это существенно сократило время получения прогноза о областях распространения и осаждения взвеси [13].

Для численного решения рассмотренных моделей с использованием разработанного программного комплекса был проведен вычислительный эксперимент по моделированию процесса транспорта трехфракционной взвеси. В качестве результатов представлены поля концентраций фракций взвеси через 2 часа после сброса грунта. Разработанный программный комплекс позволяет моделировать процесс транспорта взвеси в толще воды и осаждения взвеси на дно, что в свою очередь позволяет прогнозировать изменения рельефа руслового потока, размытия берегов, а также оценивать влияние взвеси на экосистему водоема [2].

## Благодарности

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта 25–71–20001, https://rscf.ru/project/25-71-20001/

## Литература

1. *Чистяков А. Е.* Оценка экологических рисков мелководного водоема при проведении дноуглубительных работ / А. Е. Чистяков, И. Ю. Кузнецова // Безопасность техногенных и природных систем. – 2024. – Т. 8, № 2. – С. 37–46.

2. Аналитическое и численное исследование задачи динамики планктонных популяций при наличии микропластика / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Ю. В. Белова, И. Ю. Кузнецова // Математическое моделирование. – 2024. – Т. 36, № 3. – С. 95–114.

3. *Четверушкин Б. Н.* Кинетические модели для решения задач механики сплошной среды на суперкомпьютерах / Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 5. – С. 65–79.

4. *Четверушкин Б. Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнения сплошных сред // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 33–52.

5. Вабищевич П. Н. Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции / П. Н. Вабищевич, М. В. Васильева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 359–369.

6. Исследование точности и применимости разностной схемы для решения задачи диффузии-конвекции при больших сеточных числах Пекле / А. И. Сухинов, И. Ю. Кузнецова, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, Ю. В. Белова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 4. – С. 437–448.

7. Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, И. Ю. Кузнецова, А. М. Атаян, А. В. Никитина // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 2. – С 85–100.

8. *Белоцерковский О. М.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.М. Белоцерковский, В.А. Гущин, В.В. Щенников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 197–207.

9. Investigation of the Approximation Error of the Difference Scheme for the Mathematical Model of Hydrodynamics / A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, I. Y. Kuznetsova, E. O. Rakhimbaeva, M. V. Porksheyan // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No. 5. – P. 1839–1846.

10. *Самарский А. А.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва: URSS, 2009. – 248 с.

11. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.

12. Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе / В. Н. Литвинов, А. Е. Чистяков, А. В. Никитина, А. М. Атаян, И. Ю. Кузнецова // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 647–672.

13. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина, И. Ю. Кузнецова, А. М. Атаян // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 298–315.

УДК 517

# О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЯТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

**Е. А. Шайна**

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»*

**Аннотация.** В работе изучается математическая модель пятого порядка с производными по мере, которая описывает малые деформации системы, состоящей из двух стержней, соединенных растянутой струной, причем один из них помещен во внешнюю среду с «двойным» основанием в рамках модели Власова — Леонтьева. Получены достаточные условия положительной обратимости.
**Ключевые слова:** функционал, интеграл Стилтьеса, производная по мере, достаточные условия, граничная задача, положительная обратимость.

## Введение

В задачах математической физики и механики деформируемых тел возникают разнопорядковые модели, то есть модели, у которых порядок уравнения различен на разных промежутках. Как правило изучаются эти модели как краевые задачи с граничными условиями, поставленными во внутренних точках отрезка. Используемый нами подход интерпретирует условия, ранее бывшие краевыми, как уравнения в точках.

## 1. Основной результат

В работе получены достаточные условия положительной обратимости математической модели пятого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\sigma}\left[((-pu'''_{xx\mu})'_x + ru''_{xx})'_x - gu'_x\right] + uq = f; \\ pu'''_{xx\mu}(0) - \gamma_1 u''_{xx}(0) = 0; \\ ru''_{xx}(l) + \gamma_2 u'_x(l) = 0; \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(l) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере. Здесь $\gamma_i > 0 \ \ (i = 1,2)$. Отметим, что эта модель возникает при описании малых поперечных деформаций, возникающих под воздействием внешней силы интенсивности $f(x)$ системы, состоящей из двух стержней, соединенных растянутой струной. Точки соединения мы обозначим через $\xi_1$ и $\xi_2$. При этом мы считаем, что стрежень, размещенный вдоль отрезка $[0;\xi_1]$ погружен во внешнюю среду с упругим «двойным» основанием (в рамках модели Власова — Леонтьева).

На протяжении всей работы предполагаются выполненными следующие условия:

1. $\inf\limits_{[0;\xi_1)} p(x) > 0; \ \ p(x) \equiv 0$ на $[\xi_1; l]$;
2. $\inf\limits_{(\xi_2;l]} r(x) > 0; \ \ r(x) \geq 0$ для всех $x \in [0;l]$;
3. $\inf\limits_{(\xi_1;\xi_2)} g(x) > 0; \ \ g(x) \geq 0$ для всех $x \in [0;l]$;

4. функции $x,\ \mu(x),\ p(x),\ r(x),\ g(x),\ q(x),\ \theta(x-\xi_i)\ (i=1,2)$ — $\sigma$-абсолютно непрерывны на $[0;l]$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная 0, если $x<0$, и 1, если $x>0$.

5. $\gamma_i>0\ (i=1,2)$.

Уравнение задано почти всюду на расширении отрезка $[0;l]$, в котором каждая точка $\xi$ разрыва функции $\sigma(x)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$. Обозначим через $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. Пусть $I=[0;l]\setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ и $\rho(x,y)=\left|\sigma(x)-\sigma(y)\right|$ — метрика на $I$. Если $S(\sigma)\neq 0$, то метрическое пространство $(I,\rho)$ — неполное. Обозначим через $\overline{[0;l]}_s$ — стандартное пополнение $(I,\rho)$ до полного метрического пространства. В $\overline{[0;l]}_s$ каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменена на пару собственных элементов $\{\xi-0;\xi+0\}$. Уравнение (1) задано на $\overline{[0;l]}_\sigma=\overline{[0;l]}_S\bigcup S(\sigma)$. Отметим, что для первого уравнения в $\xi_1$ — точке соединения стержня, помещенного на «двойное» упругое основание и растянутой струны, должны выполняться четыре условия: $u(\xi_1-0)=u(\xi_1+0),\quad pu'''_{xx\mu}(\xi_1-0)=0,\quad (pu'''_{xx\mu})'_x(\xi_1-0)-(ru''_{xx})(\xi_1-0)=0,\quad (pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi_1-0)-(ru''_{xx})'_x(\xi_1-0)+gu'_x(\xi_1-0)-gu'_x(\xi_1+0)+u(\xi_1)q(\xi_1)=0$; а в $\xi_2$ — точке соединения натянутой струны и стержня три условия: $u(\xi_2-0)=u(\xi_2+0),\quad ru''_{xx}(\xi_2+0)=0,\quad (ru''_{xx})'_x(\xi_2+0)+gu'_x(\xi_2-0)-gu'_x(\xi_2-0)+u(\xi_2)q(\xi_2)=0$; в точках $\xi\in S(\sigma)\bigcap(0;\xi_1)$ должны выполняться шесть условий: $u(\xi-0)=u(\xi+0),\quad u'_x(\xi-0)=u'_x(\xi+0),\quad pu'''_{xx\mu}(\xi-0)=pu'''_{xx\mu}(\xi+0)=0,\ (pu'''_{xx\mu})'_x(\xi-0)=(pu'''_{xx\mu})'_x(\xi+0),\quad -\Delta(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi)+\Delta(ru''_{xx})'_x(\xi)-\Delta gu'_x(\xi)+u(\xi)q(\xi)=0$, здесь и далее $\Delta\varphi(x)=\varphi(x+0)-\varphi(x-0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке $x$; если $\xi\in S(\sigma)\bigcap(\xi_1;\xi_2)$, то два условия: $u(\xi-0)=u(\xi+0),\ -\Delta(gu'_x)(\xi)+u(\xi)q(\xi)=0$; и, наконец, если $\xi\in S(\sigma)\bigcap(\xi_2;l)$, то четыре условия: $u(\xi-0)=u(\xi+0),\quad ru''_{x\mu}(\xi-0)=ru''_{x\mu}(\xi+0)=0,\ -\Delta(ru''_{x\mu})'_x(\xi)-\Delta(gu'_x)(\xi)+u(\xi)q(\xi)=0$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе $E$: абсолютно непрерывных на $[0;l]$ функций, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0;l]$, первая производная $u'_x(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\xi_1]$; $u''_{xx}$ — $\mu$-абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$, $pu'''_{xx\mu}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$; $-(pu'''_{xx\mu})'_x(x)+ru''_{xx}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$, $(-(pu'''_{xx\mu})'_x+ru''_{xx})'_x(x)-g(x)u(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$; $u'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[\xi_1;l]$; $(ru''_{xx})(x)$ — абсолютно непрерывна на $[\xi_2;l]$; $(ru''_{xx})'_x(x)-g'_x(x)u(x)$ — $\sigma$-абсолютно непрерывна на $[\xi_2;l]$; $u'_x(x)$ — $\sigma$-абсолютно непрерывна на $[\xi_1;\xi_2]$.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия 1)–5). Тогда существует функция $G(x,s)$ на квадрате $[0;l]\times[0;l]$ такая, что решение задачи (1) представимо в виде:*

$$u(x)=\int_0^l G(x,s)f(s)d\sigma(s) \tag{2}$$

*для всякой $\sigma$-суммируемой функции $f(x)$.*

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия 1)–5) и $q(x)\equiv 0$, $g(x)$ равна нулю на отрезке $[0;\xi_1]$. Если $f(x)\geq 0\ (\neq 0)$ для всех $x\in[0;l]$, тогда решение $u(x)$ математической модели* (1) *неотрицательно для всех $x\in[0;l]$, при этом $u'''_{xx\mu}(0)\neq 0$ и $u''_{xx}(l)\neq 0$.*

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия 1)–5) и $q(x)\equiv 0$, $g(x)$ равна нулю на отрезке $[0;\xi_1]$. Если $f(x)\geq 0\ (\neq 0)$ для всех $x\in[0;l]$, то функция $G(x,s)$ неотрицательна на квадрате $[0;l]\times[0;l]$.*

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия 1)–5) и $q(x)\equiv 0$, $g(x)$ равна нулю на отрезке $[0;\xi_1]$. Тогда существует положительная внутри отрезка $[0;l]$ функция $u_0(x)$ и положительные $\sigma$-суммируемые функции $v_1(s)$ и $v_2(s)$ такие, что*

$$u_0(x)v_1(s)\leq G(x,s)\leq u_0(x)v_2(s). \tag{3}$$

Заметим, что теоремы 1 и 4 позволяют применять теорию вполне непрерывных положительных операторов к изучению нелинейных краевых задач.

**Литература**

1. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. – 1999. – Т. 364, № 2. – С. 167–169.

УДК 51-76+004.942

# ВАРИАЦИЯ РЕЖИМОВ ПОТРЕБЛЕНИЯ НУТРИЕНТА В РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ БАКТЕРИАЛЬНОГО РОСТА НА ПИТАТЕЛЬНЫХ СРЕДАХ

**И. А. Шевкун**

*Университет Иннополис*

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию влияния вариации режимов потребления нутриента, включая временную задержку, на рост бактериальных колоний в рамках нелинейной реакционно-диффузионной модели. Модель формализуется в виде начально-краевой задачи для системы уравнений, учитывающей задержку между потреблением питательного вещества и ростом биомассы. Проведена серия вычислительных экспериментов, позволивших проанализировать пространственно-временное распределение концентрации биомассы и нутриента в зависимости от начального уровня питания и величины задержки. Результаты демонстрируют, что увеличение задержки приводит к значительному замедлению роста колонии, обеднению ее дендритной структуры и изменению внутреннего распределения биомассы.

**Ключевые слова:** бактериальный рост, нутриент, питательная среда, система «реакция-диффузия», модель с запаздыванием, метод конечных разностей, дендритные структуры, вычислительный эксперимент.

## Введение

Вычислительная и математическая биология представляет собой активно развивающееся направление исследований, способствующее прогрессу в понимании механизмов и решении актуальных биологических задач, в частности в микробиологии. Классическим методом микробиологического исследования является культивирование микроорганизмов на специальных питательных субстратах. В настоящее время применяется несколько базовых детерминистических подходов к моделированию пространственно-временной динамики бактериальной биомассы [1–3], а также активно исследуются дискретные динамические модели на основе стохастических симуляций Монте-Карло, агентного моделирования с использованием клеточных автоматов и методов частиц [4–5].

Одним из ключевых регуляторных механизмов биологических процессов является эффект запаздывания обратной связи [6]. Экспериментально установлено, что при изменении концентрации питательных веществ скорость их потребления бактериями изменяется немедленно, тогда как изменения скорости роста бактериальной массы происходят с задержкой. Например, для *Escherichia coli* этот временной лаг оценивается примерно в 20 минут [7].

В рамках настоящего исследования исследуется поведение реакционно-диффузионной модели бактериального роста в двумерной области с добавлением механизма запаздывания по росту бактериальной массы при различных режимах потребления нутриента. Цель работы заключается в оценке влияния величины запаздывания и начального уровня питательного вещества на получаемое решение и на динамику потребления нутриента.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим модель поверхностного роста бактериальных колоний, культивируемых на питательной среде в чашке Петри. Предполагается, что в результате посева бактерий в заданной точке двумерной квадратной области происходит рост колонии за счет непрерывного потребления питательного вещества. В качестве выходных данных необходимо получить про-

странственно-временные распределения концентрации биомассы $b$ и концентрации питательного вещества (нутриента) $b$. В соответствии с биологическим принципом запаздывания концентрация биомассы изменяется с определенной временной задержкой $\alpha$ относительно момента потребления нутриента.

Математическая модель роста бактерий позволяет количественно описать пространственно-временную динамику концентраций биомассы и питательного субстрата. В данном исследовании представлена модификация модели, предложенной в [1], путем включения эффекта временной задержки. Базовая модель предполагает нелинейную зависимость диффузии биомассы от концентрации питательных веществ, а реакционный член соответствует модифицированному представлению динамики Моно. Для двумерного случая с нормализованными переменными задача формализуется в виде начально-краевой задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = \Delta n - bn, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \nabla\left(\sigma n b \nabla b\right) + n\left(t-\alpha\right) b\left(t-\alpha\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $n(x,y,t)$ — концентрация нутриента; $b(x,y,t)$ — концентрация биомассы; $\sigma$ — параметр модели; $\alpha$ — величина запаздывания, $\alpha \geq 0$. Расчетная область представляет собой квадратную двумерную область плюс переменная времени: $\Omega = \{-L \leq x \leq L,\ -L \leq y \leq L,\ 0 \leq t \leq T\}$, $L > 0,\ T > 0$.

Начальные условия задают постоянный уровень нутриента по пространственной области и бактериальный посев в ее центре:

$$n\left(x,y,0\right) = n_0,\ b\left(x,y,0\right) = \beta_m \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{C^2}\right),\ -L \leq x \leq L,\ -L \leq y \leq L, \tag{2}$$

где $n_0$ — начальный уровень нутриента, $\beta_m$ и $C$ — параметры модели.

Для учета эффекта запаздывания также необходимо задать значения функций для отрицательных моментов времени $t \in [-\alpha, 0)$: концентрация нутриента находится на уровне $n_0$, а бактериальная масса нулевая.

Граничные условия задают нулевой поток на границе:

$$\left.\frac{\partial n}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma} = 0,\ \left.\frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma} = 0,\ 0 < t \leq T, \tag{3}$$

где $\Gamma$ — граница расчетной области $\Omega$, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе $\Gamma$.

## 2. Результаты моделирования

Решение задачи (1)–(3) выполнялось методом конечных разностей применением метода дробных шагов. Подробное описание вычислительной схемы можно найти в нашей работе [8]. При вычислительных экспериментах использовались следующие значения параметров: $L = 150,\ T \in [500, 6000],\ n_0 \in [0.5, 0.9],\ \beta_m = 0.71,\ C^2 = 6.25,\ \alpha \in [0, 15]$. Параметр $\sigma$ вычислялся в каждом узле аппроксимации по следующей формуле: $\sigma = 0.8(1+\delta)$, где $\delta$ — случайная величина в диапазоне $(-1,1)$. Вычисления проводились в пакете прикладных программ MATLAB. Была проведена серия вычислительных экспериментов с различными значениями начальной концентрации нутриента $n_0$ и различной величиной задержки $\alpha$, Визуализация полученных результатов для некоторых значений параметров приведена на рис. 1. Под рисунками указан момент времени, в который симуляция была остановлена — момент остановки определялся эмпирическим образом, поскольку скорость роста колонии зависит как от начального уровня нутриента, так и от величины задержки.

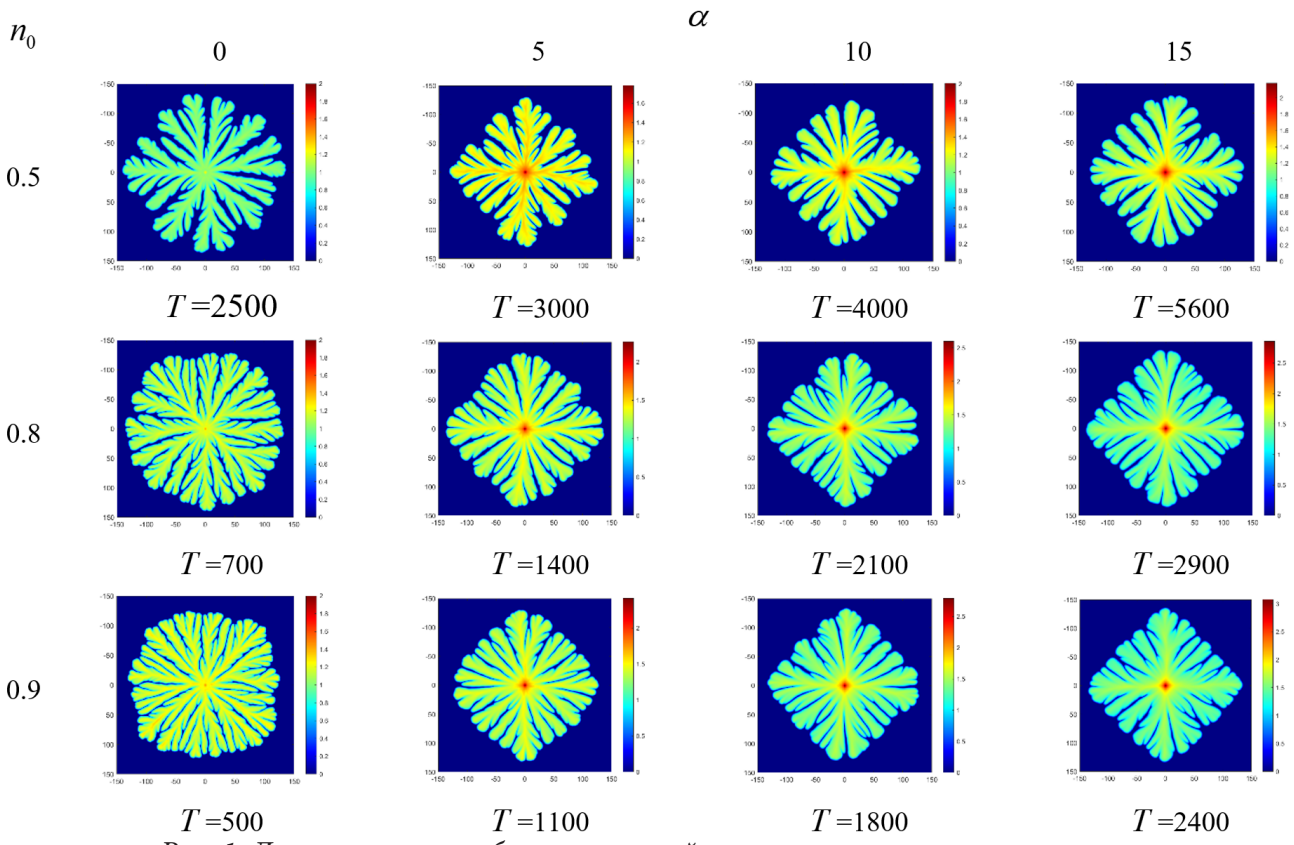



*Рис. 1. Динамика роста бактериальной колонии при различных уровнях начального питания $n_0$ и различной величине запаздывания $\alpha$*

Кроме того, была проведена оценка динамики общего объема нутриента $N^k$ на каждом шаге $k$ по времени, получаемого как сумму значений $n(x, y, t)$ в каждом узле аппроксимации пространственной области: $N^k = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} n_{i,j}^k$. График изменения $N^k$ для различных величин задержки и при $n_0 = 0.5$ представлен на рис. 2. В целом по результатам моделирования можно

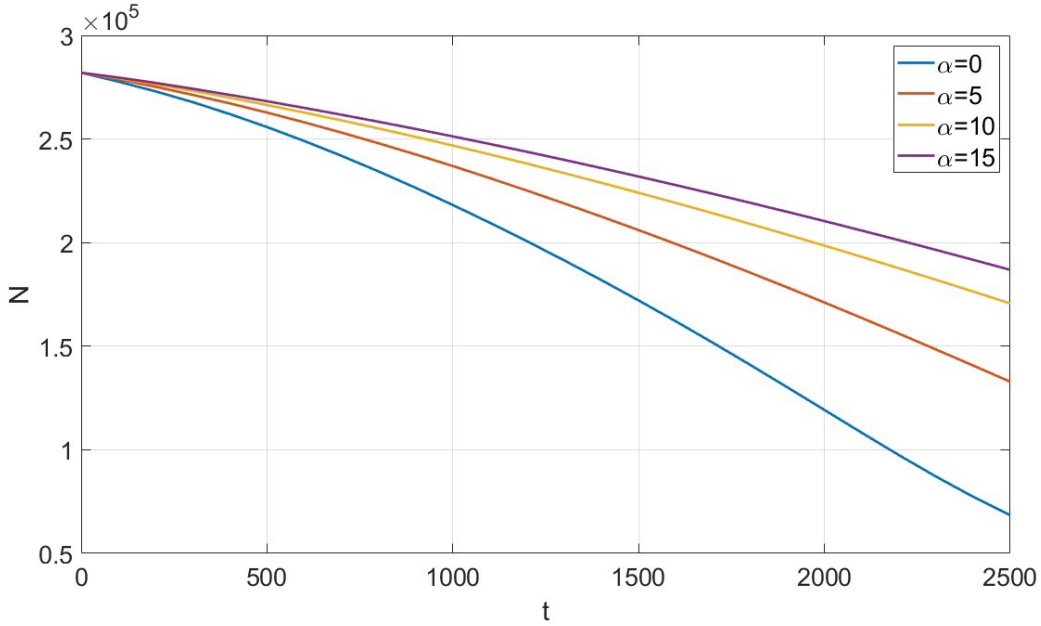



*Рис. 2. Динамика изменения общего объема нутриента для различных величин задержки и при $n_0 = 0.5$*

сделать следующий вывод: добавление задержки роста бактериальной массы после потребления нутриента приводит к существенному замедлению роста бактериальной колонии (а следовательно, и замедлению потребления нутриента), а также к «обеднению» геометрии — структура становится менее ветвистой. Кроме того, на визуализации хорошо видно, что при отсутствии задержки концентрация бактериальной массы более равномерно распределена внутри колонии, тогда как при введении задержки образуются пик в центре и несколько «гребней». Таким образом, добавление задержки в модель существенным образом влияет на получаемый результат.

## Заключение

В работе предложена модификация реакционно-диффузионной модели роста бактериальных колоний с учетом эффекта временной задержки. В результате проведенной серии вычислительных экспериментов установлено, что введение временной задержки между потреблением нутриента и ростом биомассы существенно замедляет общую динамику роста колонии и потребления питательного вещества. Показано, что увеличение параметра задержки приводит также к качественному изменению морфологии колонии: происходит упрощение структуры, уменьшение ветвистости (дендритности) и формирование пика концентрации биомассы в центре с отдельными периферийными гребнями, в отличие от более равномерного распределения при нулевой задержке. Таким образом, учет временной задержки является критически важным фактором для адекватного моделирования пространственно-временной динамики бактериальных колоний. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего анализа и прогнозирования роста микроорганизмов в различных условиях.

## Литература


1. Modeling spatio-temporal patterns generated by Bacillus subtilis / K. Kawasaki, A. Mochizuki, M. Matsushita, T. Umeda, N. Shigesada // Journal of Theoretical Biology. – 1997. – Vol. 188, No 2. – P. 177–185.

2. *Mimura M.* Reaction-diffusion modelling of bacterial colony patterns / M. Mimura, H. Sakaguchi, M. Matsushita // Physica A. – 2000. – Vol. 282, No 1–2. – P. 283–303.

3. *Eberl H. J.* A new deterministic spatio-temporal continuum model for biofilm development / H. J. Eberl, D. F. Parker, M. C. M. van Loosdrecht // Computational and Mathematical Methods in Medicine. – 2001. – Vol. 3. – P. 161–175.

4. *Delavar M. A.* Advanced Methods and Mathematical Modeling of Biofilms. Applications in Health Care, Medicine, Food, Aquaculture, Environment, and Industry / M. A. Delavar, J. Wang. – Academic Press : Elsevier, 2022.

5. *Vassallo L.* On the growth of non-motile bacteria colonies: an agent-based model for pattern formation / L. Vassallo, D. Hansmann, L. A. Braunstein // European Physical Journal B. – 2019. – Vol. 92. – P. 216.

6. *Milton J. G.* Time delays and the control of biological systems: an overview / J. G. Milton // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Vol. 48, No 12. – P. 87–92.

7. *Ellermeyer S.* Theoretical and empirical investigation of delayed growth response in the continuous culture of bacteria / S. Ellermeyer, J. Hendrix, N. A. Ghoochan // Journal of Theoretical Biology. – 2003. – Vol. 222, No 4. – P. 485–494.

8. *Шевкун И. А.* Вариация моделей дендритоподобной морфологии бактериальных культур: численная реализация в рамках реакционно-диффузионного приближения / И. А. Шевкун, А. Г. Масловская // Вестник АмГУ. Серия: Естественные и экономические науки. – 2023. – № 101. – С. 30–39.

УДК 519.86

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ СОТРУДНИКОВ ПО КАТЕГОРИЯМ В УСЛОВИЯХ КРИЗИСА

**М. А. Шмелев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Многие управленческие решения, принимаемые сегодня в условиях кризиса, опираются на теорию оптимизации. Данная статья посвящена анализу того, как те или иные оптимизационные решения влияют на численность сотрудников по категориям. Для построения модели выбрано мультиагентное моделирование, где в качестве отдельных сущностей выделены работники и штатные единицы. Действия работников определяются по отношению к имеющимся штатным должностям. Сама работа предприятия моделируется в двух режимах: стандартный режим и в условиях кризиса. При анализе результатов оказалось, что численность сотрудников при заданных экспертных значениях и в стандартном режиме оказалась устойчива. При оптимизационном режиме наблюдается значительное уменьшение числа работников средней и низкой квалификации.
**Ключевые слова:** антикризисное управление, теория оптимизации, работники, штатные единицы, уровень квалификации, среднеквадратическое отклонение, метод обратных функций.

## Введение

Современные экономические условия, в которых происходит функционирование отечественных предприятий, деятельность экономических субъектов, нельзя назвать стабильными. Во многом они опосредованы объективными факторами, оказывающих влияние на российскую экономику. Среди них введение большого числа санкций против финансового и промышленного секторов России, рост инфляции, во многом вынужденное неравномерное развитие отдельных сфер.

Антикризисное управление — понятие, нередко встречающееся в научной литературе. Оно предполагает раннее выявление кризисных ситуаций и реагирование на них с использованием всех возможных средств и методов [1]. Соответственно, в нестабильной ситуации на первый план выходит грамотное использование экономических методов в экономике.

Многие управленческие решения, принимаемые сегодня в условиях кризиса, опираются на теорию оптимизации. Исходят из предположения, что деятельность экономических субъектов зависит от того, насколько оптимальными были их действия в те или иные отрезки времени. Из этого следует, что принятие оптимальных решений невозможно без учета конкретных экономических реалий.

Однако механическое применение оптимизационных методов не дает ответа на вопрос, каково влияние кризисных мер на долгосрочное развитие предприятия или на организационный процесс. Нельзя бездумно сократить всех неопытных сотрудников, так как любое предприятие заинтересовано в передаче опыта, подготовке опытных кадров на будущее.

Целью данной работы является моделирование численности сотрудников по отдельным категориям в конкретной кризисной ситуации. В качестве математического аппарата применяется теория вероятностей вместе с математической статистикой. Для построения модели выбрано мультиагентное моделирование, где в качестве отдельных сущностей выделены две: работники и штатные единицы. Новизну работе придают не только алгоритмы построения имитационной модели, но и критерий оценки оптимизационных управленческих решений.

## 1. Постановка задачи и построение имитации

Для реализации цели исследования применяется мультиагентное моделирование. Результат взаимодействия агентов предопределяет процесс функционирования модели. Агентные модели находятся посередине по уровню возможной абстракции. То есть, они могут быть как излишне детализированными, так и предельно абстрактными [2, 3].

В качестве среды имитационного моделирования выбран программный продукт Anylogic. Данный продукт основан на объектно-ориентированной концепции, позволяющей построить модель любой предметной области максимально быстро и качественно. Основными строительными блоками в среде AnyLogic являются активные объекты, позволяющие моделировать любые сущности реального мира [3].

В качестве агентов, действующих автономно и без наличия полной информации о штате конкретного предприятия, в нашей модели выступают работники. Их действия определяются по отношению к имеющимся штатным единицам: либо они выбирают конкретную штатную единицу согласно своей квалификации, либо перестают её занимать, делая её вакантной (для других работников). Таким образом, в условиях ограниченного числа рабочих мест наблюдается косвенное взаимодействие работников (как активных агентов) по поводу имеющихся должностей.

Активные агенты (работники) разделены на несколько категорий по степени имеющейся квалификации: высокая, средняя, низкая и техническая (для выполнения вспомогательных задач, не требующих специальной подготовки). Только в условиях кризиса, а не в обычном режиме работы предприятия, привлекаются работники с временной занятостью, которые выделяются в отдельную категорию для дальнейшего анализа результатов. Работники каждой из категорий описываются с помощью векторов, включающих в себя следующие параметры:

1. isconnected (булевское значение; показывает, занимает ли работник какую-либо штатную единицу);
2. resource (показывает название занимаемой штатной единицы);
3. level (текущий уровень квалификации, принимает значения от 0.25 до 1 с шагом 0.25);
4. defaultlevel (первоначальный уровень квалификации).

Также в модели представлены штатные единицы (должности) как объекты. Они также разделяются по степени необходимой квалификации: должности высшего, среднего, низшего и технического уровней (всего четыре типа). Предполагается, что временные работники согласно их квалификации могут занимать любые штатные должности, за исключением высших. Штатные единицы представлены в виде четырех векторов, включающие следующие параметры:

1. level (необходимый уровень квалификации, принимает значения от 0.25 до 1 с шагом 0.25);
2. spread (доля штатных должностей конкретного типа);
3. free (количество незанятых должностей конкретного типа).

Для моделирования численности сотрудников определенных категорий были определены экспертные значения, характеризующие конкретное предприятие. Количество активных агентов (работников) высокой квалификации: 3, средней: 6, низкой: 4, технической: 2. В кризисные периоды привлекается труд временных работников: средней и низкой квалификации, по 6 человек соответственно. Для формулировки теоретических выводов о том, как кризисные периоды влияют на численность сотрудников, количество штатных должностей определенного типа взяты аналогичным образом: 3 должности высшего уровня, 6 — среднего, 4 — низшего и 2 — технического.

В самой модели поочередно действуют два этапа: процесс набора сотрудников и процесс образования вакантных мест (штатных единиц). Иными словами, имитируются процессы сопоставления работника и штатной единицы, а также появления вакантных штатных должно-

стей. Опишем ключевые особенности построения имитации: на первом этапе фиксированное количество раз (в нашей модели выбрано значение: 50) для каждого типа штатной единицы случайным образом генерируется номер действующего агента модели (в кризисных условиях учитываются и временные работники). Если этот агент не занимает какую-либо штатную должность, существует свободная вакансия данного типа и квалификация работника соответствует рассматриваемой должности, то происходит заполнение вакантного места. Процесс увольнения работника с должности имитируется следующим образом. Генерируется случайное значение для каждого работника в интервале от 0 до 1. Каждое значение оценивается в контексте того, попадает ли оно в интервал, характеризующий вероятность образования вакантной должности. В стандартных условиях эта вероятность: $p = 0.2$. На этой идее основан последовательный метод обратных функций [4]. Если сгенерированное значение попадает в этот интервал и сам работник занимает какую-либо штатную должность, то эта штатная единица становится вакантной. Помимо этого, второй этап в модели включает в себя повышение квалификации конкретных работников (с вероятностью 10 % для обычных условий работы предприятия и 5 % для кризисных условий).

Сама работа предприятия моделируется в двух режимах: стандартный режим и в условиях кризиса (оптимизационный режим). Условия кризиса подразумевают несколько оптимизационных управленческих решений. Как было отмечено ранее, временные работники заполняют штатные должности только в кризисный период. Помимо временных работников, вероятность образования вакантной должности становится выше в несколько раз. Также работники в условиях кризиса могут занимать штатную должность на уровень ниже, чем степень их квалификации.

При проведении имитационного моделирования не забудем про ключевые вопросы исследования. Во-первых, устойчива ли численность различных сотрудников в стандартном режиме работы предприятия. Во-вторых, к каким долгосрочным последствиям приводят оптимизационные решения, применяемые в условиях кризиса.

## 2. Проведение имитационного моделирования и анализ результатов

Для получения статистически значимых результатов было проведено большое число запусков модели. Собиралась информация по количеству работников определенной категории после выполнения каждого первого этапа (набора сотрудников) с помощью объектов сбора статистики Statistics, присутствующих в AnyLogic. Сначала сбор статистики происходил при десятикратном запуске модели в стандартном режиме (первый и второй этап были выполнены поочередно 20 раз). Затем аналогичным образом сбор произошел в условиях кризиса.

Чтобы ответить на ключевые вопросы исследования, в качестве критерия выбрано среднеквадратическое отклонение (СКО), который вычисляется как корень из дисперсии. Для каждого запуска модели СКО было вычислено. Однако новизной исследования является получение специальной величины: среднеквадратического отклонения для полученных значений СКО (далее: аналитическая СКО) в оптимизационном режиме моделирования. Эта величина является простой аналитической средней, так как может быть выражена в виде математической формулы, показывающей те операции, которые выполняются над значениями совокупности [5, 6].

Момент проведения имитационного моделирования показан на рис. 1. Можно заметить, что в данный момент наблюдается стандартный режим работы предприятия и последним выполнен второй этап. В итоге образовалось три свободных вакансии, а один из работников повысил свою квалификацию. Так как нет кризисных условий, временные работники не распределяются по штатным должностям.

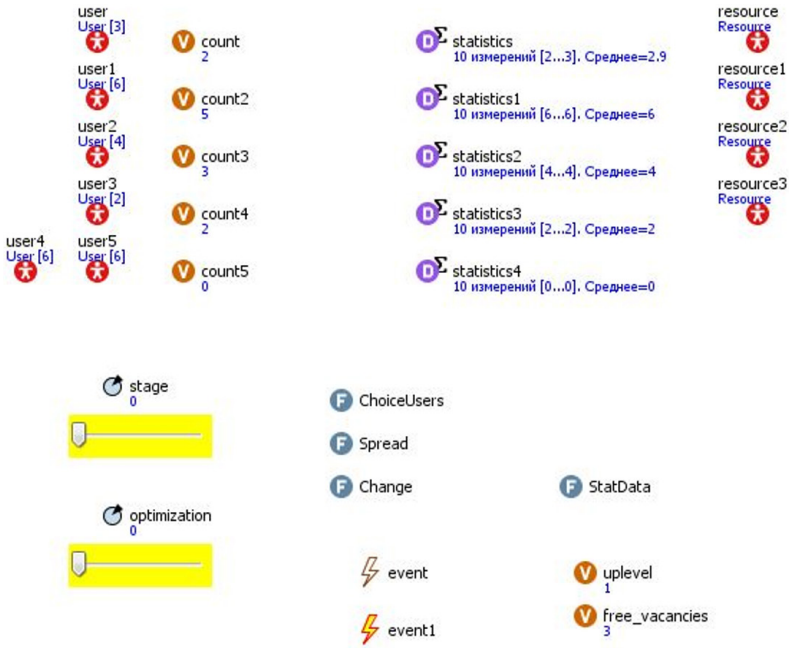



*Рис. 1. Момент проведения имитационного моделирования в стандартном режиме*

При запуске модели в условиях стабильного режима оказалось, что каждый раз после этапа заполнения вакантных мест количество незаполненных штатных единиц по каждой категории не превышало единицу. Так, в штате предприятия всегда присутствовало 2 работника высокой квалификации (максимум: 3), 5 — средней (максимум: 6), 3 — низкой (максимум: 4) и 1 — технической (максимум: 2). Средние значения совокупности СКО (их 10: по количеству запусков модели в стандартном режиме) по степени квалификации работников приведены в табл. 1. На основе этих данных можно заявить, что численность сотрудников устойчива в стандартном режиме работы предприятия (при заданных ранее начальных условиях).

Картина полученных результатов резко меняется в условиях кризиса. Аналогичным образом проведено 10 запусков модели в условиях кризиса на предприятии, когда применяются оптимизационные управленческие решения. Оказалось, что кризис менее затронул работников высокой квалификации: среднее значение для работников высокой квалификации (фиксировались значения только после первого этапа) оказалось равным 2,87. Это объясняется тем, что временные работники не могут занимать должности высшего уровня.

Ситуация с агентами других категорий (в оптимизационном режиме работы предприятия) оказалась менее радостной: среднее значение для работников средней квалификации — 4,69; низкой — 1,54; технической — 1,03. Средние значения совокупности СКО в условиях кризиса представлены в табл. 1. Подсчет аналитической СКО, позволяющей оценить отклонение совокупности значений от среднего СКО, привел к более точным результатам, которые представлены в табл. 2. Вывод следующий: наблюдается сильная неустойчивость численности работников по категориям.

Таблица 1

*Средние значения совокупности СКО по каждой категории работников*

| | **Высокая** | **Средняя** | **Низкая** | **Техническая** | **Временная занятость** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Стандартный режим** | 0,0448 | 0,1512 | 0,1654 | 0,0448 | – |
| **Условия кризиса** | 0,326 | 0,8605 | 0,8803 | 0,4167 | 1,2046 |

Таблица 2

*Значения аналитической СКО по каждой категории работников*

| | **Высокая** | **Средняя** | **Низкая** | **Техническая** | **Временная занятость** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Условия кризиса** | 0,0874 | 0,1883 | 0,1470 | 0,1950 | 0,2371 |

Привлечение временных работников (среднее значение — 4,66) в условиях кризиса позволяет решить проблему нехватки кадров на короткой дистанции, так как общая численность сотрудников по сравнению с обычным режимом осталась схожей. Однако в долгосрочной перспективе уменьшение числа работников средней и низкой квалификации приводит к проблемам смены поколений и передаче опыта на предприятии, а также дефициту новых кадров.

## Заключение

Проведено моделирование численности работников по категориям, то есть по степени квалификации агентов, в условиях кризиса. Для этого вначале изучена устойчивость численности агентов в стандартном режиме работы предприятия. Более точные оценки устойчивости численности сотрудников по категориям получены с помощью аналитической средней, базирующейся на совокупности среднеквадратических отклонений.

Привлечение временных работников на штатные должности предприятия в условиях кризиса оказывается спорной мерой. Данное исследование может стать отправной точкой для оценки степени влияния оптимизационных решений на устойчивое развитие предприятия (или организационного процесса).

## Литература

1. *Халилов Е. И.* Управление предприятием в условиях неопределенности и кризиса / Е. И. Халилов // Стратегии бизнеса. – 2023. – Т. 11. – №. 1. – С. 28-31.

2. *Лимановская О. В.* Имитационное моделирование в AnyLogic 7: Учебное пособие / О. В. Лимановская. – Екатеринбург : Изд-во Уральского университета, 2017. – 152 с.

3. *Эльберг М. С.* Имитационное моделирование: учебное пособие / М. С. Эльберг, Н.С. Цыганков. – Красноярск : СФУ. – 2017.

4. *Некруткин В. В.* Моделирование случайности. – Кафедра статистического моделирования, матмех СПбГУ. Материал к специальному курсу, 2017. – 111 с.

5. *Леденева Т. М.* Обзор основных классов операторов порядкового взвешенного агрегирования / Т. М. Леденева, И. Н. Левкина // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2022. – №. 1. – С. 5-31. DOI: 10.17308/sait.2022.1/9198

6. *Джини К.* Средние величины / К. Джини. – Москва: Статистика, 1970. – 448 с.

УДК 532.517.4

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДАЛЬНИХ ОБЛАСТЕЙ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ

**К. С. Юргенсон**

*Институт вычислительного моделирования СО РАН*

**Аннотация.** Рассматривался вопрос моделирования дальних областей турбулентного слоя смешения на основе *k-epsilon* модели турбулентности. Получена автомодельная редукция уравнений модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Построено приближенное решение краевой задачи для редуцированной системы на основе асимптотического разложения решения в окрестности особой точки. Имеет место хорошее соответствие между сконструированным решением и численным решением, полученным методом стрельбы, а также с экспериментальными данными.
**Ключевые слова:** турбулентный слой смешения, свободная турбулентность, краевая задача, полуэмпирическая модель турбулентности, приближенное решение, асимптотическое разложение, *k-epsilon* модель, автомодельная редукция, особая точка, метод стрельбы.

## Введение

Турбулентные слои смешения представляют собой тип течения, который может формироваться на границе между равномерным потоком и покоящейся средой, либо между двумя параллельными потоками, движущимися с разными скоростями. Такие течения имеют широкие приложения.

Одной из основных особенностей турбулентного слоя смешения является то, что в его дальних областях экспериментально наблюдаются автомодельные режимы. Данная работа посвящена построению приближенного автомодельного решения, описывающего течение в дальних областях турбулентного слоя смешения. Полуэмпирические модели турбулентности имеют инженерную направленность, поэтому представляет интерес получение приближенных формул, позволяющих быстро оценить значения гидродинамических величин турбулентных течений.

В работах [1–3] предложен метод построения приближенных решений краевых задач свободной турбулентности, основанный на сшивке асимптотических разложений. В настоящей работе мы используем предложенную методику для построения приближенного решения рассматриваемой полуэмпирической модели турбулентного слоя смешения.

## 1. Постановка задачи

На рис. 1 представлено два ламинарных потока, движущихся с разными скоростями $U_1$ и $U_2$. Жидкость предполагается однородной и несжимаемой. Из-за разницы скоростей на их граничной зоне происходит формирование и развитие турбулентности. В этой зоне происходит интенсивное перемешивание различных слоев жидкости, что приводит к образованию вихрей, это так называемый переходный участок. Нашей задачей является моделирование области развитой турбулентности. $U$ является продольной компонентой скорости осредненного движения. Координатная ось $Ox$ направлена вниз по течению и совпадает с осью симметрии и с началом координат. Кроме того, предполагается, что течение в дальней области слоя смешения является установившимся.

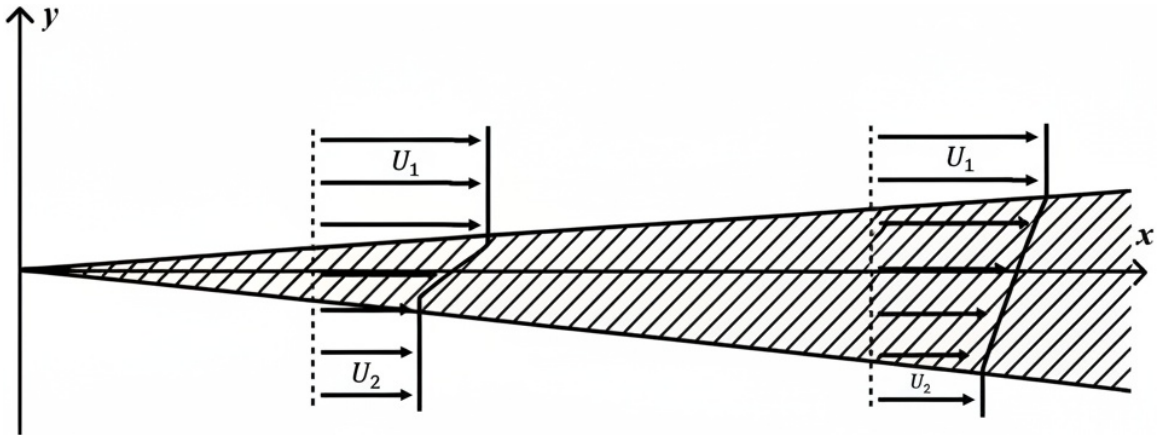



*Рис. 1. Схема течения*

## 2. Автомодельная редукция

Для описания течения в дальних областях турбулентного слоя смешения используется классическая *k-epsilon* модель турбулентности [4]:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$U\frac{\partial k}{\partial x}+V\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_\kappa}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-\varepsilon, \tag{3}$$

$$U\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+V\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+C_{\varepsilon 1}C_\mu k\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{4}$$

где $x$ — переменная, вдоль которой преимущественно развивается слой смешения, $y$ — поперечная координата, $U$ — продольная компонента скорости осредненного движения, $V$ — поперечная компонента скорости осредненного движения, $k$ — кинетическая энергия турбулентности, $\varepsilon$ — скорость диссипация кинетической энергии турбулентности.

Эмпирические постоянные в (1)–(4) имеют следующие значения:

$$C_\mu=0.09, C_{\varepsilon 1}=1.44, C_{\varepsilon 2}=1.92, \sigma_\kappa=1, \sigma_\varepsilon=1.3.$$

Поскольку течение в дальней области турбулентного слоя смешения близко к автомодельному [5,6], мы используем теоретико-групповой анализ [7] для построения автомодельной редукции модели (1)–(4). Несложно показать, что базис алгебры Ли для модели (1)–(4) включает два оператора растяжения:

$$X_1=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}, X_2=U\frac{\partial}{\partial U}+V\frac{\partial}{\partial V}-2k\frac{\partial}{\partial k}+3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Используя линейную комбинацию операторов $X_1$ и $X_2$, мы получаем следующее представление для решения модели (1)–(4):

$$U=U_1(t), V=V_1(t), k=K(t), \varepsilon=x^{-1}E(t), t=\frac{y}{x}, \tag{5}$$

где $t$ является автомодельной переменной.

Используя (5), мы получаем редукцию модели (1)–(4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$V_1'(t) - U_1'(t)\cdot t = 0, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} 2C_\mu \cdot U_1'(t)\cdot V_1'(t)\cdot K(t)\cdot E(t) - C_\mu \cdot K(t)^2 \cdot U_1'(t)\cdot E'(t) + C_\mu \cdot U_1''(t)\cdot K(t)^2 \cdot E(t) + \\ + U_1'(t)\cdot U_1(t)\cdot E(t)^2 \cdot t - U_1'(t)\cdot V_1(t)\cdot E(t)^2 = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} C_\mu \cdot U_1'(t)^2 \cdot K(t)^2 \cdot E(t) + 2\frac{C_\mu}{\sigma_\kappa}\cdot K'(t)^2 \cdot K(t)\cdot E(t) - \frac{C_\mu}{\sigma_\kappa}\cdot K(t)^2 \cdot K'(t)\cdot E'(t) + \\ + \frac{C_\mu}{\sigma_\kappa}\cdot K(t)^2 \cdot E(t)\cdot K''(t) + K'(t)\cdot U_1(t)\cdot E(t)^2 \cdot t - K'(t)\cdot V_1(t)\cdot E(t)^2 - E(t)^3 = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} C_\mu \cdot U_1'(t)^2 \cdot K(t)^2 \cdot E(t)^2 \cdot C_{\varepsilon 1} - \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\cdot K(t)^3 \cdot E'(t)^2 + 2\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\cdot E'(t)\cdot K'(t)\cdot E(t)\cdot K(t)^2 + \\ + \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\cdot E''(t)\cdot E(t)\cdot K(t)^3 + E'(t)\cdot U_1(t)\cdot E(t)^2 \cdot K(t)\cdot t - E'(t)\cdot E(t)^2 \cdot V_1(t)\cdot K(t) + \\ + U_1(t)\cdot E(t)^3 \cdot K(t) - C_{\varepsilon 2}\cdot E(t)^4 = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где $t = \dfrac{y}{x}$ — автомодельная переменная. Известно, что абсолютное значение поперечной компоненты скорости осредненного движения для данного типа течения не превосходит 1 % от абсолютного значения продольной компоненты скорости, поэтому $V_1$ может быть отброшена в уравнениях (7)–(9).

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7)–(9) ставятся следующие краевые условия, согласующиеся с результатами экспериментов [6]:

$$\begin{gathered} U_1(0) = 2,\ K'(0) = 0,\ E'(0) = 0, \\ U_1(a) = 2.531,\ K(a) = 0,\ E(a) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Неизвестное заранее значение $a$ выбиралось в соответствии с экспериментальными данными [6].

Данная краевая задача сложна для решения, так как система оду имеет особенности в коэффициентах системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7)–(9) в граничной точке $t = a$. Для решения краевой задачи применяется модифицированный метод стрельбы [8] с привлечением первых членов асимптотического разложения решения системы (7)–(9) в окрестности особой точки $t = a$:

$$\begin{aligned} U_1 &= C_1 |t-a|^{\alpha_1} + o\left(|t-a|^{\alpha_1}\right), \\ K &= C_2 |t-a|^{\alpha_2} + o\left(|t-a|^{\alpha_2}\right), \\ E &= C_3 |t-a|^{\alpha_3} + o\left(|t-a|^{\alpha_3}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

После подстановки (11) в систему (7)–(9) приводятся подобные слагаемые с наименьшей степенью по $t - a$. Предполагается, что слагаемые с большими степенями сократятся при дальнейшем разложении решений в ряд. В результате можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2-\sigma_\varepsilon}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2-\sigma_\varepsilon}, \\ \alpha_3 &= \frac{\sigma_\varepsilon}{2-\sigma_\varepsilon}, \quad C_3 = \frac{C_\mu C_2^2}{a}. \end{aligned} \tag{12}$$

Разложения (11) и полученные соотношения (12), позволяют упростить поиск начальных данных в точке $t = a$.

В результате расчетов методом стрельбы были получены следующие значения искомых функций:

$$U_1'(0) = 26.315601, \quad K(0) = 0.035, \quad E(0) = 0.24136748.$$

Также было проведено сопоставление с имеющимися экспериментальными данными по дальним областям турбулентного слоя смешения [6]. Получено удовлетворительное соответствие.

### 3. Приближенное решение

Для построения приближенного решения краевой задачи (6)–(11) мы используем подход, предложенный в [1–3] и основанный на сшивке асимптотических разложений.

Решение системы (6)–(9) в окрестности особой точки $t = a$ раскладывается в следующие ряды:

$$U_1^a = u_0 + u_1 \cdot (a-t)^{\frac{10}{7}} + u_2 \cdot (a-t)^{\frac{17}{7}} + u_3 \cdot (a-t)^{\frac{20}{7}} + u_4 \cdot (a-t)^{\frac{24}{7}} + u_5 \cdot (a-t)^{\frac{27}{7}} + u_6 \cdot (a-t)^{\frac{30}{7}} +$$
$$+ u_7 \cdot (a-t)^{\frac{31}{7}} + u_8 \cdot (a-t)^{\frac{34}{7}} + u_9 \cdot (a-t)^{\frac{37}{7}} + u_{10} \cdot (a-t)^{\frac{38}{7}} + u_{11} \cdot (a-t)^{\frac{40}{7}} + u_{12} \cdot (a-t)^{\frac{41}{7}} + \quad (13)$$
$$+ u_{13} \cdot (a-t)^{\frac{44}{7}} + o\left( |t-a|^{\frac{44}{7}} \right),$$

$$K^a = k_1 \cdot (a-t)^{\frac{10}{7}} + k_2 \cdot (a-t)^{\frac{17}{7}} + k_3 \cdot (a-t)^{\frac{20}{7}} + k_4 \cdot (a-t)^{\frac{24}{7}} + k_5 \cdot (a-t)^{\frac{27}{7}} + k_6 \cdot (a-t)^{\frac{30}{7}} +$$
$$+ k_7 \cdot (a-t)^{\frac{31}{7}} + k_8 \cdot (a-t)^{\frac{34}{7}} + k_9 \cdot (a-t)^{\frac{37}{7}} + k_{10} \cdot (a-t)^{\frac{38}{7}} + k_{11} \cdot (a-t)^{\frac{40}{7}} + k_{12} \cdot (a-t)^{\frac{41}{7}} + \quad (14)$$
$$+ k_{13} \cdot (a-t)^{\frac{44}{7}} + o\left( |t-a|^{\frac{44}{7}} \right),$$

$$E^a = e_1 \cdot (a-t)^{\frac{13}{7}} + e_2 \cdot (a-t)^{\frac{20}{7}} + e_3 \cdot (a-t)^{\frac{23}{7}} + e_4 \cdot (a-t)^{\frac{27}{7}} + e_5 \cdot (a-t)^{\frac{30}{7}} + e_6 \cdot (a-t)^{\frac{33}{7}} +$$
$$+ e_7 \cdot (a-t)^{\frac{34}{7}} + e_8 \cdot (a-t)^{\frac{37}{7}} + e_9 \cdot (a-t)^{\frac{40}{7}} + e_{10} \cdot (a-t)^{\frac{41}{7}} + e_{11} \cdot (a-t)^{\frac{43}{7}} + e_{12} \cdot (a-t)^{\frac{44}{7}} + \quad (15)$$
$$+ e_{13} \cdot (a-t)^{\frac{47}{7}} + o\left( |t-a|^{\frac{47}{7}} \right),$$

$$V_1^a = v_0 + v_1 \cdot (a-t)^{\frac{10}{7}} + v_2 \cdot (a-t)^{\frac{17}{7}} + v_3 \cdot (a-t)^{\frac{20}{7}} + v_4 \cdot (a-t)^{\frac{24}{7}} + v_5 \cdot (a-t)^{\frac{27}{7}} + v_6 \cdot (a-t)^{\frac{30}{7}} +$$
$$+ v_7 \cdot (a-t)^{\frac{31}{7}} + v_8 \cdot (a-t)^{\frac{34}{7}} + v_9 \cdot (a-t)^{\frac{37}{7}} + v_{10} \cdot (a-t)^{\frac{38}{7}} + v_{11} \cdot (a-t)^{\frac{40}{7}} + v_{12} \cdot (a-t)^{\frac{41}{7}} + \quad (16)$$
$$+ v_{13} \cdot (a-t)^{\frac{44}{7}} + o\left( |t-a|^{\frac{44}{7}} \right),$$

где $u_1, k_1, e_1$ являются произвольными постоянными. Остальные коэффициенты представляют собой некоторые выражения от $u_1, k_1, e_1$ которые не приводятся здесь ввиду их громоздкости.

Вблизи точки $t = 0$ решение редуцированной системы ОДУ с учетом граничных условий (10) представляется следующими степенными рядами:

$$U_1^0 = 2 + \sum_{i=1}^{13} \alpha_i t^i + o(t^{13}), \quad (17)$$

$$K^0 = K_0 + \sum_{i=2}^{13} \beta_i t^i + o(t^{13}), \quad (18)$$

$$E^0 = E_0 + \sum_{i=2}^{13} \gamma_i t^i + o(t^{13}), \tag{19}$$

$$V_1^0 = \sum_{i=2}^{13} \delta_i t^i + o(t^{13}), \tag{20}$$

где $\alpha_1$, $K_0$, $E_0$ являются произвольными постоянными. Коэффициенты $\alpha_i$ $(i = 1,...,13)$ и $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$ $(i = 2,...,13)$ в (17)–(20) являются некоторыми выражениями от $\alpha_1$, $K_0$, $E_0$. Эти выражения не приводятся здесь, так как они громоздки.

Приближенное решение будет строиться на основе разложений (13)–(16), где теперь предполагается, что коэффициенты $u_i$ $(i = 9,...,13)$, $k_i$ $(i = 9,...,13)$, $e_i$ $(i = 9,...13)$ и $v_i$ $(i = 9,...,13)$ являются произвольными, и их значения определяются в процессе выполнения процедуры сшивки со степенными разложениями (17)–(20), которая выполняется в точке $t = 0$. Приравнивая производные соответствующего порядка усечений разложений (13)–(16) и (17)–(20)

$$\left.\frac{d^i}{dt} U_1^0\right|_{t=0} = \left.\frac{d^i}{dt} U_1^a\right|_{t=0}, \quad i = 0..6, \tag{21}$$

$$\left.\frac{d^i}{dt} K^0\right|_{t=0} = \left.\frac{d^i}{dt} K^a\right|_{t=0}, \quad i = 0..6, \tag{22}$$

$$\left.\frac{d^i}{dt} E^0\right|_{t=0} = \left.\frac{d^i}{dt} E^a\right|_{t=0}, \quad i = 0..6, \tag{23}$$

$$\left.\frac{d^i}{dt} V_1^0\right|_{t=0} = \left.\frac{d^i}{dt} V_1^a\right|_{t=0}, \quad i = 0..5, \tag{24}$$

мы получаем систему алгебраических уравнений с неизвестными величинами $\alpha_1$, $K_0$, $E_0$, $u_i$ $(i = 1, 9,...,13)$, $k_i$ $(i = 1, 9,...,13)$, $e_i$ $(i = 1, 9,...13)$ и $v_i$ $(i = 0, 9,...,13)$. Значение $a$ возьмём равным 0.02298 в соответствии с экспериментальными данными [6]. Система алгебраических уравнений (21)–(24) решается численно и дает:

$$\alpha_1 = 26.1210,\ E_0 = 0.2402,\ K_0 = 0.0351,\ u_1 = -178.5959,\ u_9 = -7.9492, u_{10} = 3.4458,$$
$$u_{11} = -1,4395,\ u_{12} = 1.5555,\ u_{13} = -4.6517,\ k_1 = 25.0769,\ k_9 = -9.9710,\ k_{10} = 1.9394,$$
$$k_{11} = -1.2083,\ k_{12} = 1.3912,\ k_{13} = -4.5359,\ e_1 = 1538.3685,\ e_9 = -4.4521,\ e_{10} = 3.7018,$$
$$e_{11} = -1.9967,\ e_{12} = 2.2279,\ e_{13} = -6.6544,\ v_0 = 0.0055,\ v_9 = -1.3395,\ v_{10} = 6.3559,$$
$$v_{11} = -2.6777,\ v_{12} = 2.8561,\ v_{13} = -8.0956.$$

В результате численных расчетов были найдены следующие значения: $\alpha_1 = 26.1210$, $K_0 = 0.2402$, $E_0 = 0.0351$, Сравнение построенного решения в виде усечений рядов Пьюизё и численного решения, полученного с помощью модифицированного метода стрельбы показывает, что максимальная относительная погрешность между ними не превышает 1 % (рис. 2). В таблице 1 представлена зависимость получаемых в результате сшивки значений кинетической энергии турбулентности, скорости ее диссипации и производной продольной компоненты скорости в точке $t = 0$ от количества аппроксимантов в усечении рядов Пьюизё ($n$ — количество аппроксимантов в усечении рядов Пьюизё, $m$ — количество произвольных коэффициентов в разложениях (13)–(16), $\alpha_1$ — значение производной продольной компоненты скорости в $t = 0$, $K_0$ — значение кинетической энергии турбулентности в $t = 0$, $E_0$ — значение скорости диссипации кинетической энергии турбулентности в $t = 0$).

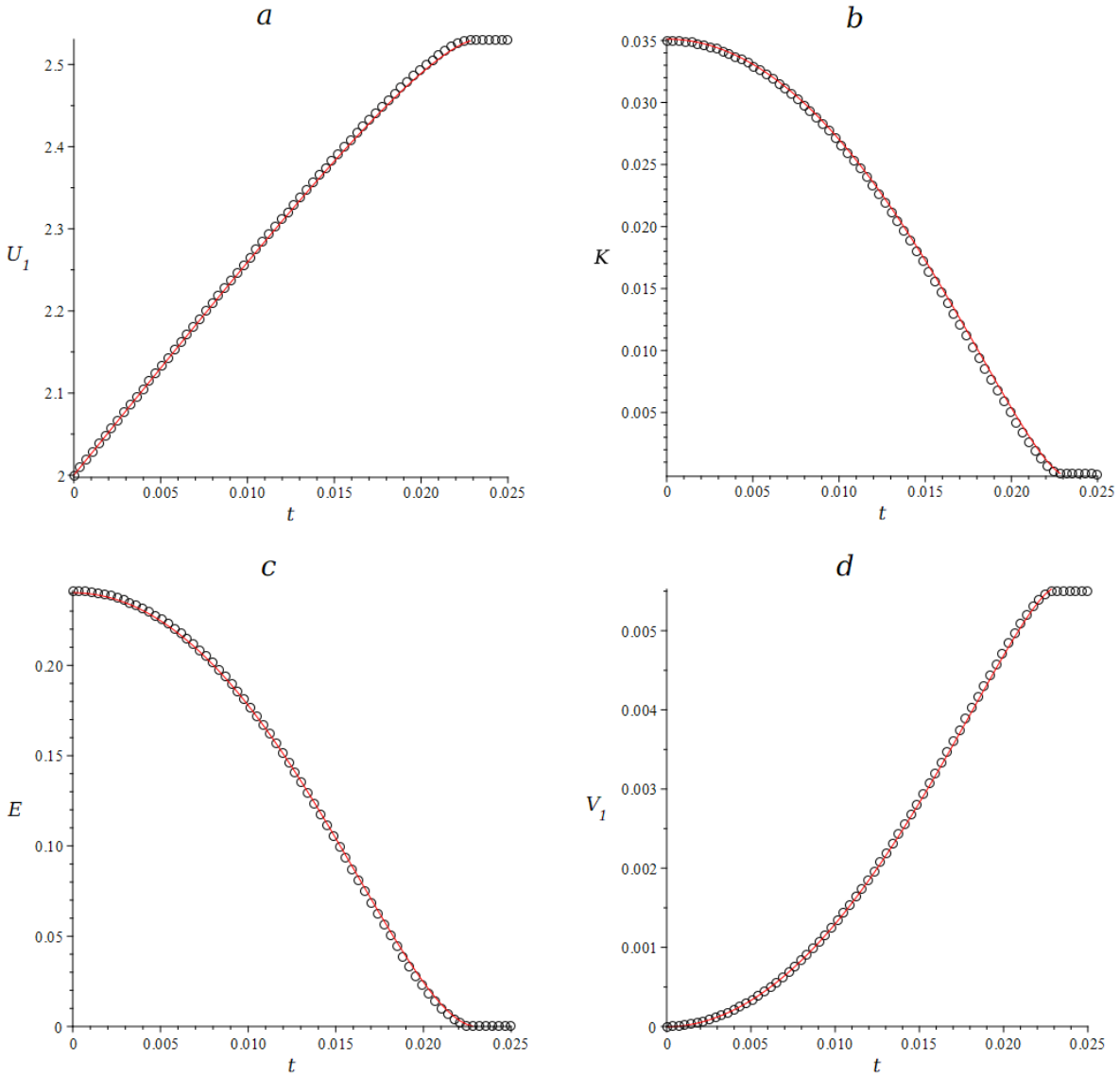



*Рис. 2. Профили приближенных и численных решений: a — продольная компонента скорости осредненного движения, b — кинетическая энергия турбулентности, c — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, d — поперечная компонента скорости осредненного движения; сплошные красные линии — приближенное решение, пунктирные черные точки — численное решение*

Таблица 1

*Зависимость искомых величин от количества аппроксимантов*

| $n(m)$ | 7(3) | 8(3) | 9(3) | 10(4) | 11(4) | 12(5) | 13(5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | 25.6281 | 25.7969 | 26.23 | 26.7087 | 26.7399 | 26.0019 | 26.1210 |
| $K_0$ | 0.0325 | 0.034 | 0.037 | 0.038 | 0.0385 | 0.0342 | 0.0351 |
| $E_0$ | 0.2192 | 0.2301 | 0.2540 | 0.2659 | 0.2697 | 0.2335 | 0.2402 |

## Заключение

Построено приближенное автомодельное решение *k-epsilon* модели, описывающее течение в дальней области турбулентного слоя смешения. Получено хорошее согласие сконструированного решения с численным, полученным методом стрельбы.

**Благодарности**

Автор выражает благодарность научному руководителю А. В. Шмидту за внимание к работе.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075–02–2025–1606).

**Литература**

1. *Шмидт А. В.* Приближенное решение задачи о течении в дальнем плоском безымпульсном турбулентном следе / А. В. Шмидт // ПМТФ. – 2023. – № 6. – С. 53–59.

2. *Shmidt A. V.* Approximate solution to a model of the far momentumless axisymmetric turbulent wake / A. V. Shmidt // J. SFU Math. & Phys. – 2024. – Vol. 17, № 2. – P. 229–237.

3. *Шмидт А. В.* Приближенное решение краевой задачи для модели дальнего закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом / А. В. Шмидт // Материалы докладов V Конференции математических центров России. — Красноярск : ИВМ СО РАН, 2025. – С. 155–161.

4. *Launder B. E.* The numerical computation of turbulent flows / B. E. Launder, D. B. Spalding // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1974. – Vol. 3, № 2. – P. 269–289.

5. *Liepmann H. W.* Investigation of Free Turbulent Mixing / H. W. Liepmann, J. Laufer. – 1947. – (NACA Technical Note; № 1257).

6. *Гарбарук А. В.* Курс лекций «Моделирование турбулентности». Лекция 7 «Свободные сдвиговые течения» / А. В. Гарбарук. – Санкт-Петербург: Политехнический университет Петра Великого, 2019. – URL: http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models (дата обращения: 15.02.2025).

7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – Москва : Наука, 1978. – 400 с.

8. *Капцов О. В.* Семейство автомодельных решений одной модели дальнего турбулентного следа / О. В. Капцов, Ю. В. Шанько // Труды международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании». Т. 1. – Новосибирск : АНО «Редакция журнала «ЭКО»», 2006. – С. 576–579.

УДК 519.8

# ЗАДАЧА О ЗАПАСНЫХ ЧАСТЯХ

**А. С. Якимов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается решение задачи оптимизации управления запасами в логистических системах методом динамического программирования. Для решения классической «задачи о запасных частях» демонстрируется алгоритм определения оптимального количества деталей различных типов для перевозки с учетом ограничений по весу и объему транспортного средства. Описывается математическое моделирование стохастического процесса с использованием распределения Пуассона и вывод рекуррентного соотношения для минимизации ожидаемых убытков от дефицита запчастей. Исследуются вычислительные аспекты алгоритма и применение техники мемоизации. Проведён сравнительный анализ эффективности метода динамического программирования для задач разного количества типов ресурсов, показывающий применимость к практическим задачам логистического планирования средней сложности.
**Ключевые слова:** динамическое программирование, оптимизация управления запасами, распределение Пуассона, рекуррентное соотношение, мемоизация, задача о запасных частях, минимизация убытков.

## Введение

Оптимизация управления запасами представляет собой одну из наиболее значимых и сложных задач в современной логистике и управлении цепями поставок. Основной задачей в этой сфере является расчет оптимального количества ресурсов при наличии жестких ограничений, поскольку именно такие условия наиболее точно отражают реальные операционные вызовы, с которыми сталкиваются компании в транспортных и производственных отраслях.

Выбор метода решения задачи определения оптимального количества запасных частей обусловлен специфической структурой самой задачи, которая обладает свойством оптимальной подструктуры. Свойство проявляется в том, что оптимальное распределение для всех $N$ типов ресурсов вытекает из оптимального решения для меньшего числа типов деталей при различных комбинациях доступного объёма и веса.

Важным элементом, обеспечивающим эффективность динамического программирования, является применение техники мемоизации в реализации алгоритма. Она заключается в сохранении результатов решения всех промежуточных подзадач. Без этого механизма алгоритм будет вынужден многократно пересчитывать одни и те же задачи, что приводит к неприемлемым временным затратам.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается задача о запасных частях, актуальность которой описана в введении, для решения которой разработан алгоритм решения. В статье рассматриваются методы динамического программирования, подходящий для этой задачи, имеющие свои плюсы и минусы.

Дано $N$ типов деталей. Заданы вектор весов $w = (w_1, w_2, ..., w_N)$ и вектор объёмов $s = (s_1, s_2, ..., s_N)$. Осуществляется перевозка деталей на склад, причем потребность в деталях каждого типа задана распределением Пуассона, для которого задан вектор параметров спроса $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$. Убытки за нехватку одной детали каждого типа задаются вектором $c = (c_1, c_2, ..., c_N)$. Для перевозки используется грузовой самолёт, у которого заданы максималь-

ные грузоподъёмность $W$ и объём груза $S$. Требуется найти вектор количества деталей $X = (x_1, x_2, ..., x_N)$, где $x_i$ — количество деталей $i$-го типа, которые следует погрузить в самолёт. Вектор решения должен быть таким, чтобы суммарные убытки склада были минимальны при заданных ограничениях $S$ и $W$.

## 2. Математическая модель

Исходя из условия, решение должно соответствовать системе ограничений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \le W, \\ \sum_{i=1}^{N} s_i x_i \le S. \end{cases}$$

Если $x_i$ — количество деталей $i$-го типа, а $P(z)$ — вероятность потребности на складе в $z$ деталей, то ожидаемый убыток вследствие неудовлетворения спроса будет равен:

$$c_i \sum_{z=x_i+1}^{\infty} (z - x_i) P(z).$$

Данная формула является математическим ожиданием функции убытков, зависящая от распределения. В задаче используется распределение Пуассона. Если $P(z, \lambda_i)$ — распределение Пуассона для $i$-го типа деталей, то общее математическое ожидание убытков со всех типов деталей по свойству аддитивности равно [2]:

$$E_N = \sum_{i=1}^{N} c_i \left[ \sum_{z=x_i+1}^{\infty} (z - x_i) P(z, \lambda_i) \right]. \quad (1)$$

Распределение Пуассона рассчитывается по формуле:

$$P(z, \lambda_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda_i^z}{z!}.$$

Математической задачей является минимизация функции $E_N$ по всем $x_i$, где $x_i$ — неотрицательные числа, с учетом всех ограничений.

## 3. Вывод основного рекуррентного выражения

Для решения задачи минимизации функции $E_N$ методом динамического программирования необходимо вывести рекуррентную функцию, описывающую минимальный ожидаемый убыток.

Функция $f_k(w', s')$ определяется как убыток, полученный путем оптимального выбора количества деталей первых $k$ типов для ограничений веса $w'$ и объёма $s'$. Значения $w'$ и $s'$ могут изменять в диапазонах $0 \le w' \le W$, $0 \le s' \le S$.

Рекурсия должна иметь точку остановки, поэтому определяется базовый случай для основного выражения, которым является $f_0(w', s') = 0$.

Исходя из имеющихся ограничений, при расчете функции для $k$ типов деталей, рекурсивная функция $f_{k-1}$ вызывается по параметрам, равным остаткам доступного объёма и веса после погрузки деталей $k$-го типа: $w' - w_k x_k$, $s' - s_k x_k$.

Основное рекуррентное выражение, с учетом указанной в постановке задачи функции минимизации, будет иметь вид:

$$f_k(w', s') = \min_{x_k} \left[ c_k \sum_{z=x_k+1}^{\infty} (z - x_k) P(z, \lambda_k) + f_{k-1}(w' - w_k x_k, s' - s_k x_k) \right]. \quad (2)$$

Значение $x_k$ для вызова функции будет перебираться в диапазоне, не позволяющем алгоритму взять такое количество деталей, чтобы выйти за пределы значений оставшегося веса или объёма:

$$0 \le x_k \le \min\left\{\left[\frac{w'}{w_k}\right],\left[\frac{s'}{s_k}\right]\right\}.$$

При работе алгоритма неизбежно будут возникать случаи дублирования вызова функции $f_k(w', s')$, что приведёт к повторяющимся перерасчетам, затрачивающим много времени. Проблема решается применением техники мемоизации, благодаря которой значение каждого уникального вызова функции запоминается, а при повторном вызове уже сохранённого варианта вызова, программа подставляет соответствующее значение функции, избегая лишних вычислений и существенно сокращая время работы.

Для исследования результатов рассматриваются оценки времени работы алгоритма стандартного перебора всех возможных решений, алгоритма динамического программирования с использованием мемоизации и без. Исследование включает в себя решение задач с разным количеством запчастей для проверки эффективности работы на больших и малых размерностях.

Рассматриваемые размерности: 2, 5, 10, 100. Для всех размерностей каждый алгоритм решает по 20 задач, после чего оценивается среднее время выполнения расчетов минимальных убытков. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Время выполнения расчетов алгоритмов*

| Размерность задачи | Алгоритм перебора | ДП без мемоизацией | ДП с мемоизацией |
|---|---|---|---|
| 2 | 0.001 с. | 0.002 с. | 0.003 с. |
| 5 | 0.83 с. | 0.51 с. | 0.12 с. |
| 10 | 20.57 с. | 17.34 с. | 0,89 с. |
| 100 | > 10 мин. (не завершен) | > 10 мин. (не завершен) | 8.681 |

Исходя из полученных данных видно, что на совсем малых размерностях алгоритм динамического программирования работает немного медленнее, однако с увеличением количества вводных время его работы, в отличие от других алгоритмов, остается в приемлемых рамках.

## Заключение

Анализ результатов работы алгоритма на примере задачи о запасных частях подтверждает его высокую эффективность для решения практических задач оптимизации распределения ресурсов. Ключевым преимуществом метода динамического программирования является гарантированное нахождение оптимального решения, что особенно ценно в логистических расчетах, где ошибки могут привести к существенным финансовым потерям. Алгоритм демонстрирует приемлемое время выполнения для задач средней размерности, соответствующих реальным потребностям планирования поставок, что делает его практичным инструментом в управлении цепями поставок.

Однако стоит заметить, что при значительном увеличении количества типов деталей или ограничений по ресурсам вычислительная сложность алгоритма возрастает, что может привести к неприемлемому времени выполнения. Дополнительным ограничением является высокая требовательность к объему памяти — техника мемоизации предполагает хранение результатов вычислений для всех возможных комбинаций параметров, что при больших размерностях требует значительных вычислительных ресурсов.

Это позволяет сделать вывод о целесообразности применения динамического программирования в случаях, когда требуется гарантированно оптимальное решение при умеренной размерности задачи.

**Литература**

1. *Беллман Р. Э.* Динамическое программирование: учебное пособие – Москва : Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.

2. *Беллман Р. Э.* Прикладные задачи динамического программирования: учебное пособие / Дрейфус С. Э. – Москва : Наука, 1965. – 460 с.

3. *Лежнев А. В.* Динамическое программирование в экономических задачах – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 176 с.